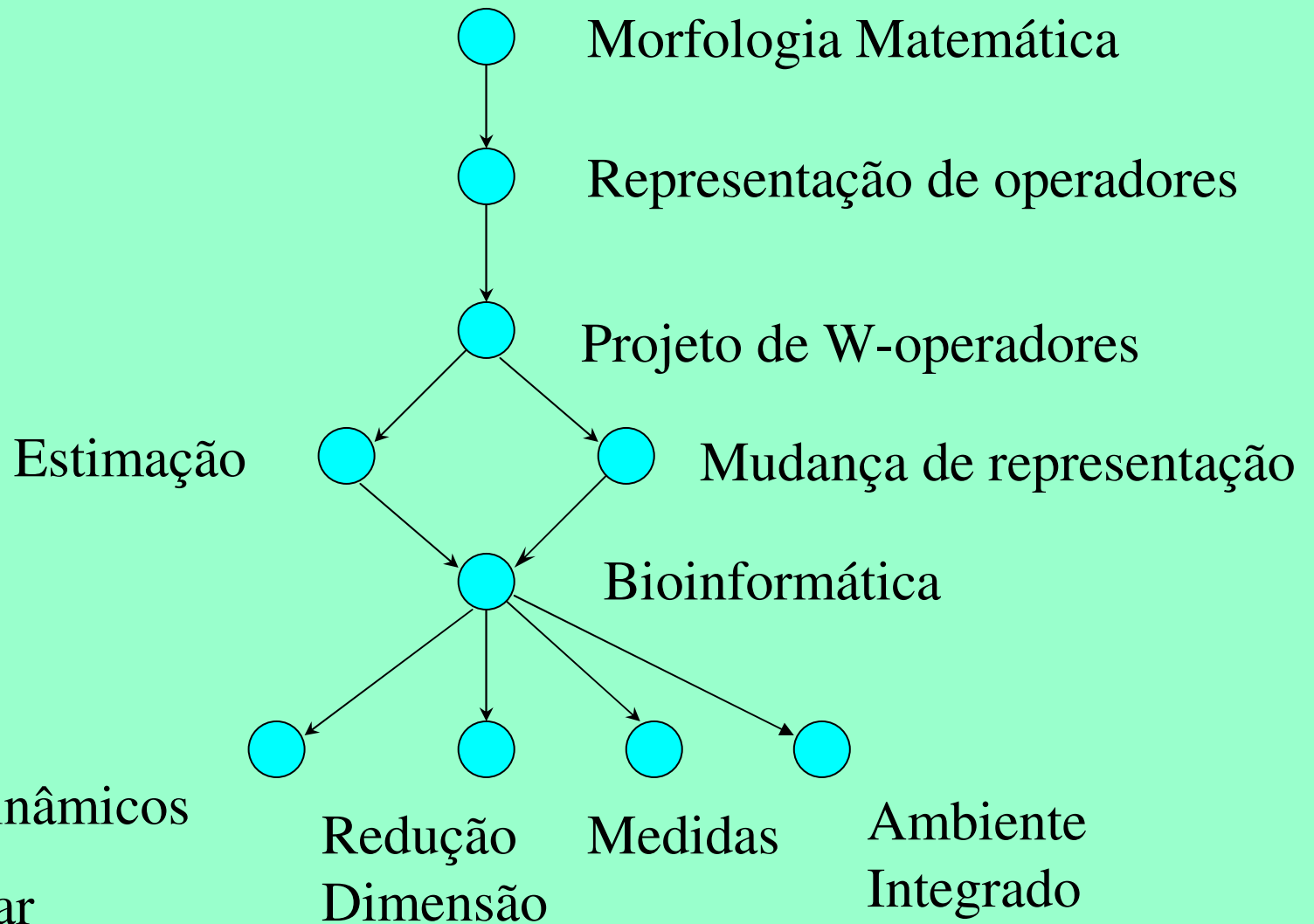
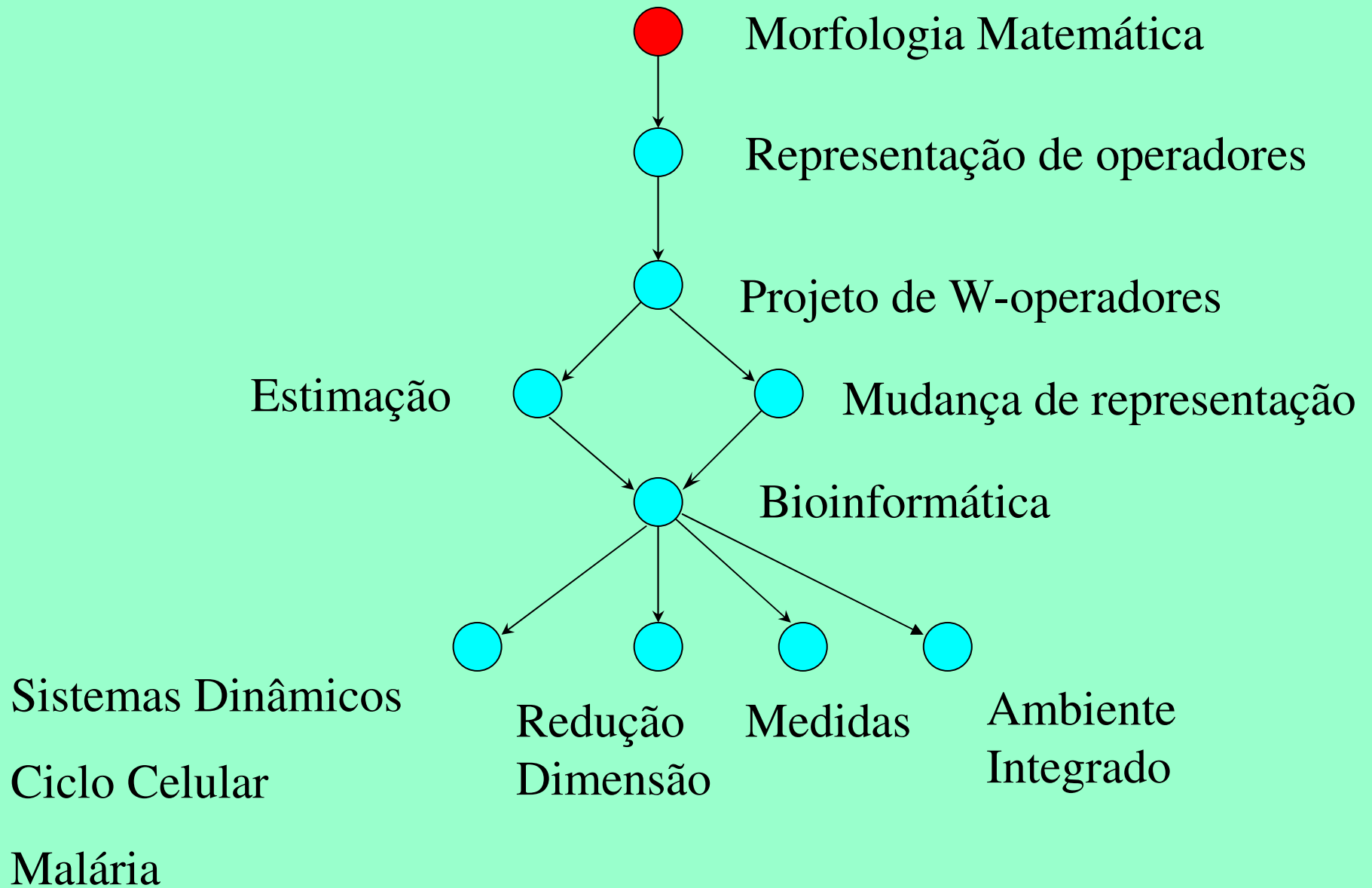


# Morfologia Matemática: teoria, sistemas e aplicações

Junior Barrera

IME-USP





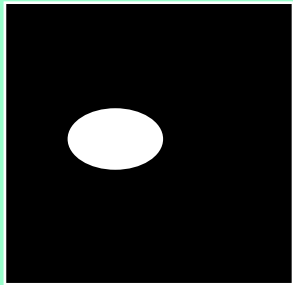
# História da Morfologia Matemática

Matheron e Serra, 1965

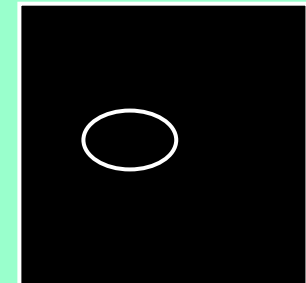
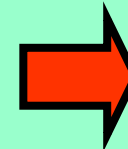
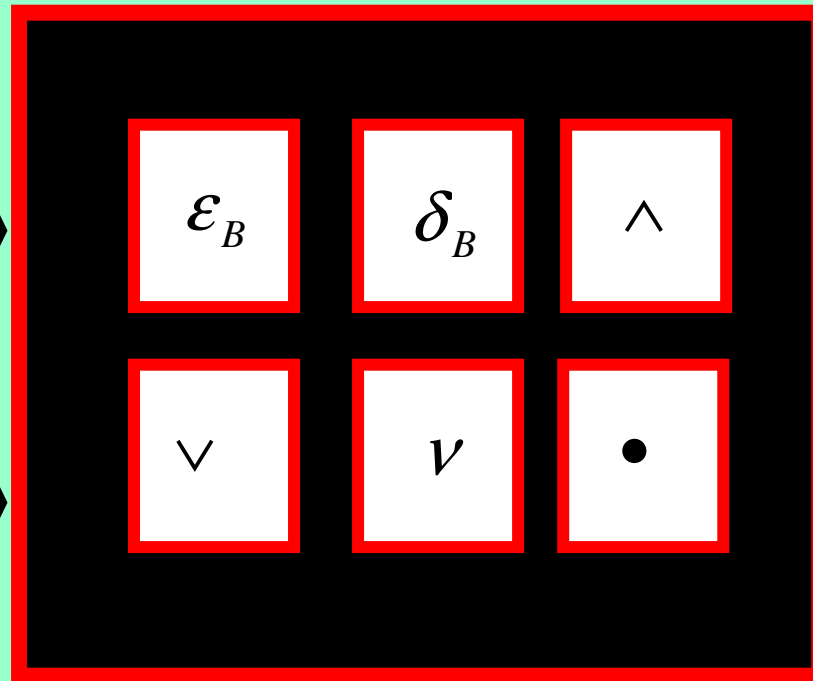
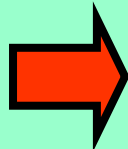
Soma e subtração de Minkowski

Transformar imagens

Texture Analyser (Klein)



$$\psi = l \wedge v \epsilon_B$$



Máquina Morfológica

Um operador  $\delta$  de  $\mathfrak{S}_1$  em  $\mathfrak{S}_2$  é uma **dilatação** sse

$$\delta(\vee X) = \vee \{\delta(X) : X \in X\}, \quad X \subseteq \mathfrak{S}_1$$

$$\delta_B(Y) = \bigcup_{y \in Y} B_y$$



$Y$

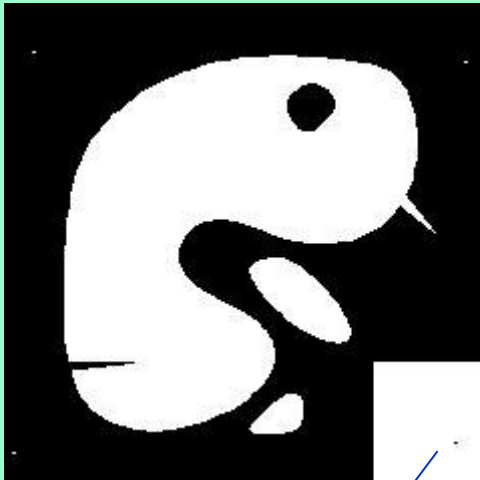
$\delta_B(Y)$

Um operador  $\varepsilon$  de  $\mathfrak{S}_1$  em  $\mathfrak{S}_2$  é uma **erosão** sse

$$\varepsilon(\wedge X) = \wedge \{ \varepsilon(X) : X \in \mathcal{X} \}, \quad \mathcal{X} \subseteq \mathfrak{S}_1$$

$$\varepsilon_B(X) = \{ y \in E : B_y \subseteq X \}$$

$X$



$y$



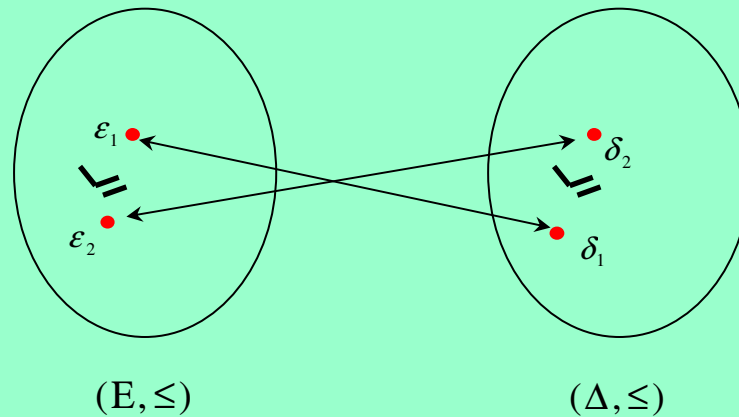
elem. estruturante:

$\varepsilon_B(X)$

$B_y^t$

Sejam  $\psi \in \mathfrak{S}_2^{\mathfrak{S}_1}$  e  $\beta \in \mathfrak{S}_1^{\mathfrak{S}_2}$ . O par  $(\psi, \beta)$  é uma **Conexão de Galois** entre  $\mathfrak{S}_1$  e  $\mathfrak{S}_2$  sse,  $\forall (X, Y) \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ ,

$$X \leq \beta(Y) \Leftrightarrow Y \leq \psi(X)$$



O conjunto das **conexões de Galois** entre  $(\mathfrak{S}_1, \geq)$  e  $(\mathfrak{S}_2, \leq)$  é idêntico ao **gráfico do isomorfismo dual** entre o conjunto das **erosões** (E) e das **dilatações** ( $\Delta$ )



# CF-MM projetadas

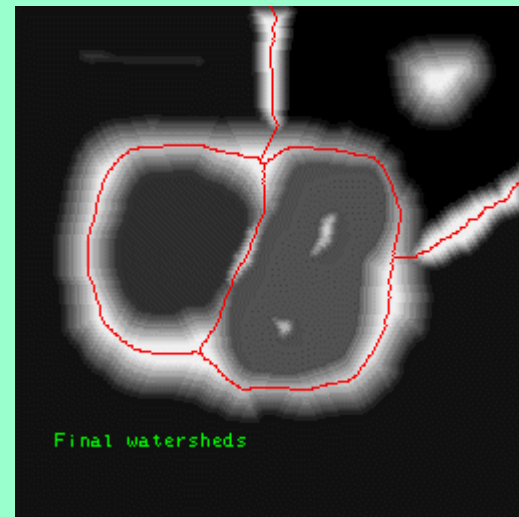
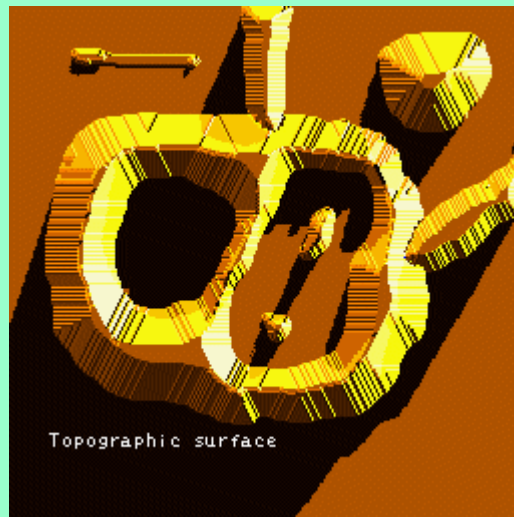
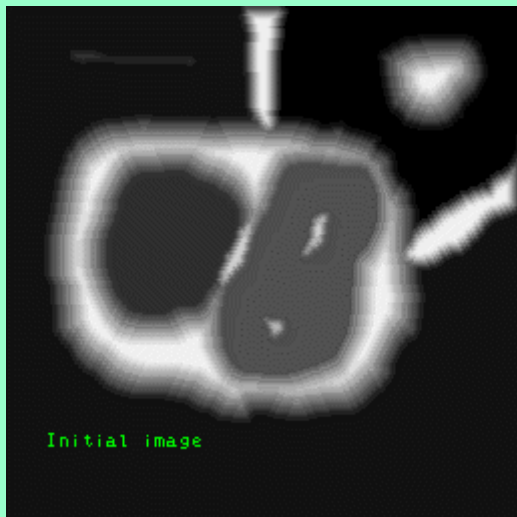
- **Anima** (INPE/SITIM - 1987)
- **Khoros** (IME - 1995)
- **Matlab** (IME - 2000)

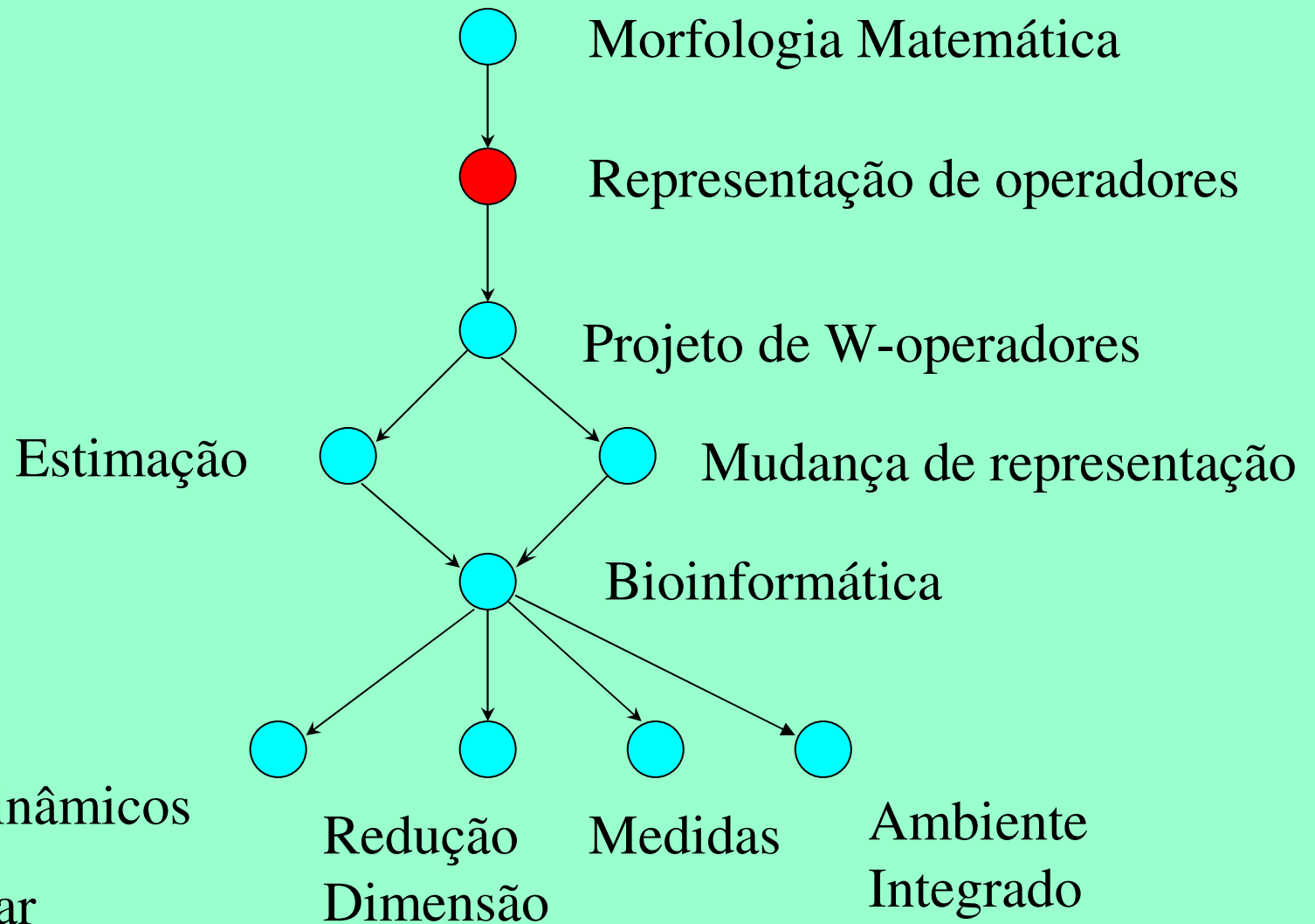
## PRINCIPAL PUBLICAÇÃO

*Journal of Electronic Imaging,*

Barrera et al., 1998.

# Linha de partição de águas





## PRINCIPAIS PUBLICAÇÕES

### Operadores invariantes por translação

Banon e Barrera, SIAM 1991.

### Operadores de reticulado

Banon e Barrera, Signal Processing, 1993

## ESTADO DA ARTE

Operador de conjuntos, crescente e invariante por translação  
pode ser representado por um conjunto de erosões

Matheron, 1975.

Operador de conjuntos, crescente e invariante por translação  
pode ser representado por um conjunto mínimo de erosões

Maragos e Schafer, 1985.

## Núcleo de um operador

$$\mathcal{K}(\psi)(Y) = \{X \in \mathfrak{S}_1 : Y \leq \psi(X)\}$$

## Funções Booleanas

$$\mathcal{K}(\psi)(0) = \mathfrak{S}_1 \qquad \mathcal{K}(\psi)(1)$$

## Núcleo de um operador i.t.

$$\mathcal{K}(\psi) = \{X \in \mathcal{P}(E) : 0 \in \psi(X)\}$$

**Isomorfismo de reticulado:** descrever um operador é descrever o seu núcleo

Intervalo  $[A, B]$

$$[A, B] = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \subseteq X \subseteq B\}$$

Núcleo de  $\lambda_{A,B}$

$$\mathcal{K}(\lambda_{A,B}) = [A, B]$$

Operador sup-gerador

$$\lambda_{A,B}(X) = \{x \in E : A_x \subseteq X \subseteq B_x\} \quad (X \in \mathcal{P}(E))$$

Decomposição núcleo

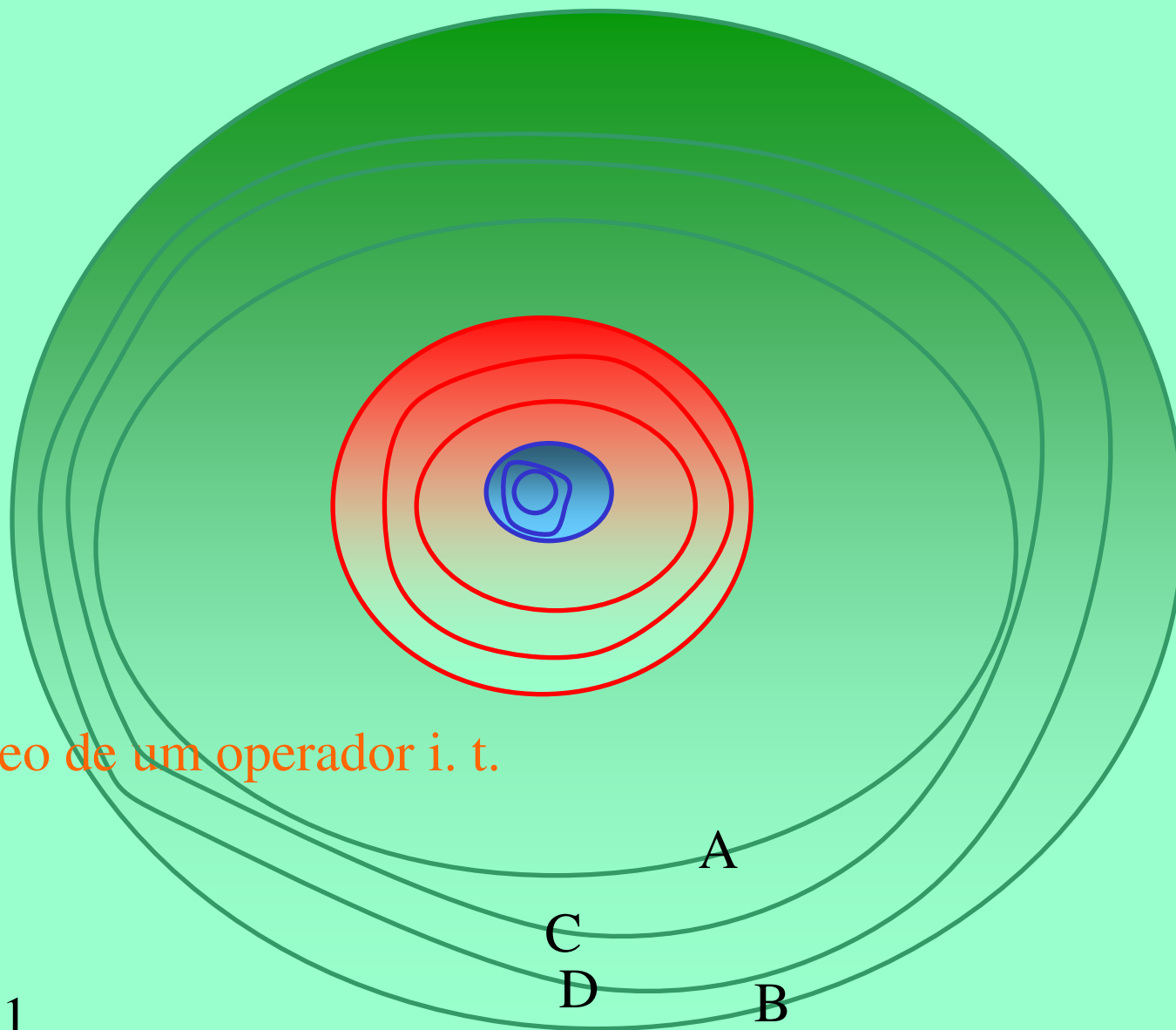
$$\mathcal{K}(\psi) = \cup \{\mathcal{K}(\lambda_{A,B}) : [A, B] \subseteq \mathcal{K}(\psi)\}$$

$$\mathcal{K}(\psi) = \cup \{\mathcal{K}(\lambda_{A,B}) : [A, B] \in \mathcal{B}(\psi)\}$$

Decomposição do operador

$$\psi(X) = \cup \{\lambda_{A,B}(X) : [A, B] \in \mathcal{B}(\psi)\} \quad (X \in \mathcal{P}(E))$$

Como representar esse núcleo?



Núcleo de um operador i. t.



## ESTADO DA ARTE

Uma função Booleana pode ser representada pela soma de produtos ou produto de somas.

Boole, 1848; Shannon, 1938; Karnaugh, 1950;  
Quine-McCluskey, 1952.

### Conexão de Galois

Garrett Birkhoff, 1940

Um operador de reticulado pode ser representado pela união de erosões

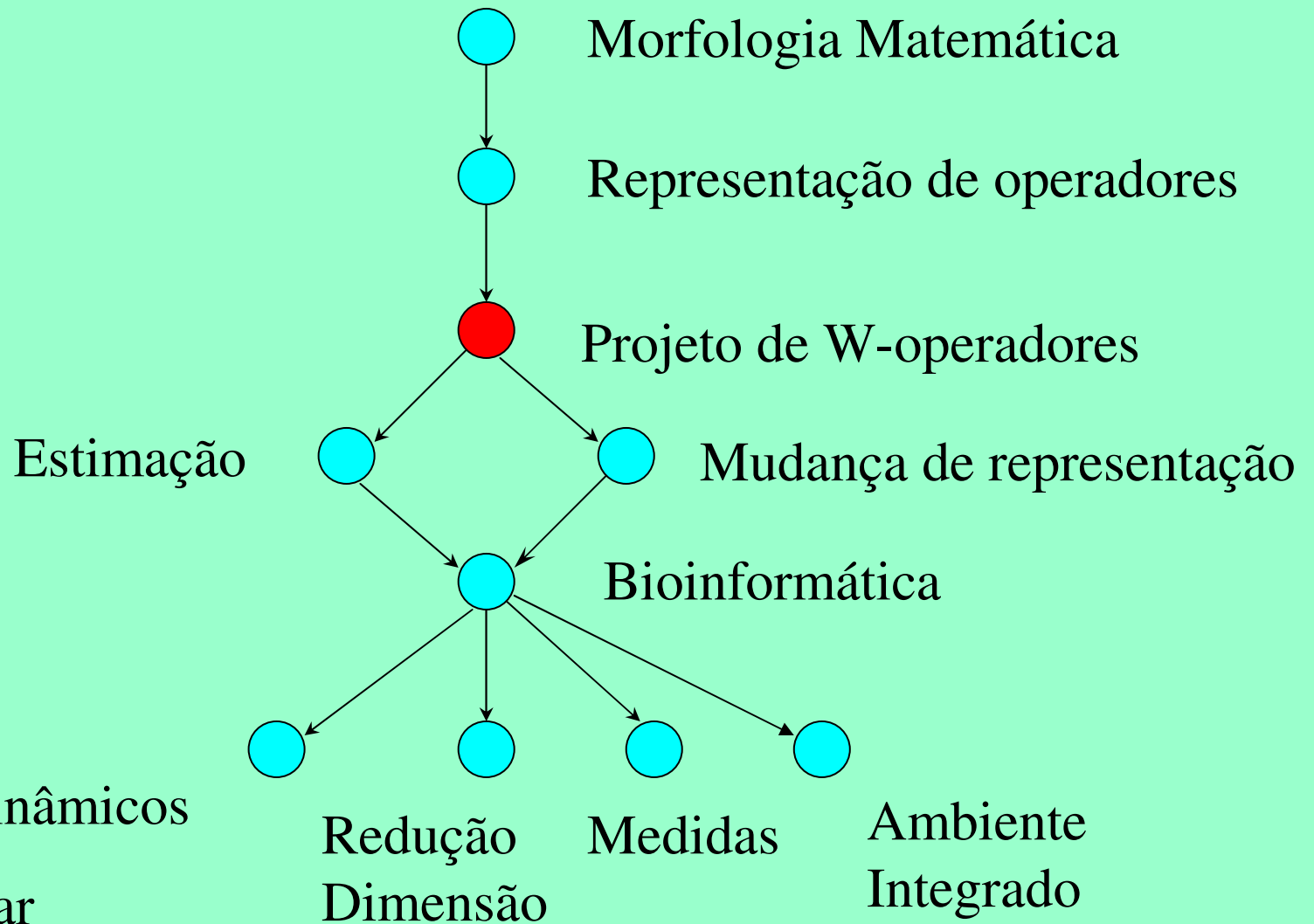
Serra e Matheron, 1988.

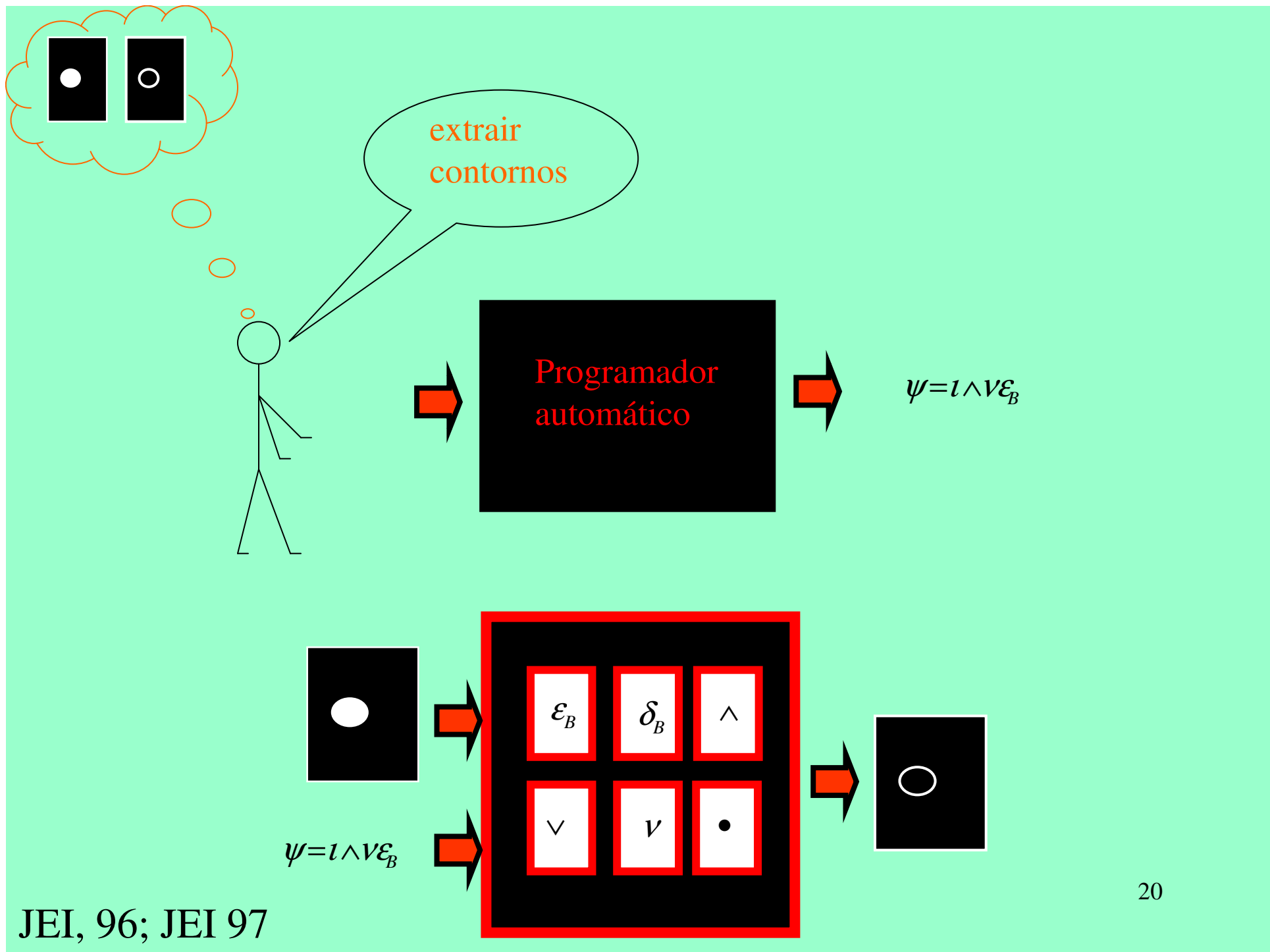
Seja  $\psi \in \mathfrak{S}_2^{\mathfrak{S}_1}$  e  $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_1^{\mathfrak{S}_2}$ . O par  $(\psi, (\alpha, \beta))$  é uma **conexão morfológica (C.M.)** entre  $\mathfrak{S}_1$  e  $\mathfrak{S}_2$  sse

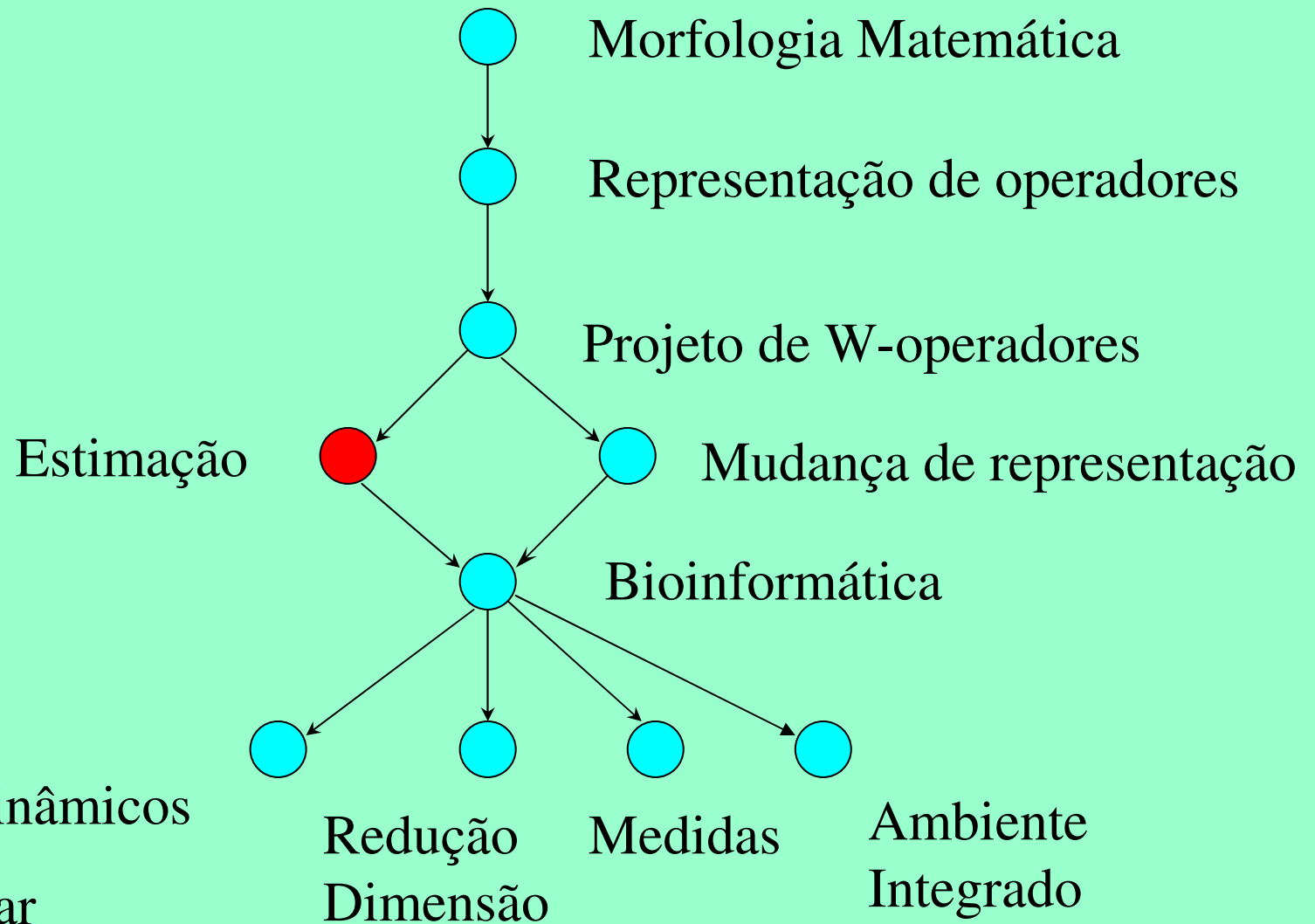
$$\alpha(Y) \leq X \leq \beta(Y) \Leftrightarrow Y \leq \psi(X) \quad ((X, Y) \in (\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2))$$

A **conexão morfológica** generaliza a **conexão de Galois**.

$$\alpha(Y) = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{S}_2$$







## PRINCIPAIS PUBLICAÇÕES

### W-operadores

*Journal of Eletronic Imaging*, Dougherty, Barrera et al., 1997.

### Apertures

*Signal Processing* Hirata, Dougherty, Barrera, 2000.

### Envelopes

*Signal Processing* Barrera et. al., 2000.

### Operadores crescentes de conjuntos

*Pattern Recognition*, Hirata, Dougherty, Barrera 2000.

## PRINCIPAIS PUBLICAÇÕES

### Operadores de pilha

*Fundamenta Informatikae*, Barrera et al., 2000.

### Pirâmide

*Journal of Mathematical imaging and Vision*,  
Dougherty, Barrera et al. 2001

### Pirâmide por composição

*Optical Engineering*, Hirata, Dougherty, Barrera, 2000.

### Pirâmide Bayesiana

*Journal of Electronic Imaging*, Kamat, Dougherty, Barrera, 2000.

## ESTADO DA ARTE

### Filtros lineares ótimos

Wiener, 1940

### Projeto heurístico de redes neurais

Several groups, dedicated conferences, etc.

### Projeto de filtros morfológicos por algoritmos genéticos

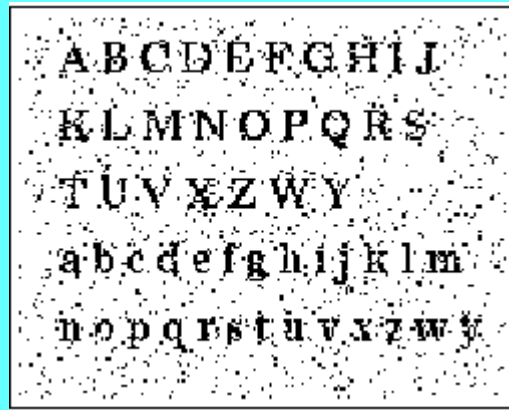
Marshall, 1994.

### Projeto de operadores morfológicos crescentes

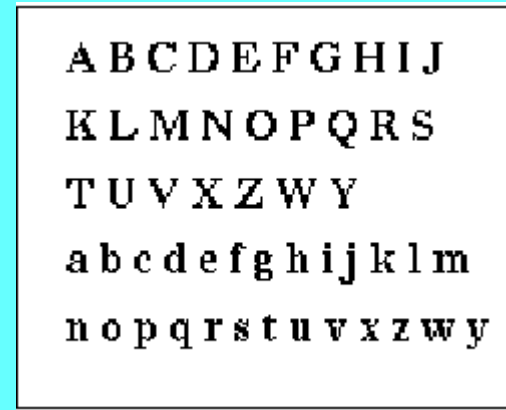
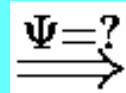
Dougherty, 1992.



## O problema



observada: **S**



ideal: **I**

Encontrar um W-operador que transforma a imagem **observada** na respectiva **ideal** (ou “próxima da ideal”).

## Modelo probabilístico

**S** e **I** são conjuntamente estacionários

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{S} \cap W_z, \mathbf{Y} = \mathbf{I}(z))$$

é a mesma para todo  $z$  em  $E$

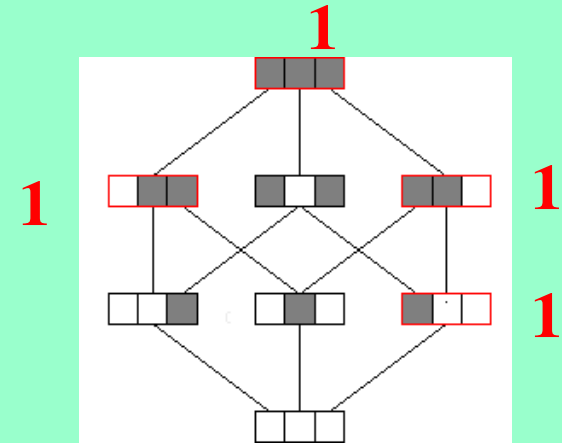
# W-operadores - PRINCIPAL PUBLICAÇÃO

Barrera e Salas, Journal of Electronic Imaging, 1996

Janela  $W = 1 \times 3$

$$\mathcal{K}(f[\psi]) = \left\{ \begin{array}{c} \text{[White][Grey][Grey]} \\ \text{[Grey][White][White]} \\ \text{[Grey][Grey][White]} \\ \text{[Grey][Grey][Grey]} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{B}(f[\psi]) = \left\{ \begin{array}{c} \text{[White][Grey][Grey]} \\ \text{[Grey][White][White]} \\ \text{[Grey][Grey][White]} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{X11} \\ \text{1X0} \\ \text{11X} \end{array}$$



$$\psi = \lambda_{X11}^W \vee \lambda_{1X0}^W \vee \lambda_{11X}^W$$

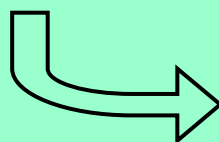
## Medida do erro

O objetivo do projeto é encontrar um operador com **erro mínimo**

**Erro** (valor esperado) de uma função :

$$Er(\psi) = E[l(\mathbf{Y}, f[\psi](\mathbf{X}))]$$

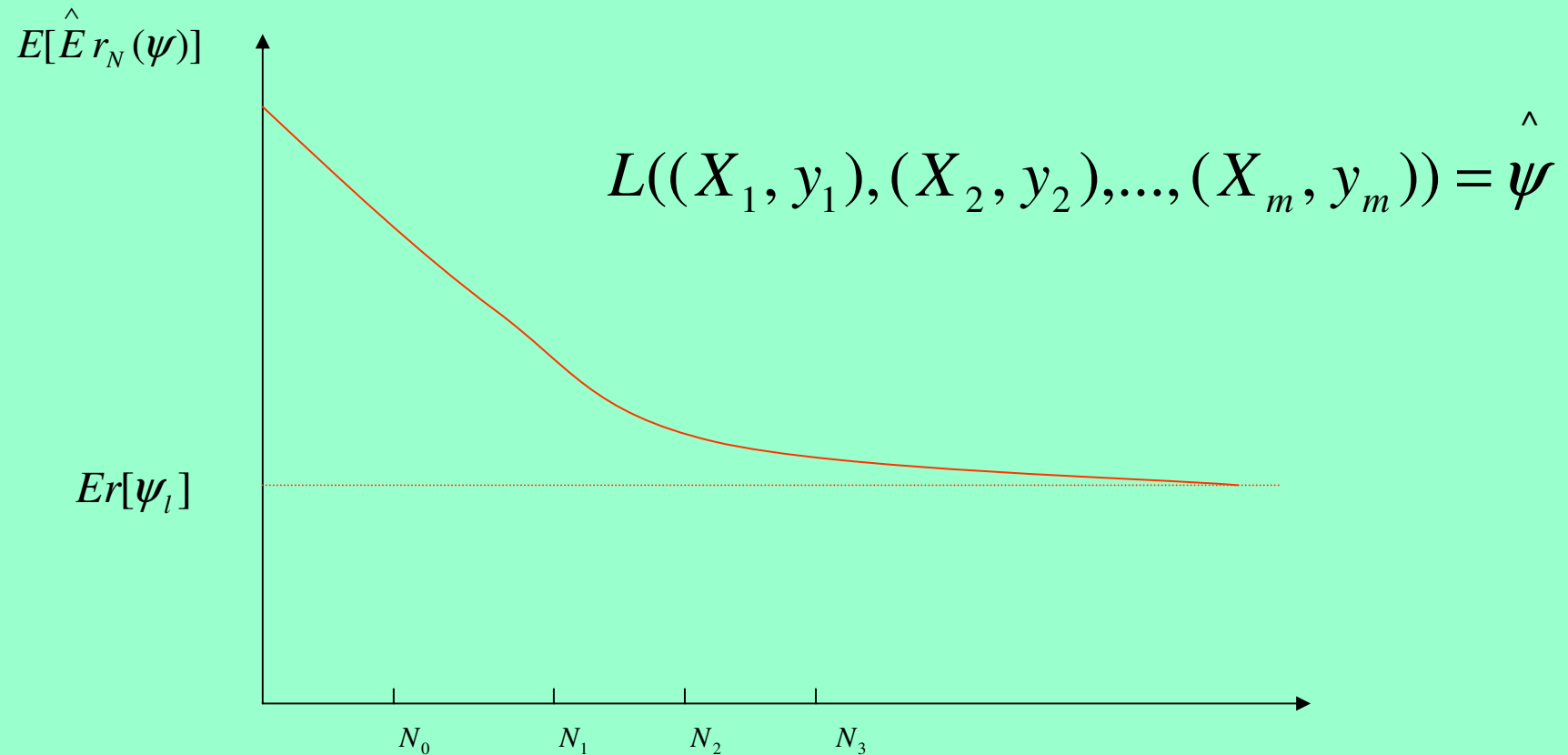
Função de **perda**



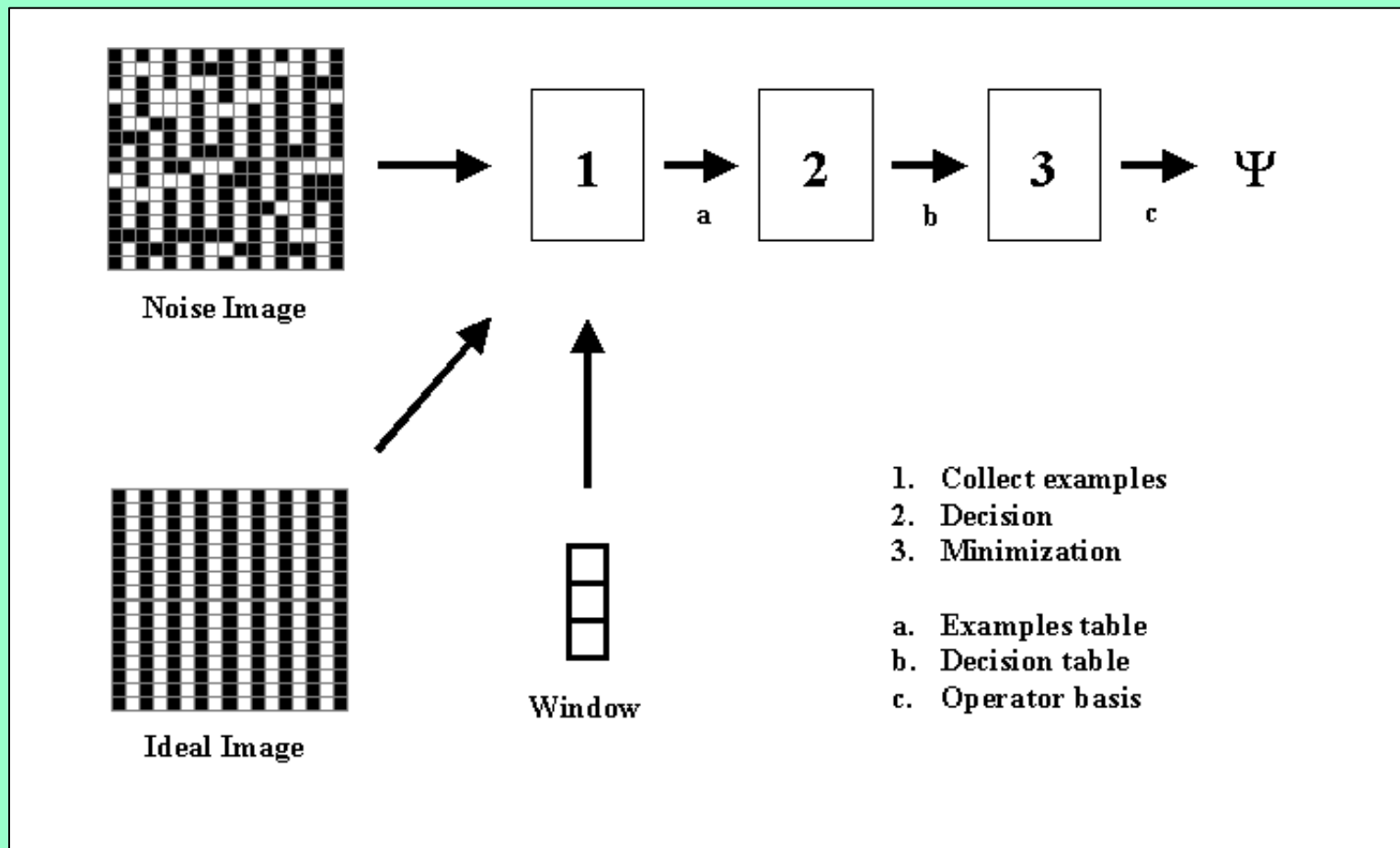
$\mathbf{X}$  é um conjunto aleatório  
 $\mathbf{Y}$  é uma variável aleatória binária

$$l : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \mathfrak{R}^+$$

## Convergência do algoritmo de estimação

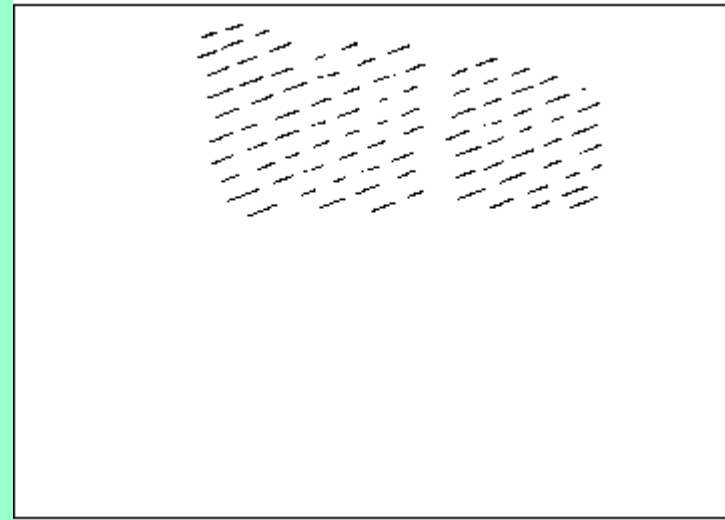
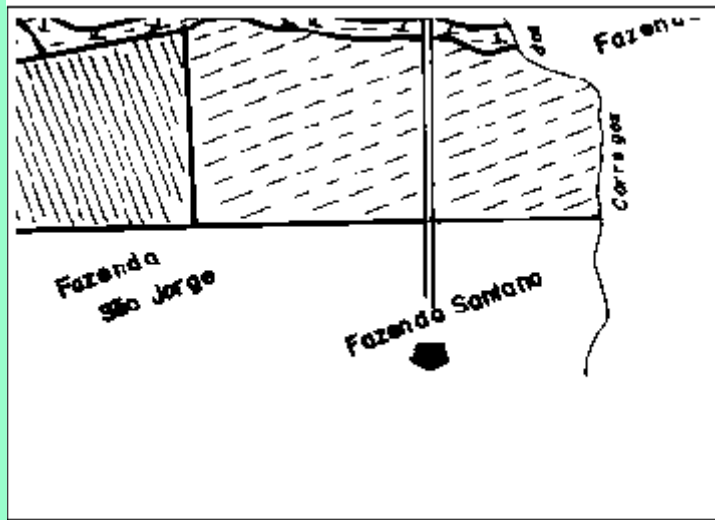


Esperança relativa a distribuição das amostras de tamanho  $N_i$



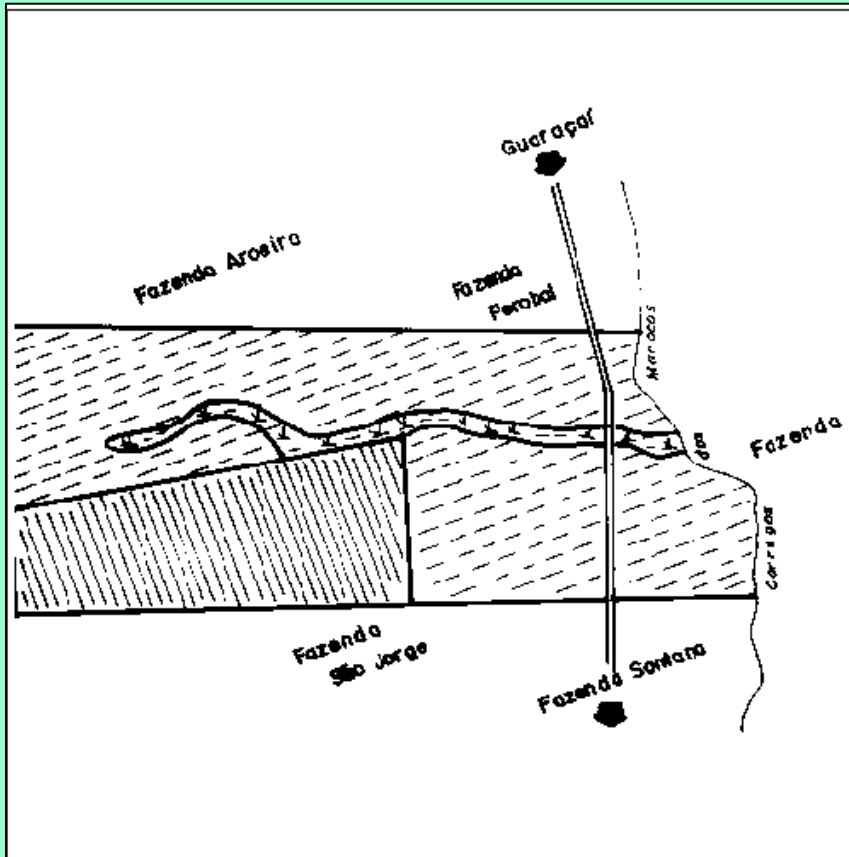
Este algoritmo de estimação converge.

## Extração de textura (1)



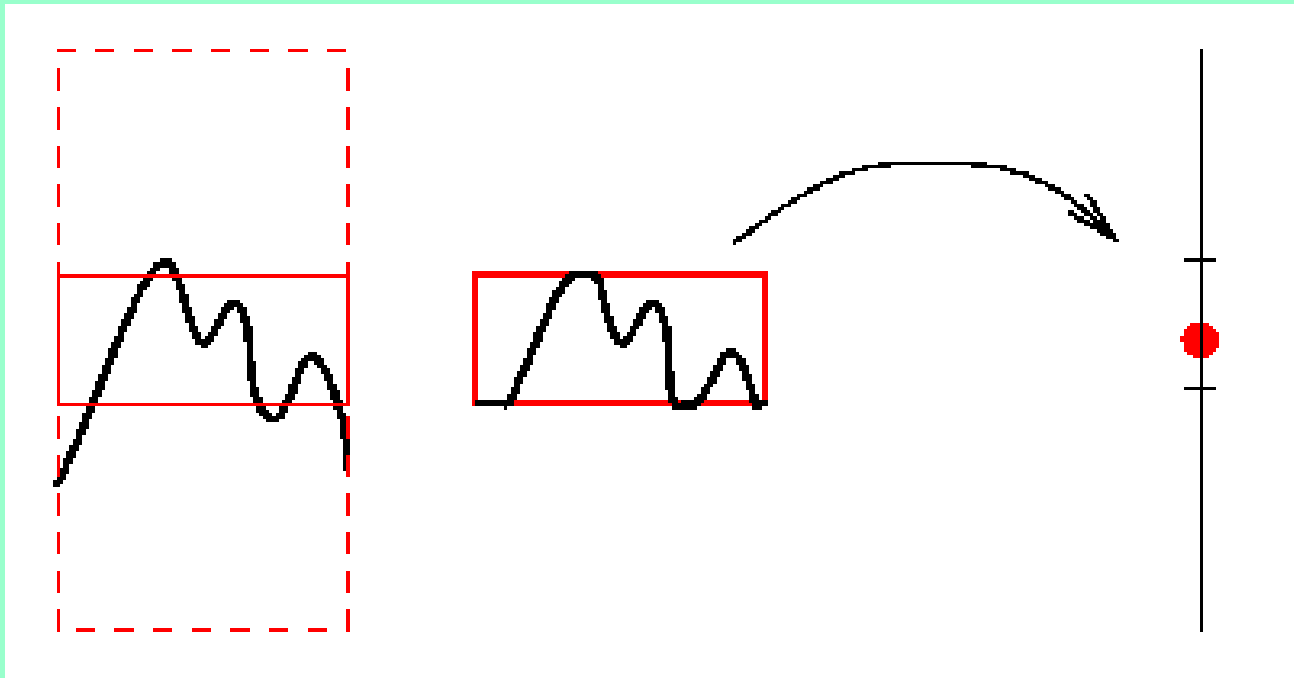
Imagens observadas

## Extração de textura (2)



Teste



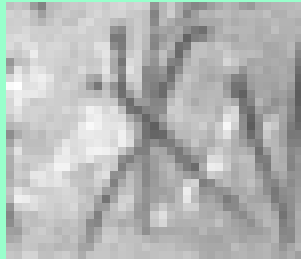


$$(u - z)^*(x) = \wedge \{ \vee \{-k, u(x) - z\}, k \}$$

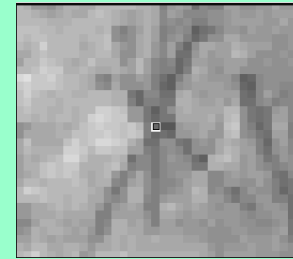
## Aumento de resolução



# Zoom



**Original**



**Aperture: 3x3x21x51**

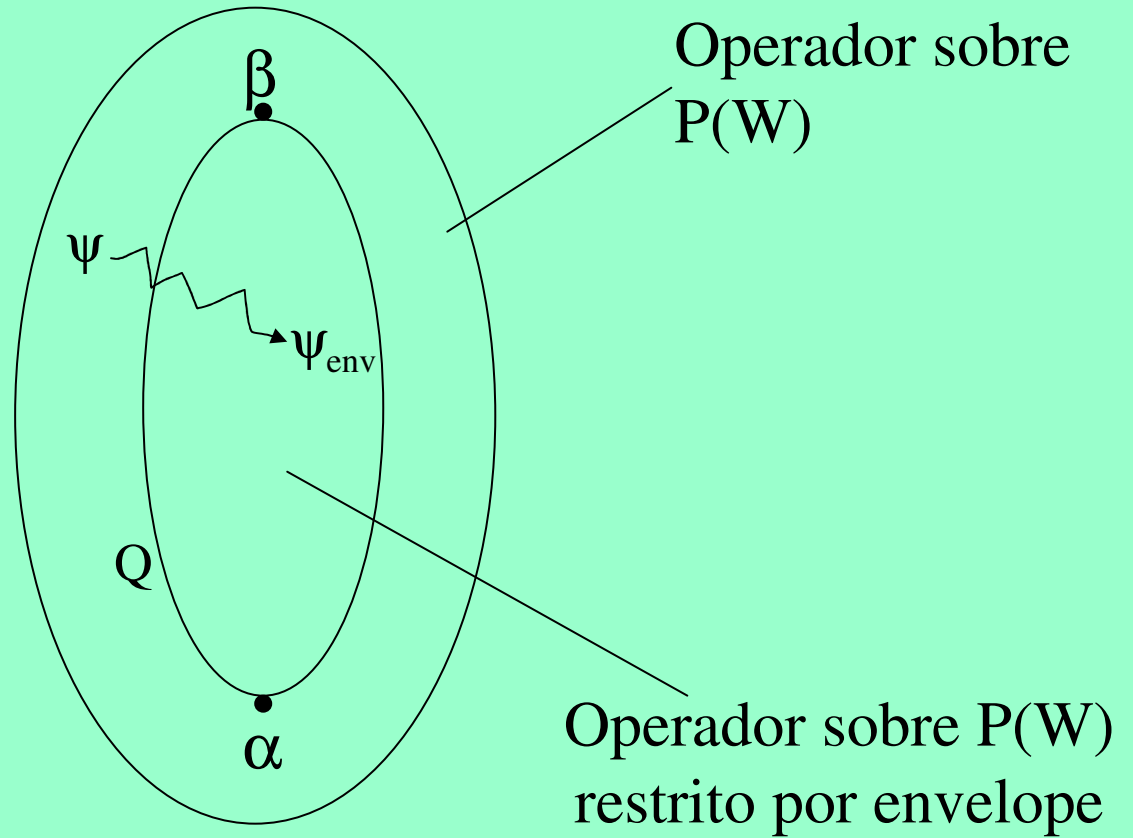


**Linear**

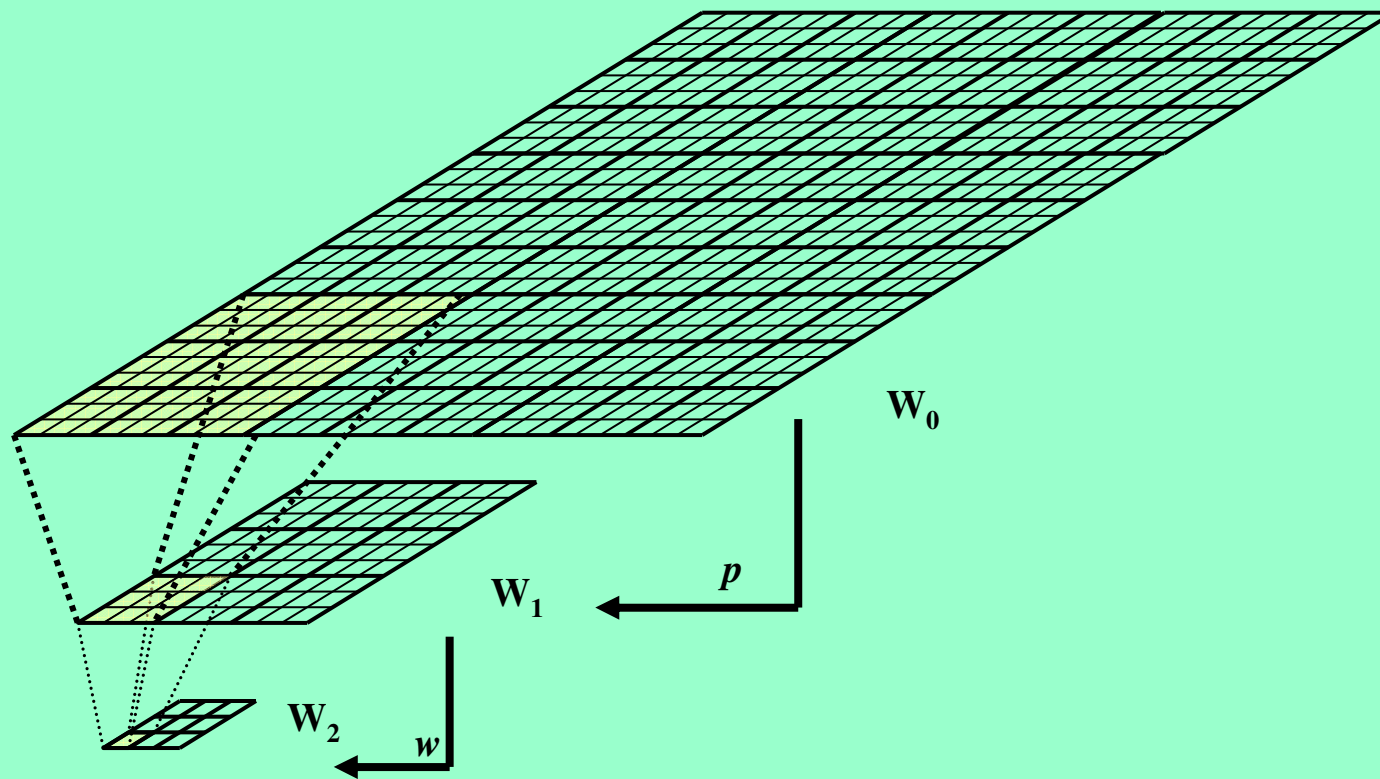


**Bilinear**

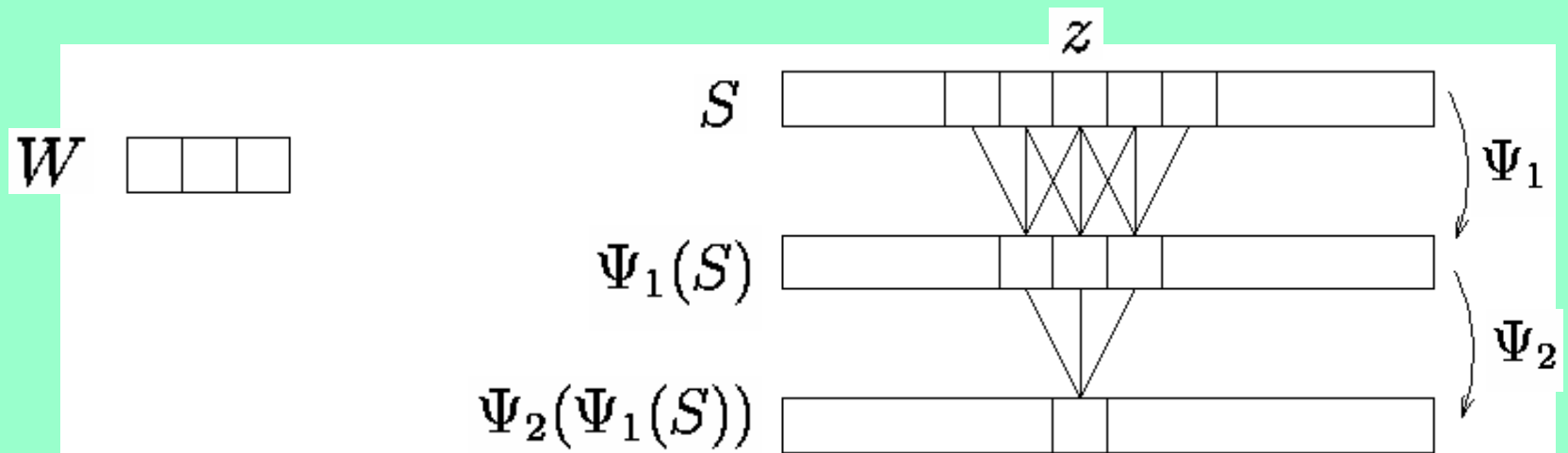
# Envelopes



# Multi-resolução



## Composição de $W$ -operadores de janela pequena



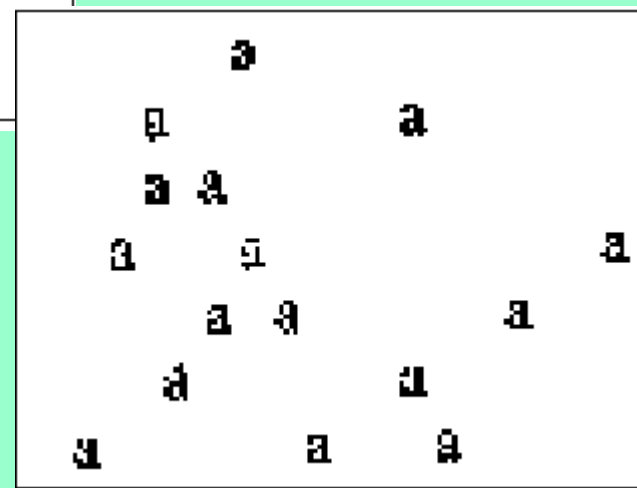
$\Psi = \Psi_2(\Psi_1)$  é um  $W \oplus W$  -operador

reduzida de seu produto elevados, juntamente com os custos a adquirir o produto, as quantidades produzidas necessariamente, a redução que a empresa monitorea. Quantidades s

teste



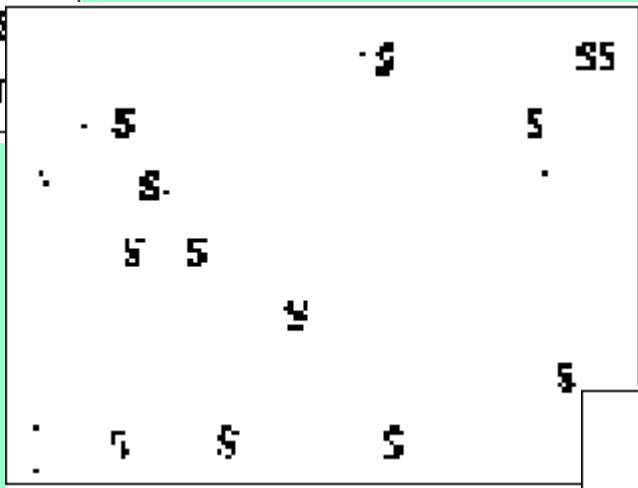
iteração 1



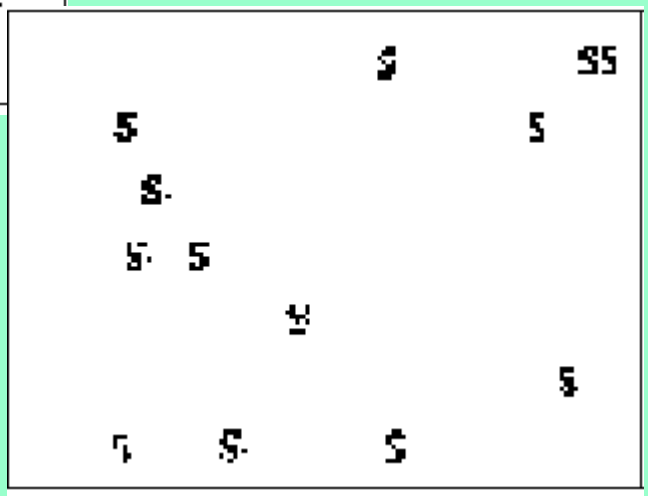
iteração 2 39

idade, através da dissol  
ovias oportunidades de  
NO sacrificou o infel  
mais sólido que o ui  
ue era o símbolo do  
te, condicionava a s  
gnosticismo está ver

teste

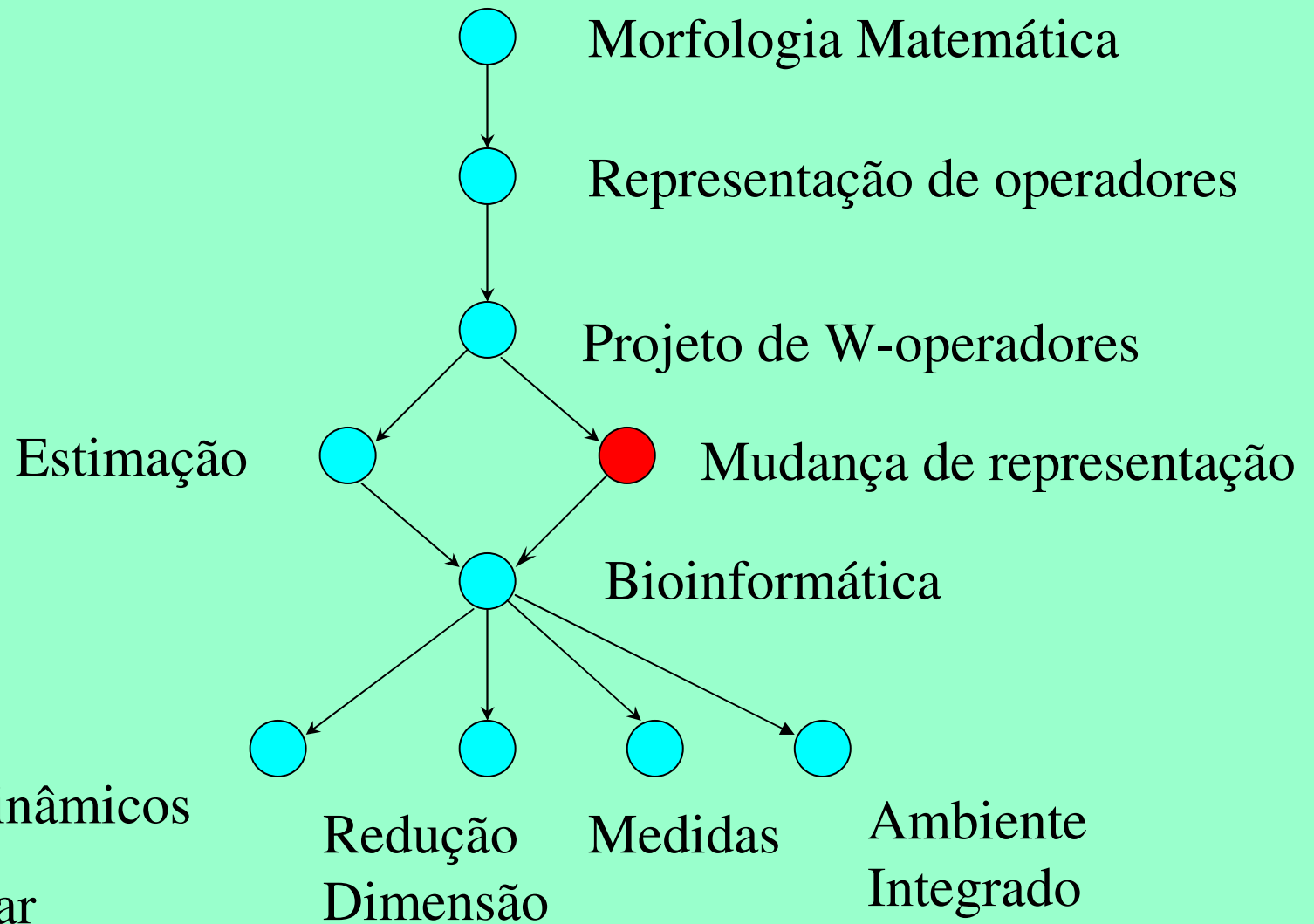


iteração 1



iteração 2 40





Ciclo Celular

Malária

## PRINCIPAIS PUBLICAÇÕES

*Journal of Computational Imaging and Vision*

Hashimoto, Barrera, Ferreira, 2000.

*Pattern Analysis and Machine Intelligence,*

Hashimoto, Barrera, 2002.

*Fundamenta Informatekae*

Barrera, Hashimoto 2001.

## ESTADO DA ARTE

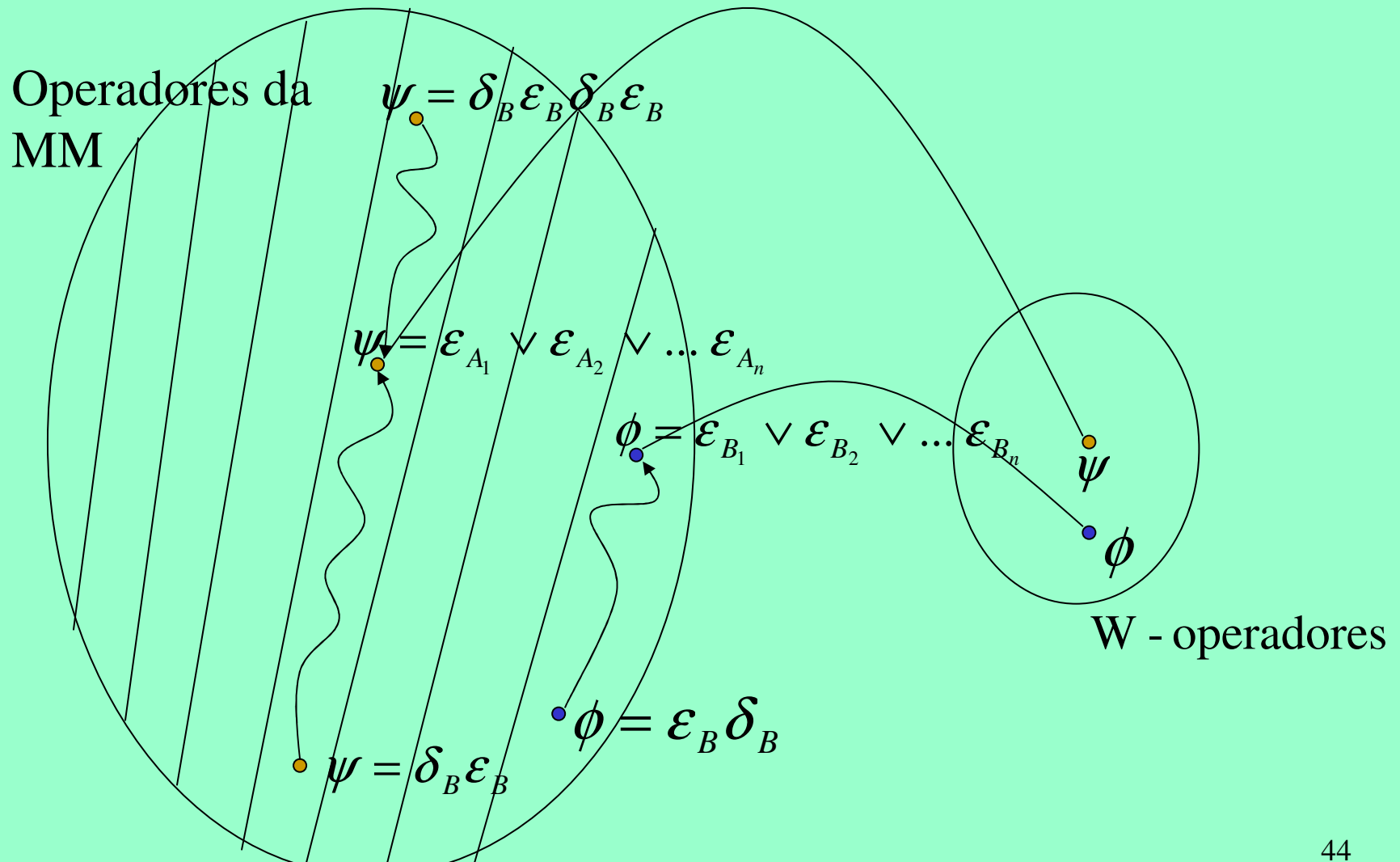
Decomposição de conjuntos convexos

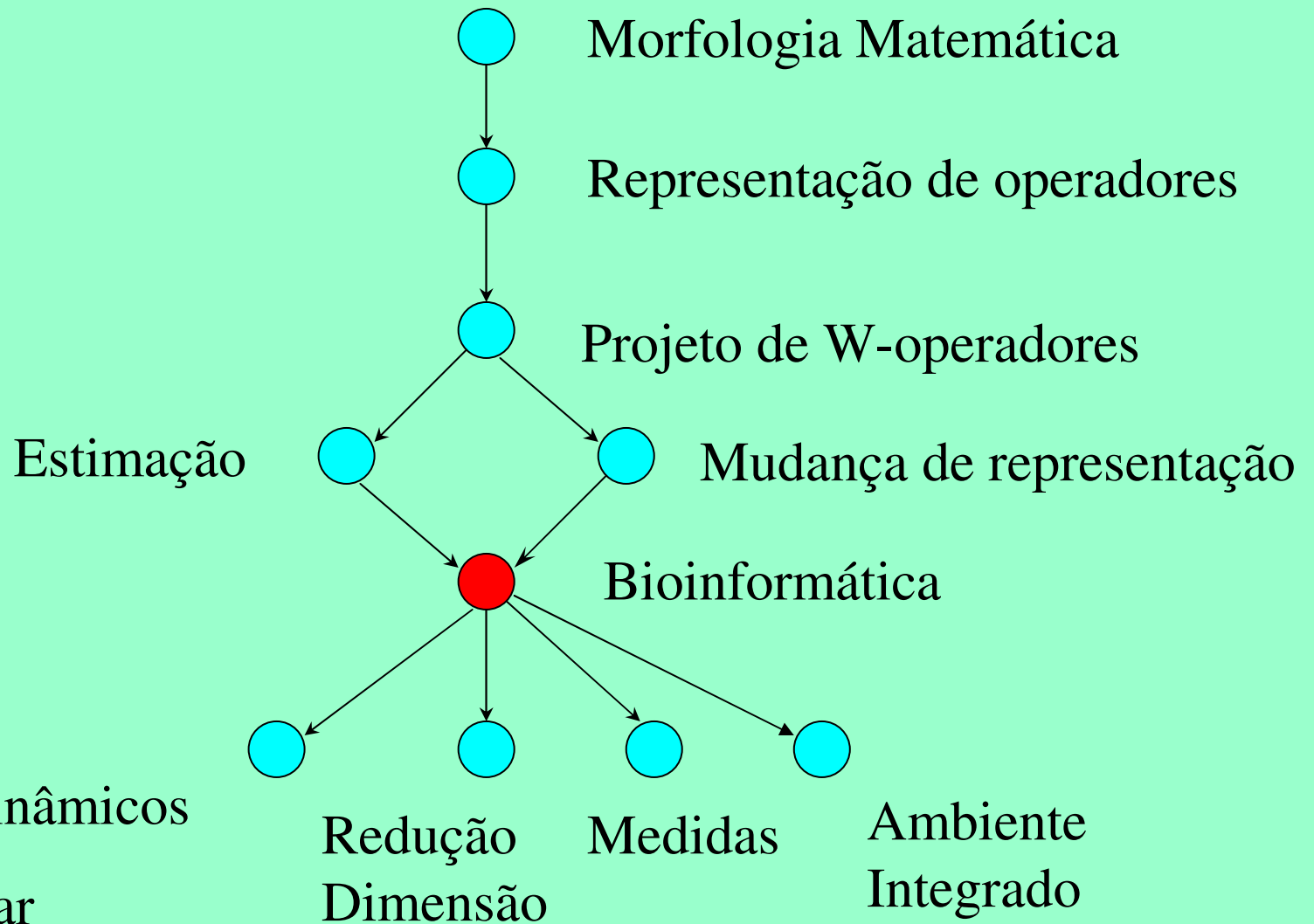
Park and Chin, 1994

Decomposição de conjuntos simplesmente conexos

Park and Chin, 1995.

# Prorador de teoremas





Sistemas Dinâmicos

Ciclo Celular

Malária

# Modelagem

Fenômeno

Medida

Modelo Matemático

# Contribuições de Shannon

## Circuitos Digitais

Álgebra Booleana (teoria de chaveamento)

## Sistemas de Comunicação

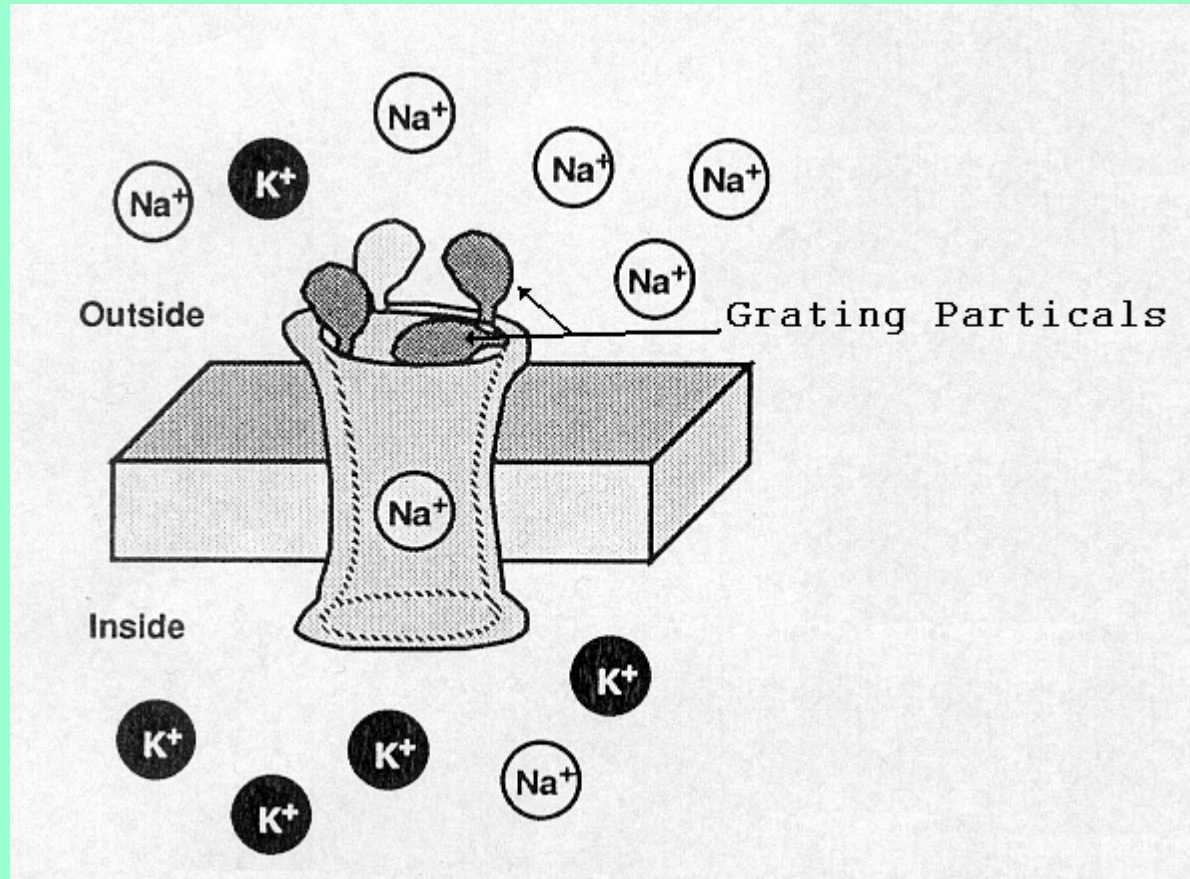
Teoria da Informação

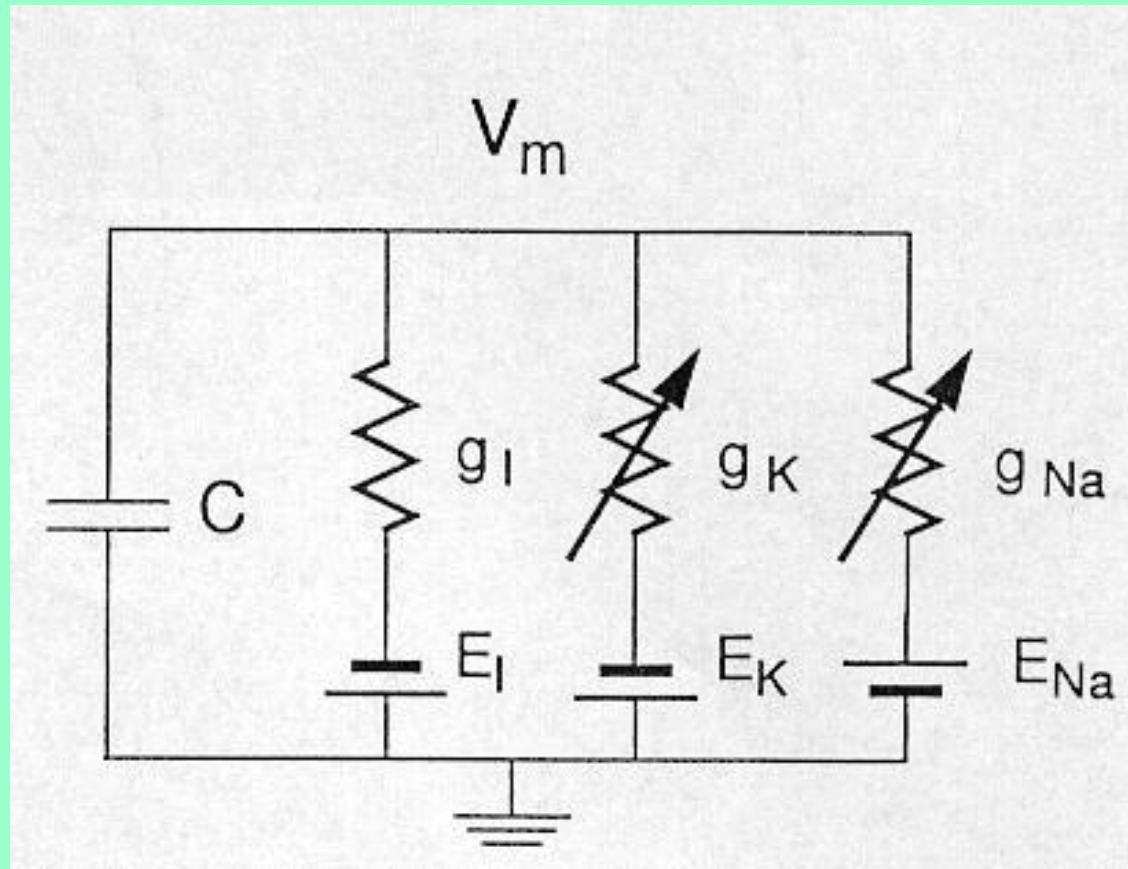
# Neurônio



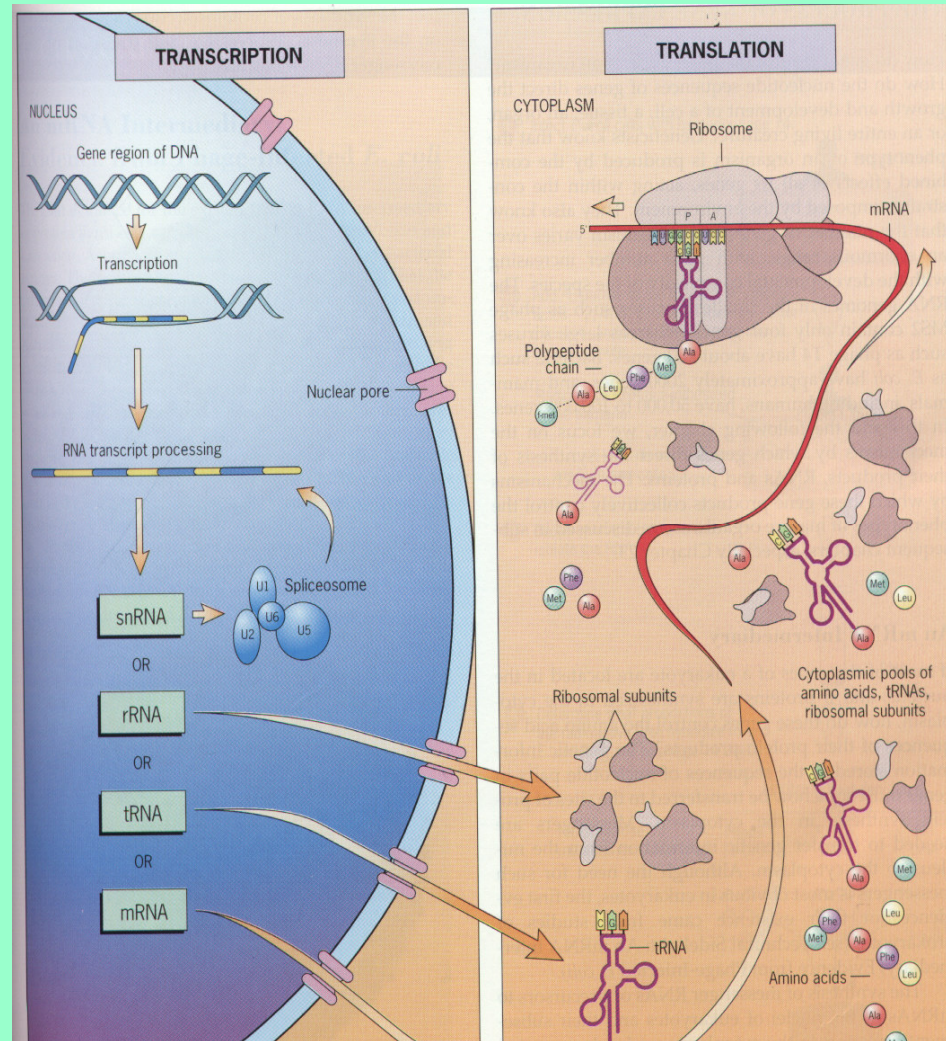


- Prêmio Nobel em Medicina 1963: Hodgkin - Huxley



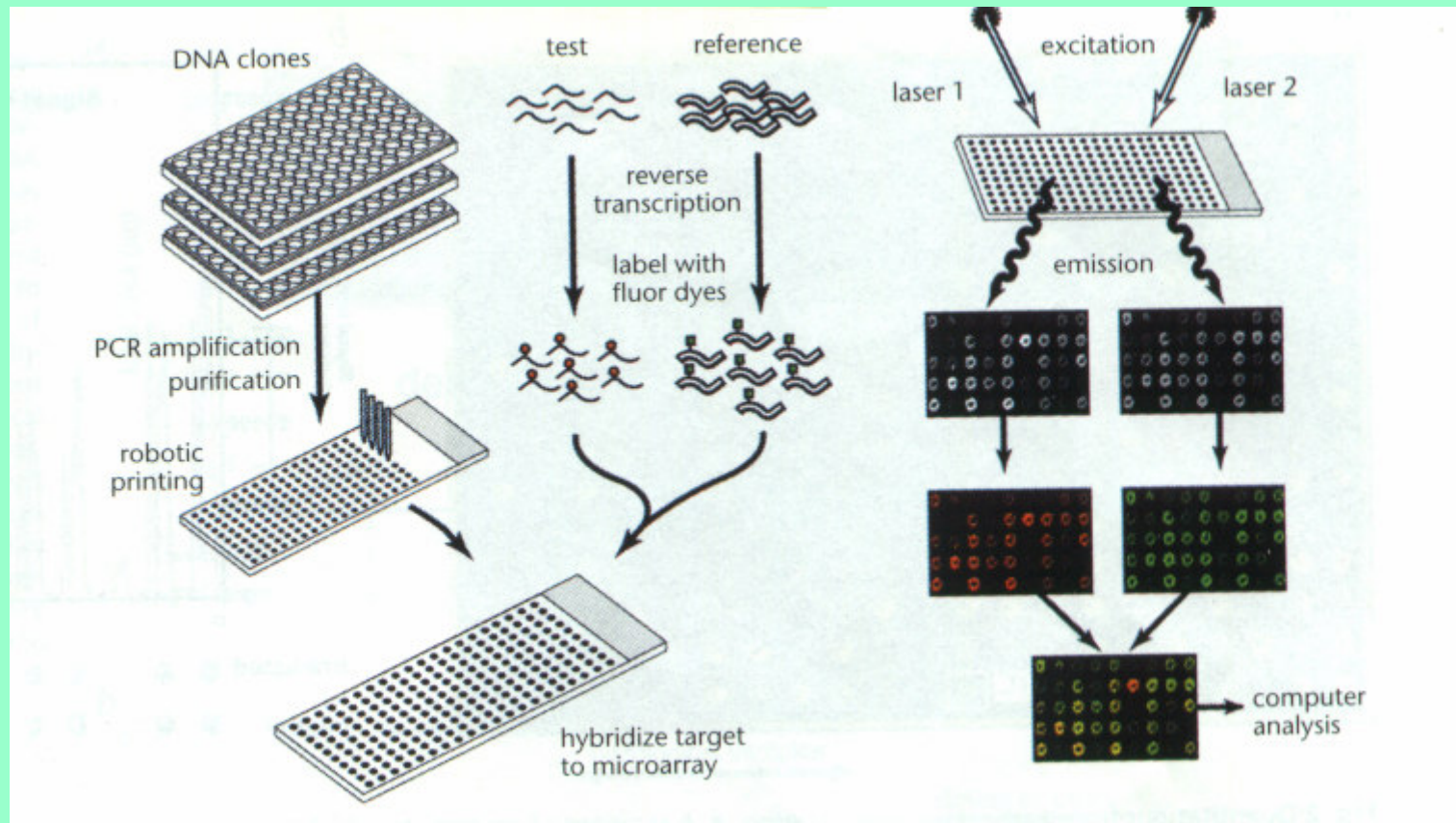


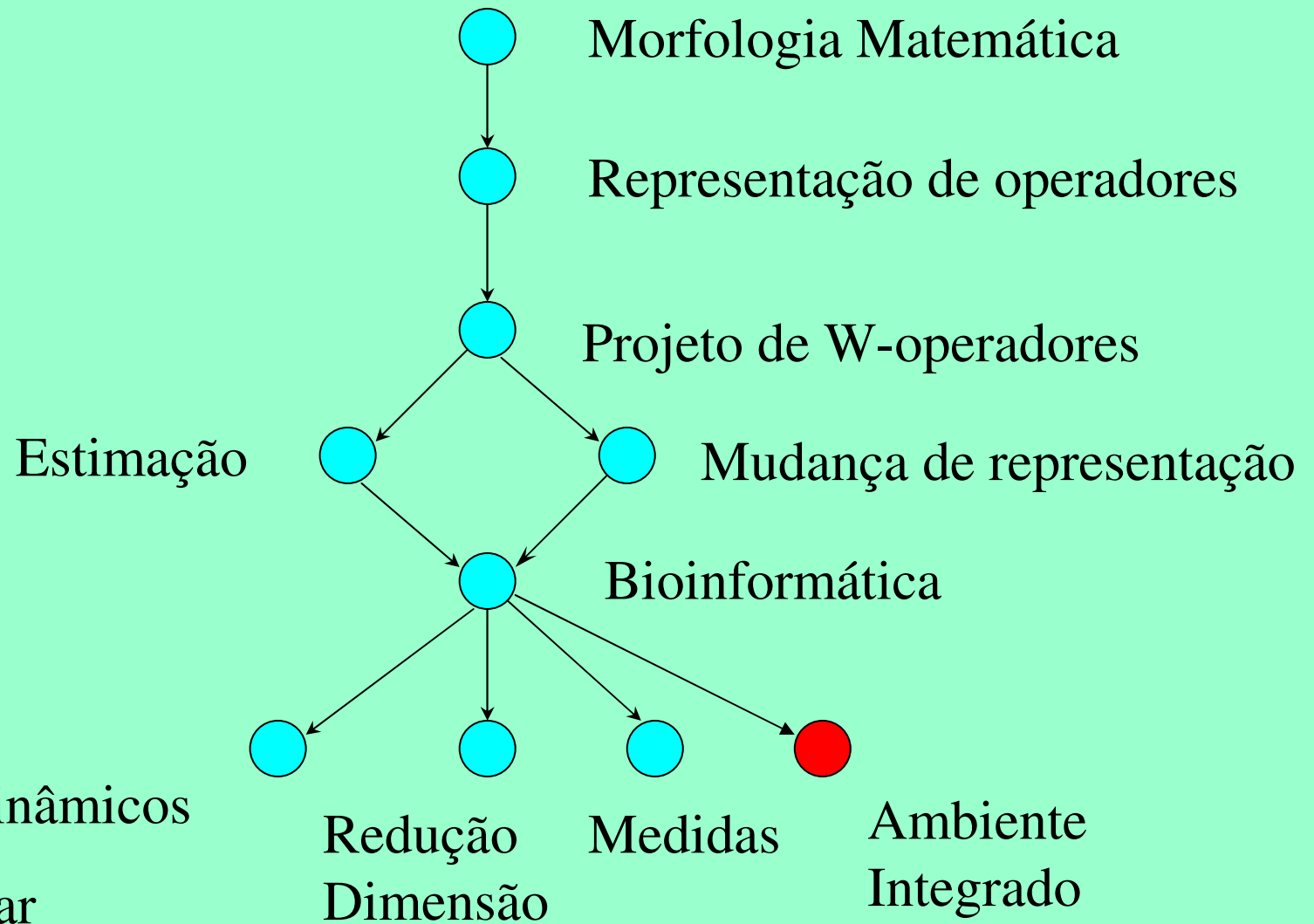
# Expressão gênica





# Aquisição de dados

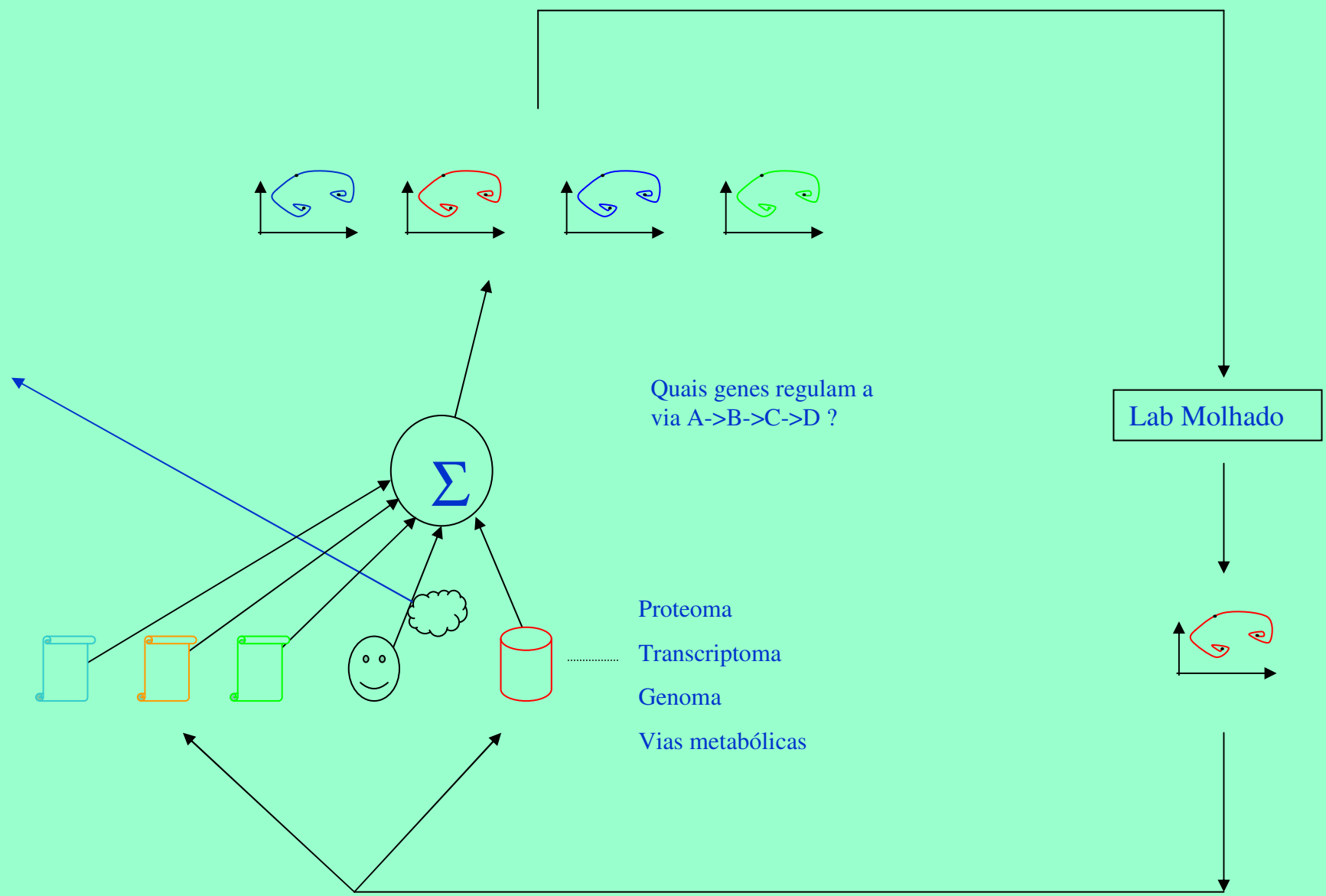
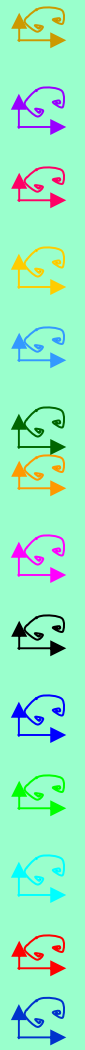




Sistemas Dinâmicos

Ciclo Celular

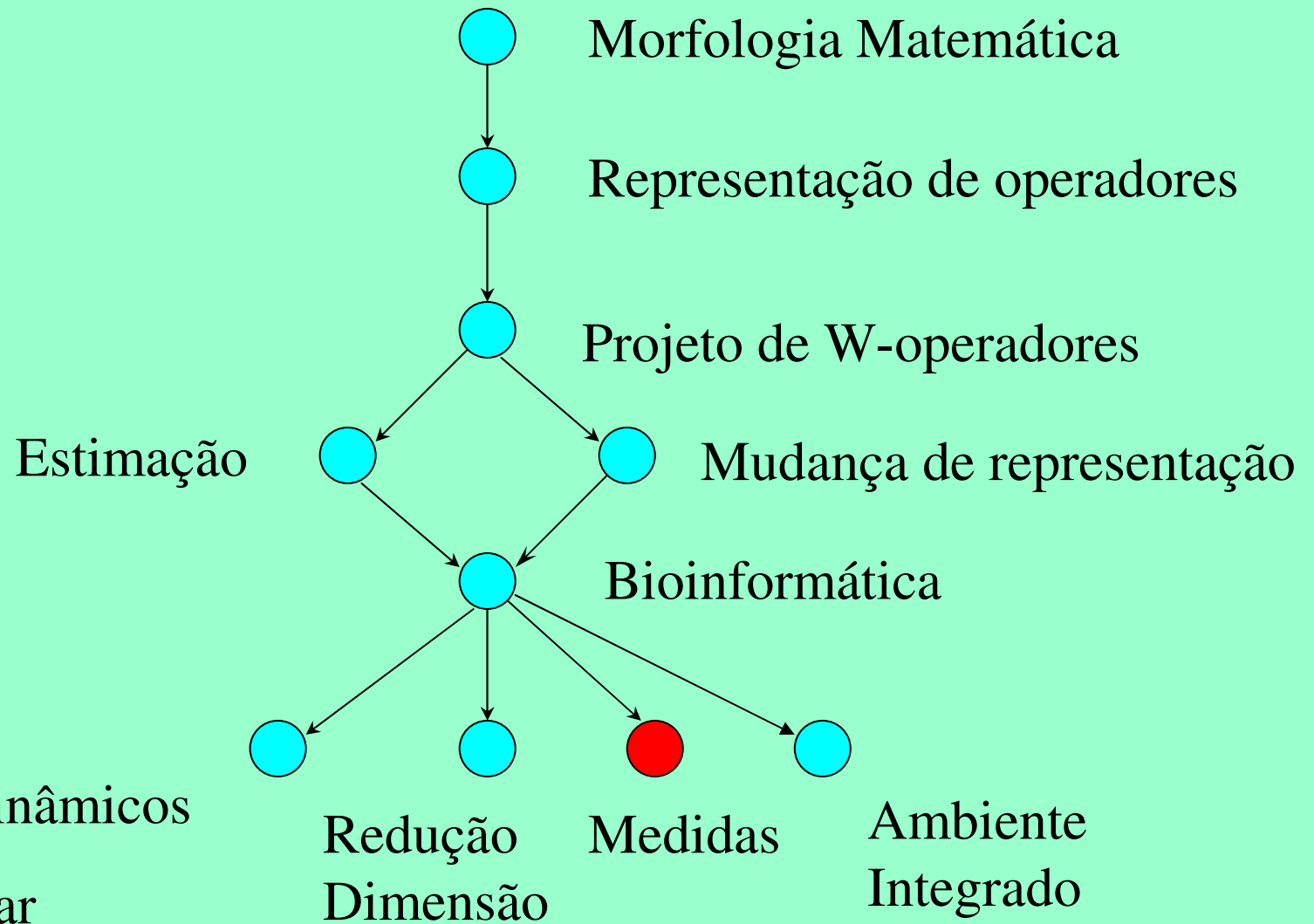
Malária



# Computers in Medicine and Biology

Barrera et. al., 2003

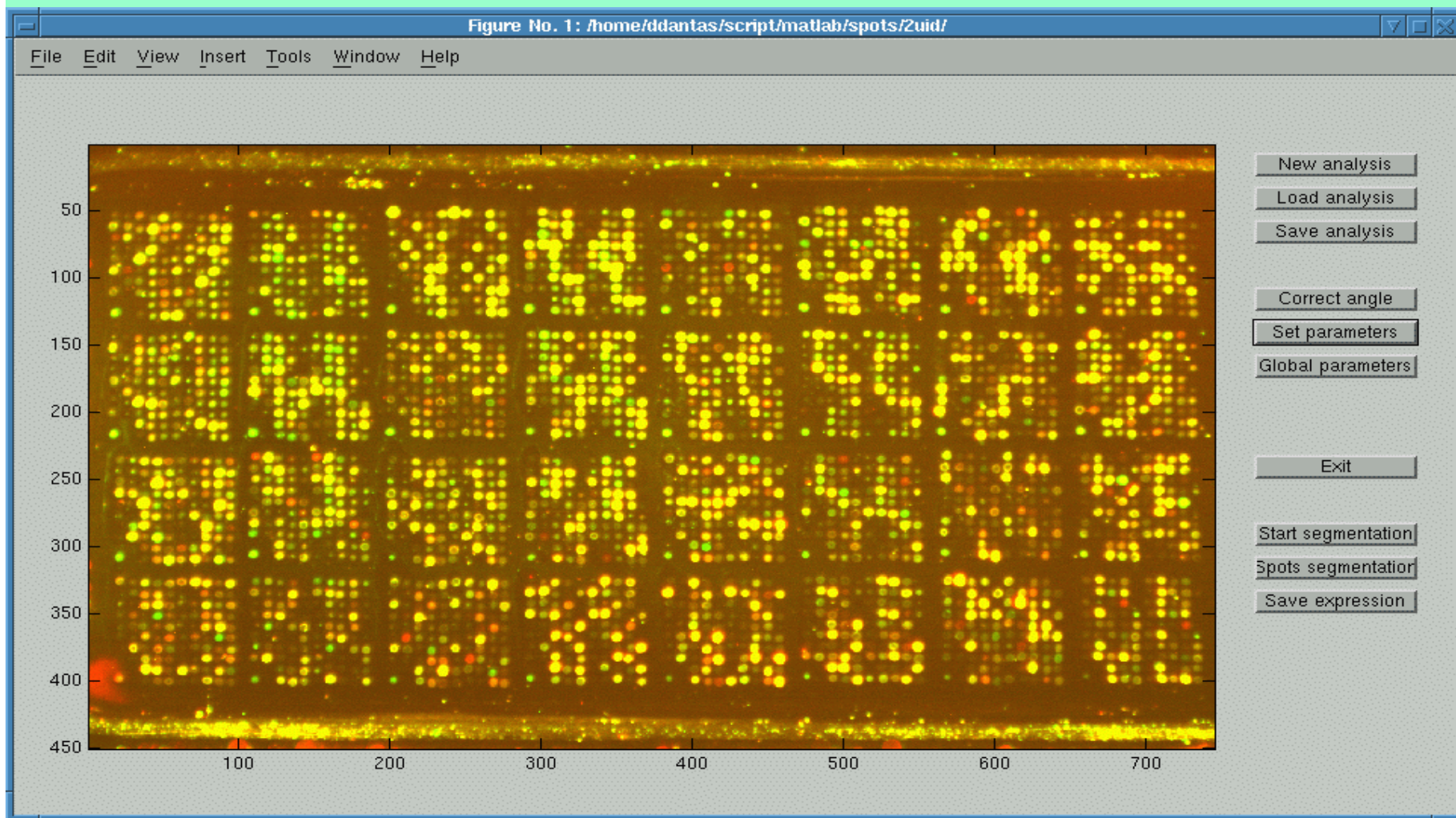
CMB, 2003



Sistemas Dinâmicos  
 Ciclo Celular  
 Malária

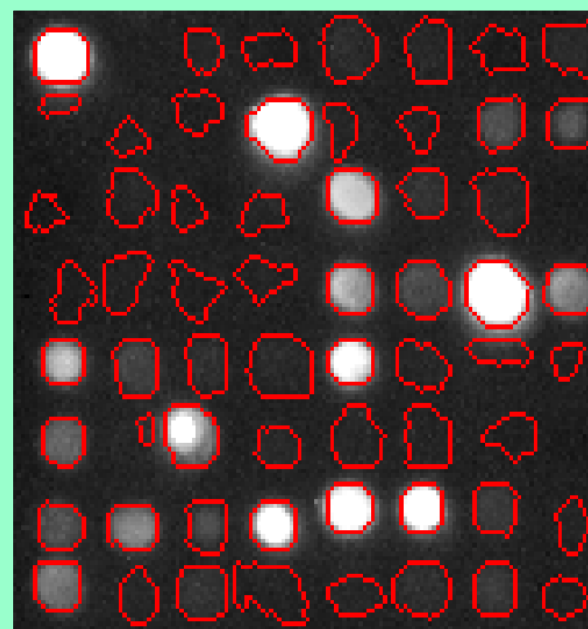
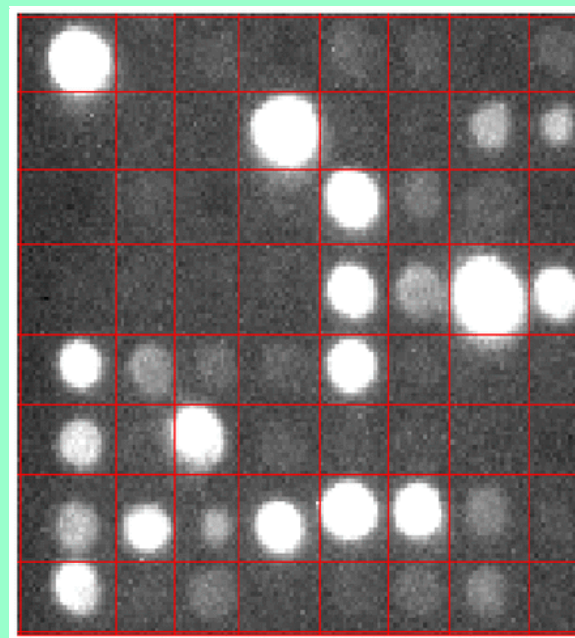
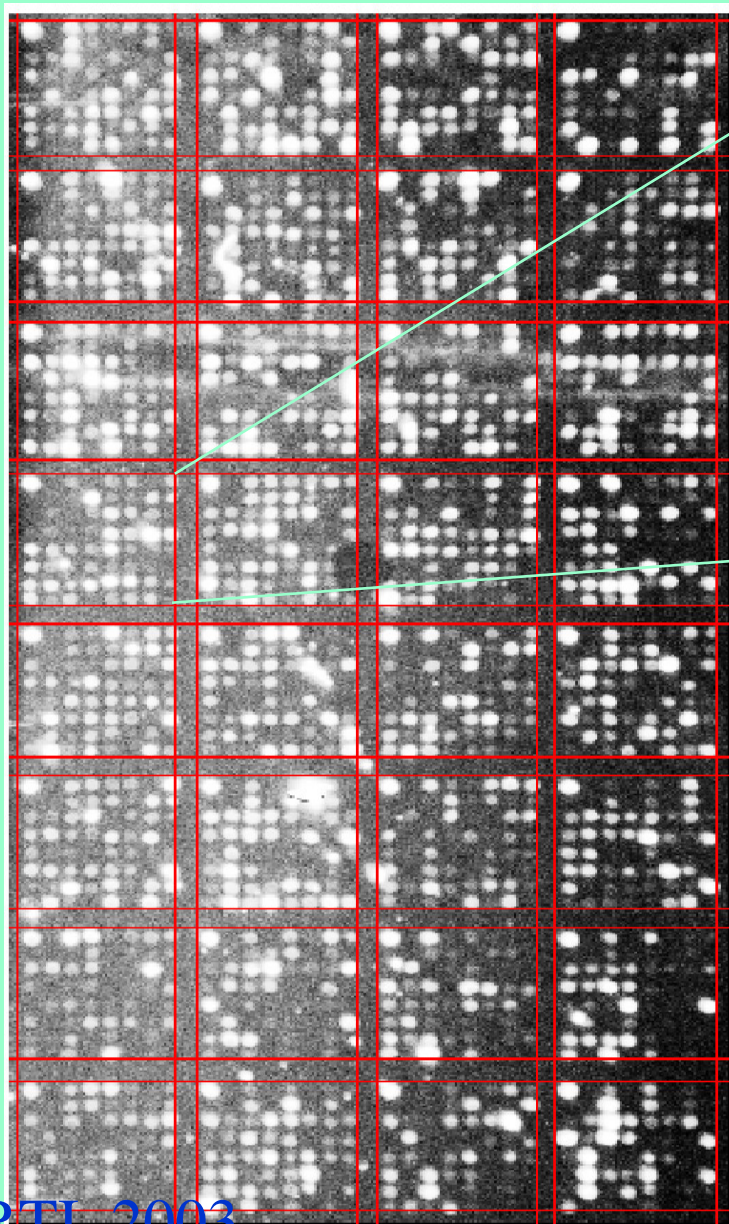
# *Real Time Imaging*

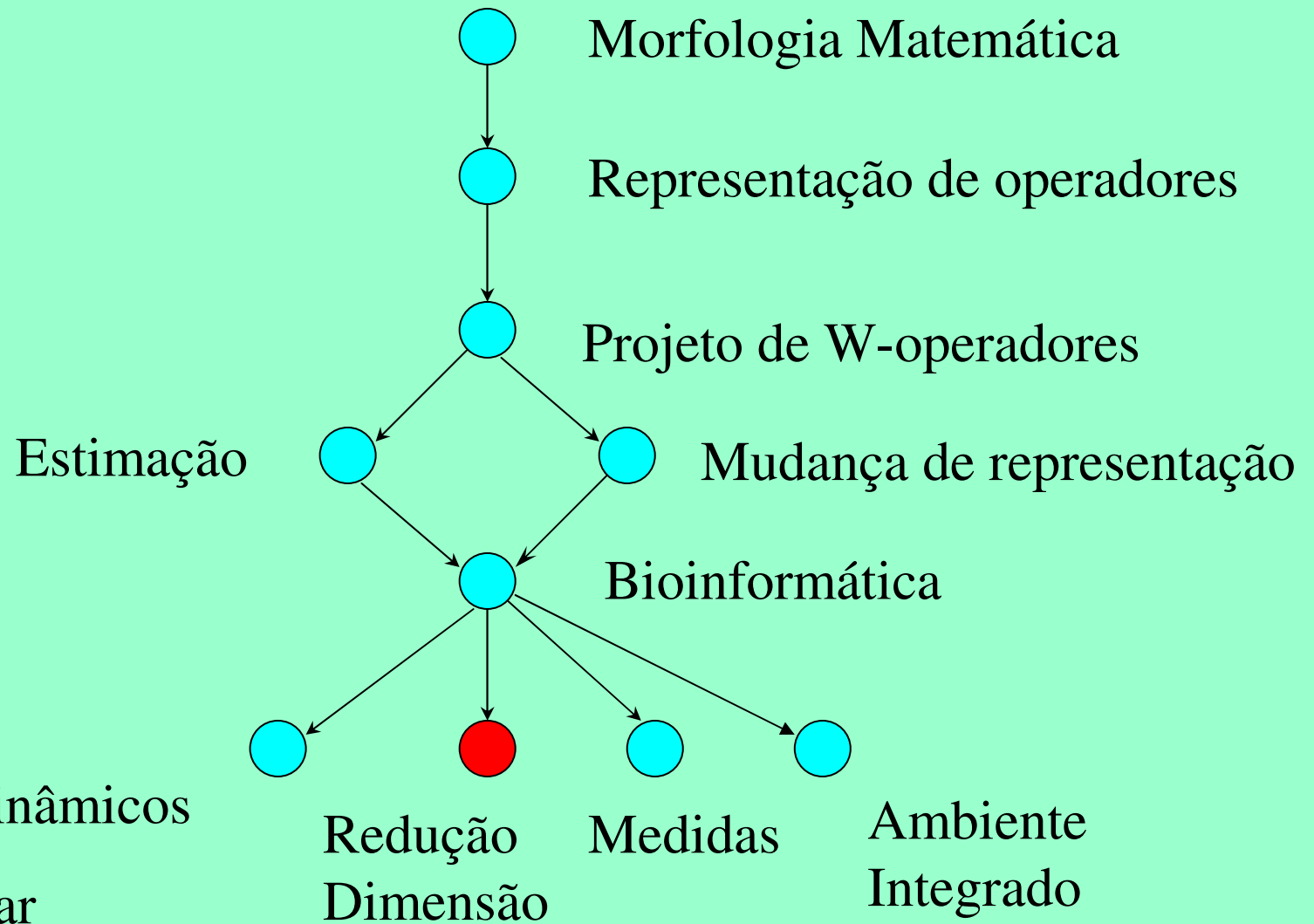
Hirata, Barrera et. al., 2002.





# Exemplos





Ciclo Celular

Malária

## PRINCIPAL PUBLICAÇÃO

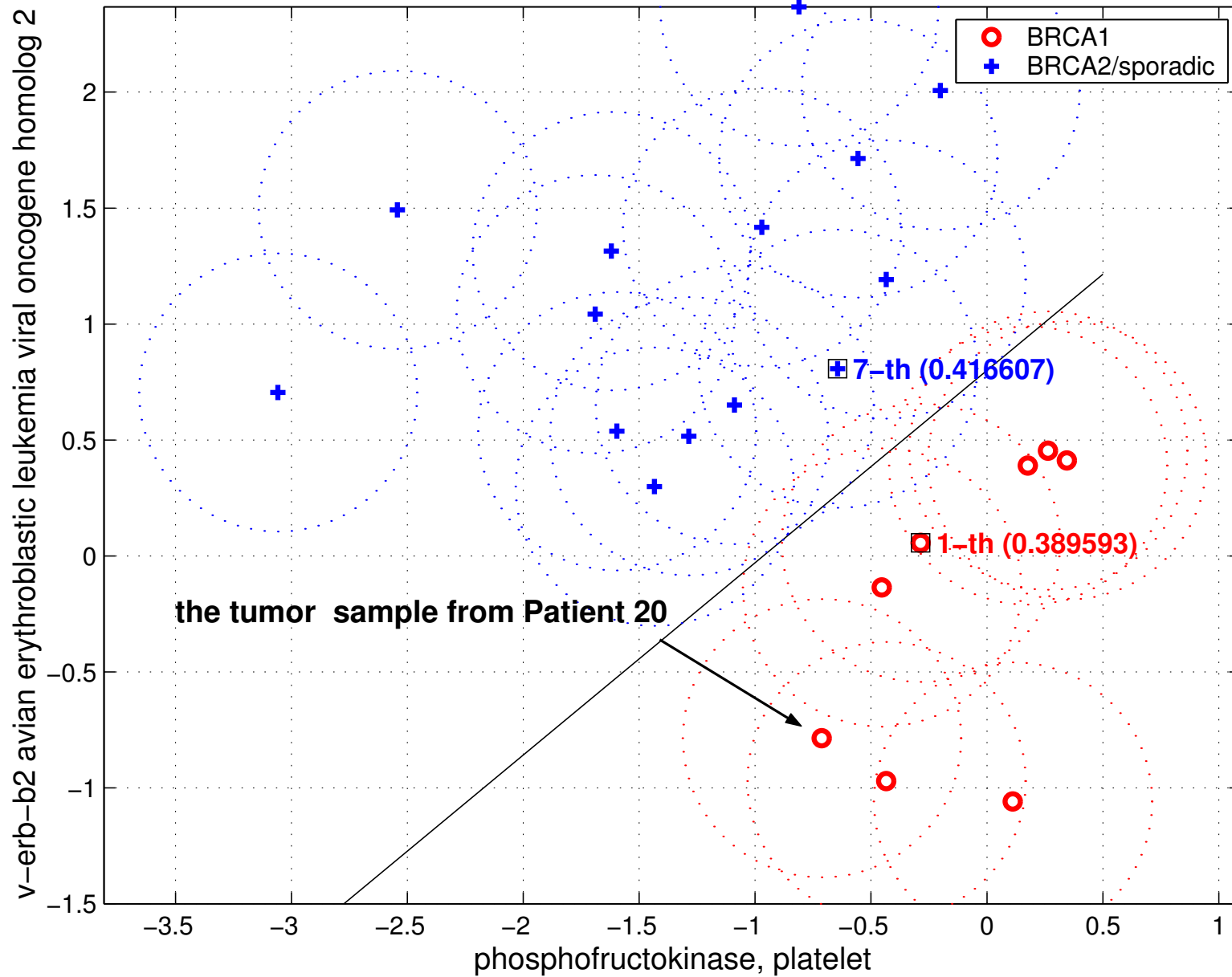
Diagnóstico de Câncer

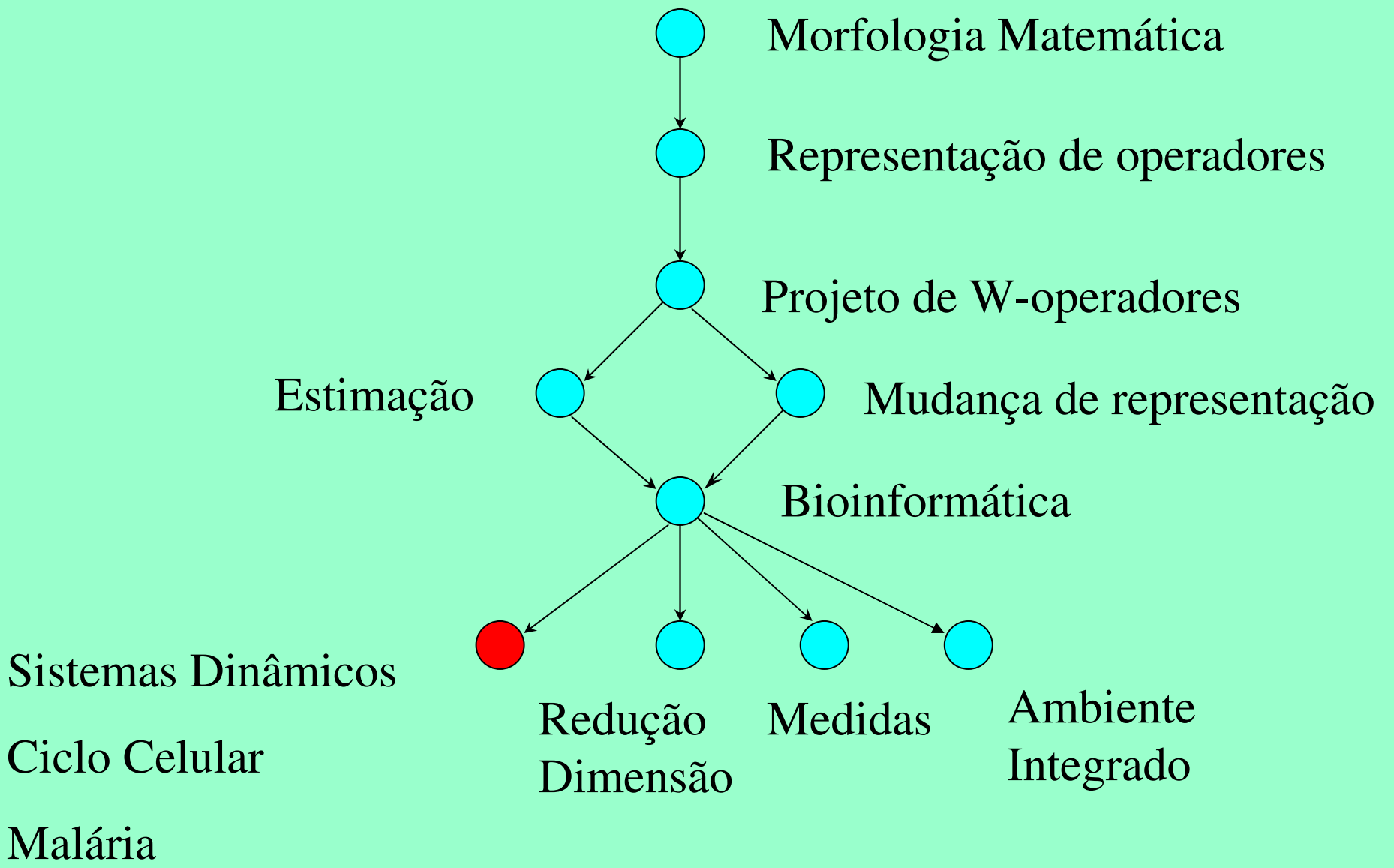
*Journal of Computational Biology*

Kim, Dougherty, Barrera, Chen, Bittner, Trent, 2002

Patente 1: USP-Texas A &M Univ.

# LINEAR CLASSIFIER (DISPERSED-GAUSSIAN) w/ $\sigma = 0.600$





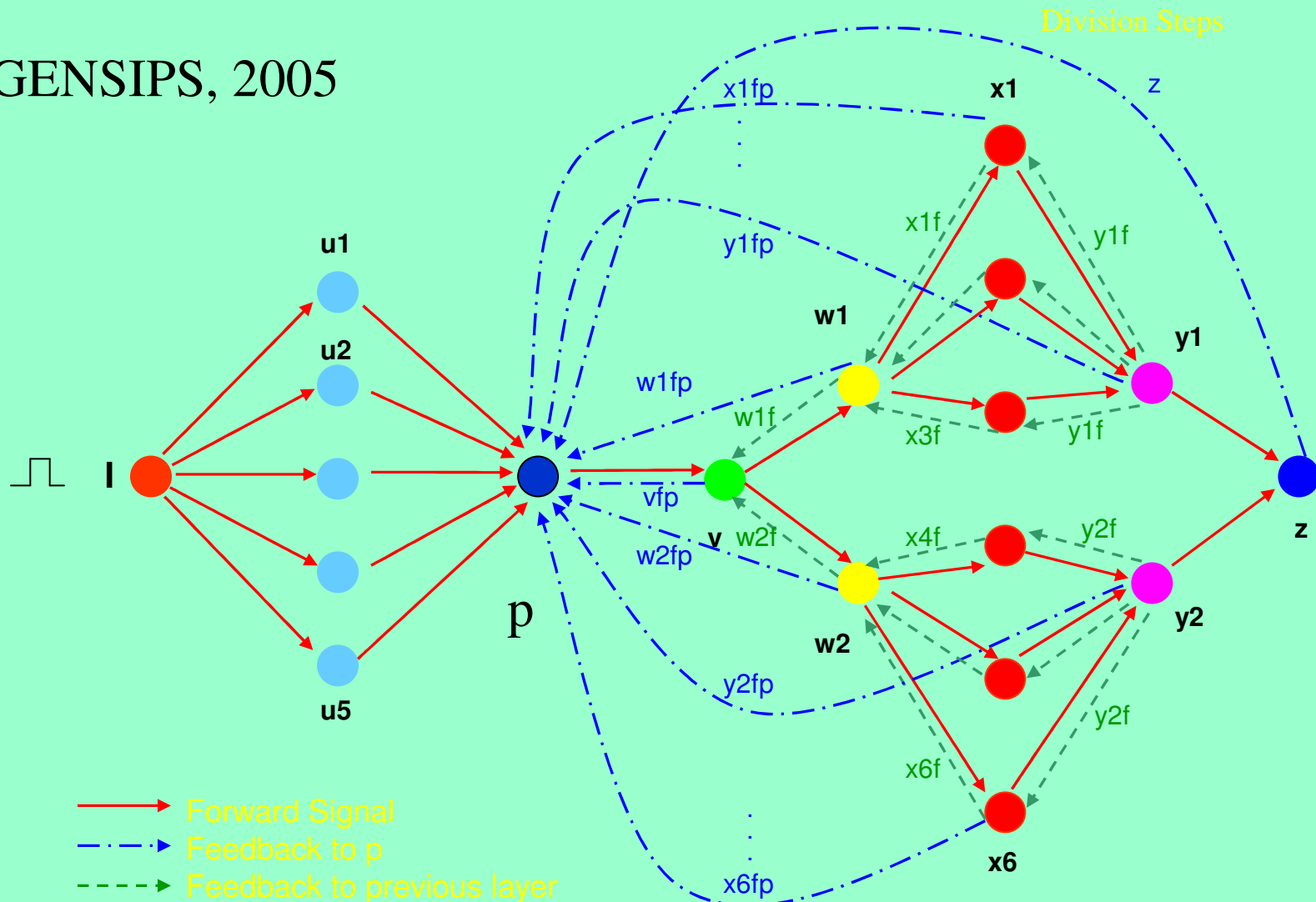
## O sistema

- depende apenas do instante anterior
- é invariante por translação
- é uma cadeia de Markov condicionalmente independente
- é quase determinístico

$$P(x[t+1] | x[t]) = \prod_{i=1}^n p(x_i[t+1] | x[t])$$

# Modelo do Ciclo Celular

GENSIPS, 2005



## PRINCIPAIS PUBLICAÇÕES

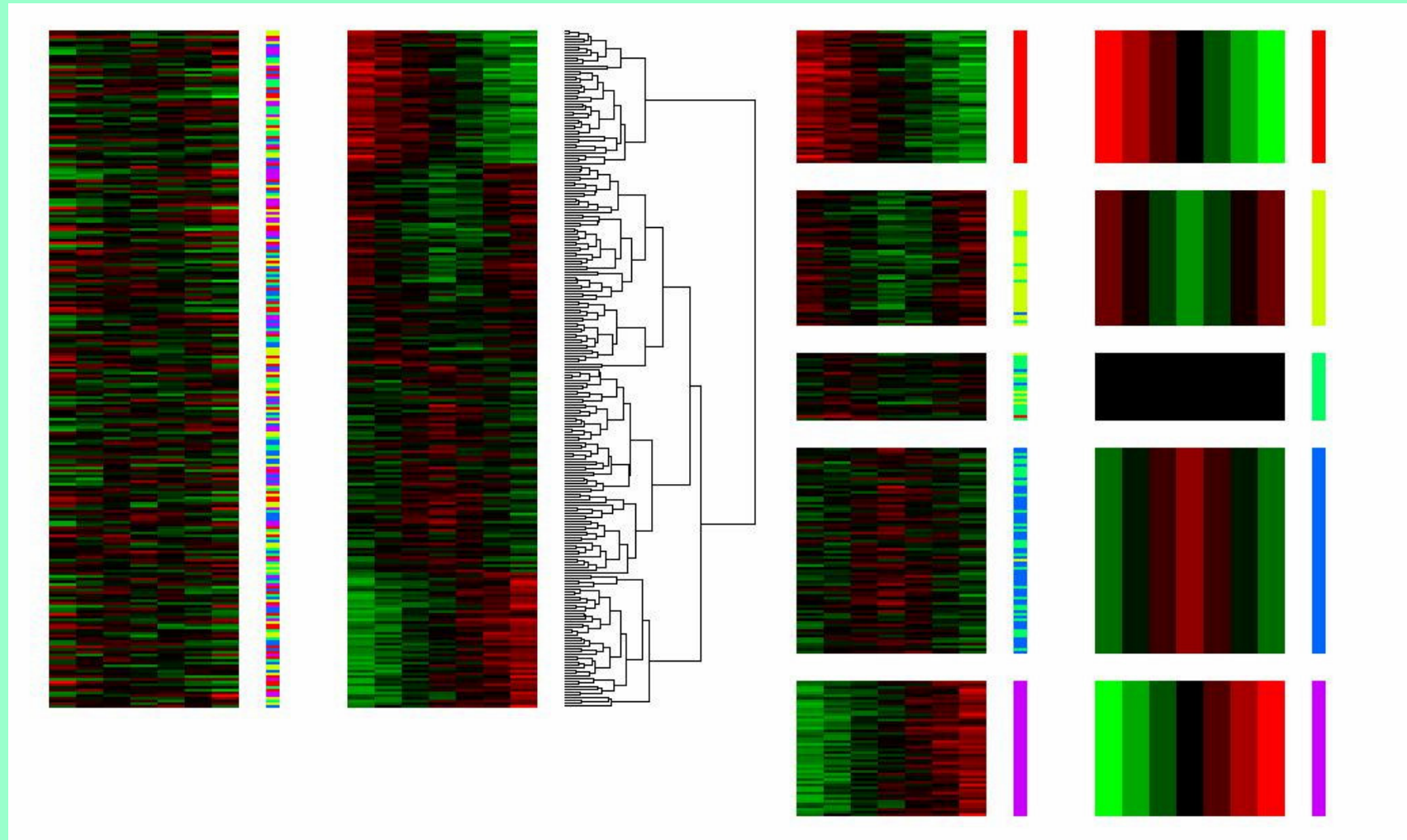
Journal of Computational Biology, 2002

Dougherty, Barrera, Brun, Kim, Cesar, Chen, Bittner

Patente 2: USP-Texas A &M Univ.



# Aglomerado de Sinais

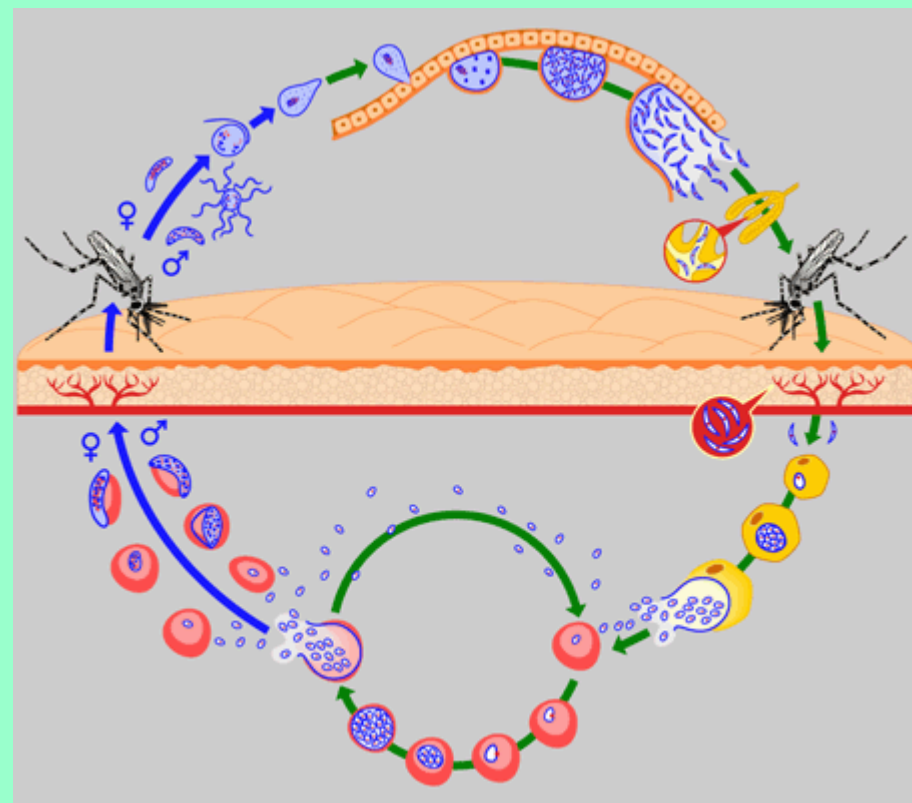


# Ciclo de vida do parasita da malária

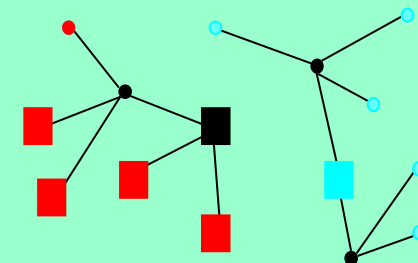
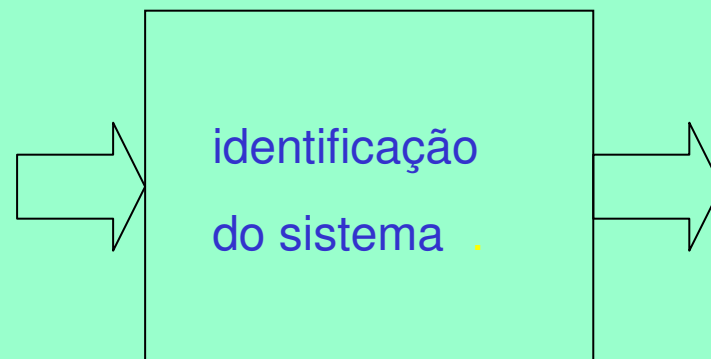
PRINCIPAL PUBLICAÇÃO

*CAMDA*

Barrera et al., 2004



$x[1], x[2], \dots, x[48]$

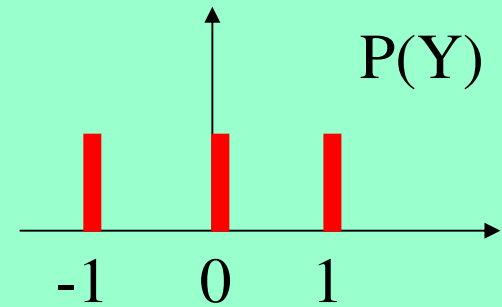


Genes alvos

## Distribuição de Y

$$P : \{-1,0,1\} \rightarrow [0,1]$$

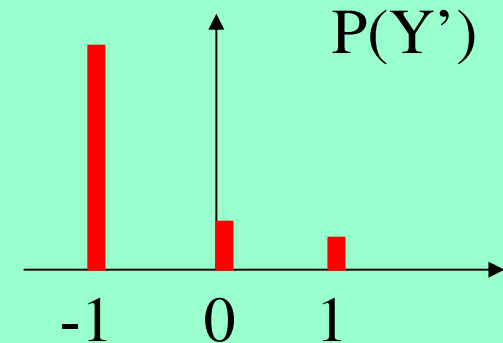
$$\sum_{y \in \{-1,0,1\}} P(y) = 1$$



## Entropia

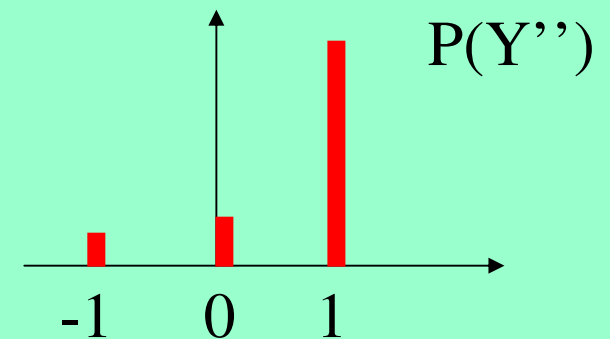
$$H(Y) = - \sum_{y \in \{-1,0,1\}} P(y) \log P(y)$$

$$H(Y) > H(Y') \quad H(Y') = H(Y'')$$

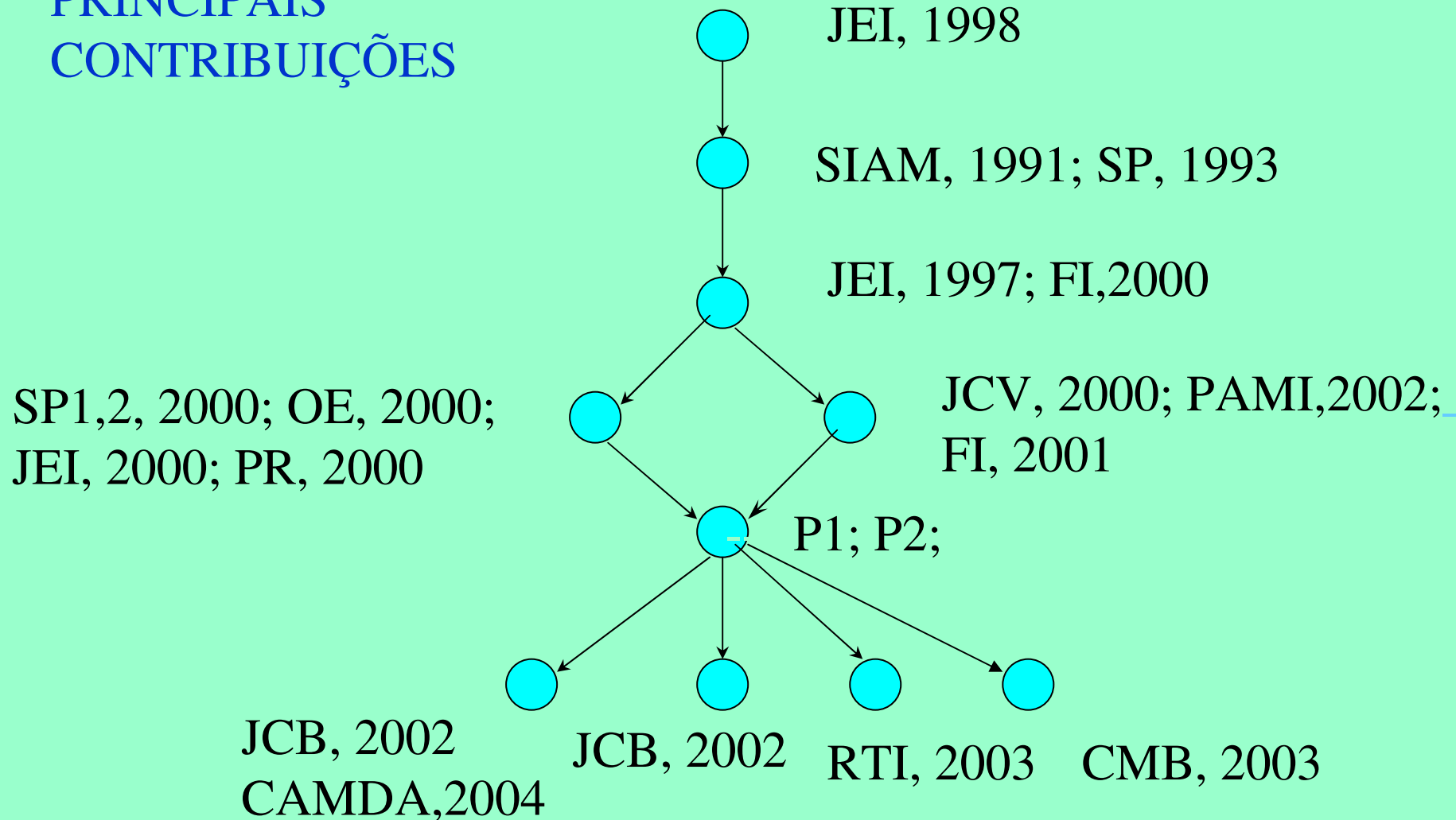


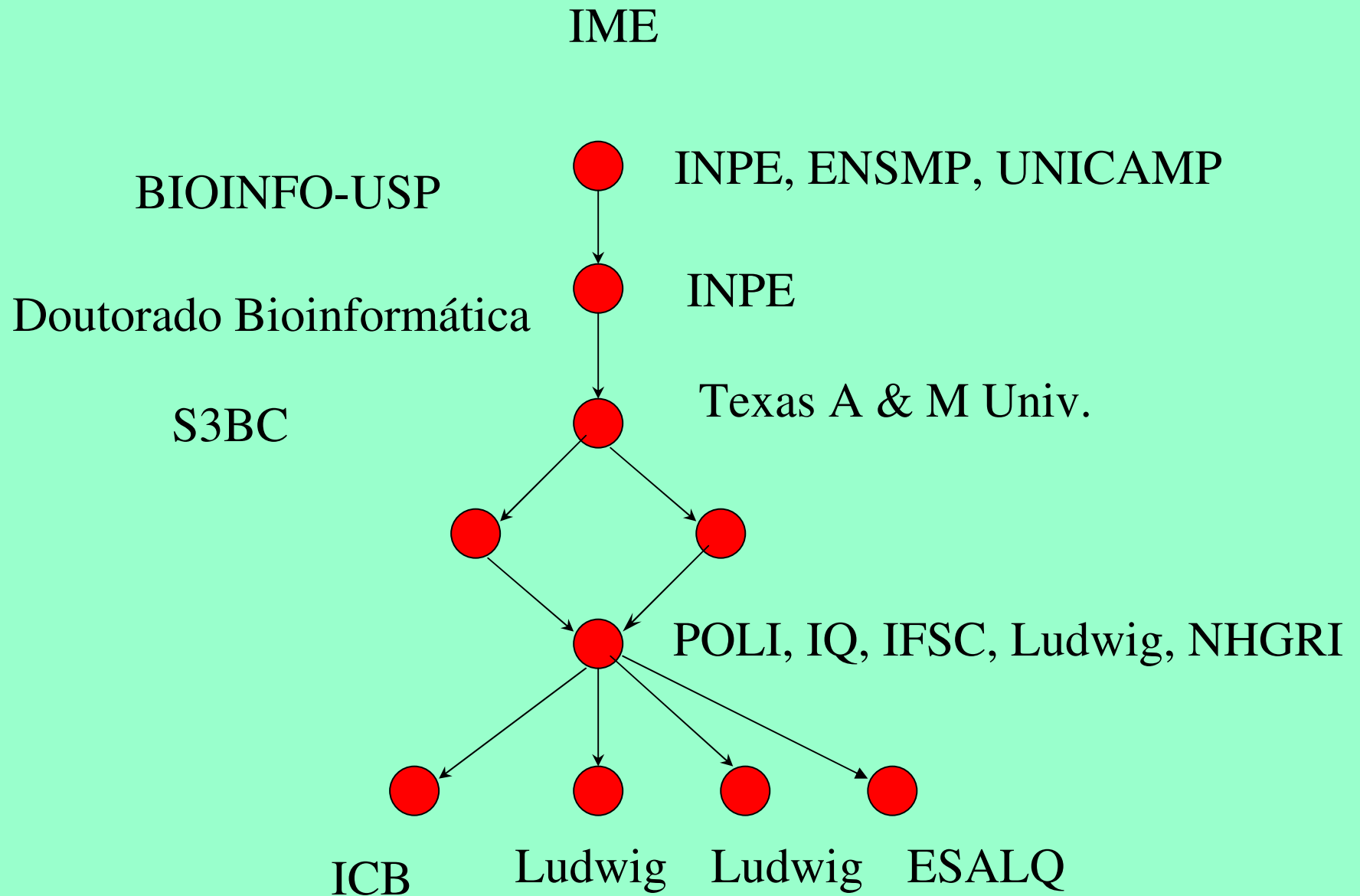
## Informação mútua

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y | X) \geq 0$$



# PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES





OMS; Harvard-MIT (NIH); EMBRAPA

**Agradecimentos**

