

MAC5811 Projeto e Análise de Algoritmos

DCC-IME-USP, 4 de março de 2005

Instruções

- (i) Esta prova contém oito questões sendo seis de dois pontos e duas de três pontos.
- (ii) A banca considerará questões cujos valores somem até 10 pontos de modo que a soma total das notas obtidas seja máxima. Um aluno, para ser aprovado, precisa obter nessas questões pelo menos 7 pontos.
- (iii) Mencione os teoremas e propriedades usados para justificar suas afirmações.
- (iv) Você pode utilizar como subrotina qualquer algoritmo do CLRS sem reescrevê-lo, como, por exemplo, algoritmos para ordenação. No entanto, você deve descrever clara e sucintamente o que o algoritmo recebe, devolve ou faz e o seu consumo de tempo. Exemplo

“O algoritmo BLÁ-BLÁ-BLÁ usa como subrotina o algoritmo ORDENAÇÃO-LERDA (A, n) que recebe e rearranja um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique em ordem crescente. O consumo de tempo do algoritmo ORDENAÇÃO-LERDA é $O(n^n)$.”
- (v) Não é permitida a consulta a livros, anotações, colegas, calculadoras, Internet, computadores ...

Duração da prova: 5 horas

Questão 1 [2 pontos]

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros no reais.

- O que significa “ $T(n)$ é $O(f(n))$ ”?
- É verdade que $20n^3 + 10n \lg n + 5$ é $O(n^3)$? Justifique.
- É verdade que $\frac{1}{2}n^2$ é $O(n)$? Justifique.
- O que significa “ $T(n)$ é $\Omega(f(n))$ ”?
- O que significa “ $T(n) = n + \Omega(n \lg n)$ ”?

Questão 2 [2 pontos]

Considere o seguinte algoritmo que recebe um vetor de números inteiros $A[1..n]$ e um número inteiro positivo k e devolve um vetor $B[1..k]$ com os k maiores elementos de A .

MAIORES (A, n, k)

- BUILD-MAX-HEAP(A, n) \triangleright transforma A em um max-heap
- para** $i \leftarrow 1$ **até** k **faça**
- $B[i] \leftarrow$ HEAP-MAXIMUM(A) \triangleright devolve um maior elemento de A
- HEAP-EXTRACT-MAX(A, n) \triangleright remove um maior elemento de A
- devolva** B

- Qual o consumo de tempo do algoritmo MAIORES? Justifique a sua resposta.
- Para quais valores de k o consumo de tempo do algoritmo MAIORES é $O(n)$? Expresse a sua resposta em função de n e justifique-a.

Questão 3 [2 pontos]

Considere o seguinte algoritmo que tem como argumentos dois números inteiros n e r , $n \geq 0$ e $r \geq 0$, e usa como subrotina um algoritmo CAIXA-PRETA.

ALGO (n, r)

- se** $n = 0$
- então** CAIXA-PRETA(n, r)
- devolva** 1
- $k \leftarrow r \times$ ALGO($n - 1, r$)
- para** $i \leftarrow 1$ **até** k **faça**
- CAIXA-PRETA(n, i)
- devolva** k

Qual o número de vezes que o algoritmo CAIXA-PRETA é chamado pelo algoritmo ALGO? Expresse esse número como função de n e r e justifique a sua resposta.

Questão 4 [2 pontos]

Suponha dado um conjunto de livros numerados de 1 a n . Suponha que o livro i tem peso $p[i]$ e que $0 < p[i] < 1$ para cada i . Considere o problema de acondicionar os livros no menor número possível de envelopes de modo que cada envelope tenha no máximo 2 livros e o peso do conteúdo de cada envelope seja no máximo 1. Escreva um algoritmo guloso MIN-ENV(p, n) que recebe um vetor $p[1..n]$ e devolve o número mínimo de envelopes. O consumo de tempo do seu algoritmo

Questão 8 [3 pontos]

Uma **mediana** de um conjunto S de m números inteiros é um número x em S que é maior ou igual a $\lfloor m/2 \rfloor$ dos elementos em S e é menor ou igual a $\lfloor m/2 \rfloor$ dos elementos em S .

Sejam $A[1..n]$ um vetor de números inteiros e k um número inteiro positivo, $k \leq n$.

Um vetor $B[1..n-k+1]$ é um vetor das **medianas dos k -segmentos** de A se $B[i]$ é uma mediana de $A[i..i+k-1]$.

- a) Escreva um algoritmo $\text{MEDIANAS-1}(A, n, k)$ que recebe um vetor de números inteiros $A[1..n]$ e um número inteiro positivo k e devolve um vetor $B[1..n-k+1]$ das medianas dos k -segmentos de A . Seu algoritmo deve consumir tempo $O(nk)$. Explique sucintamente porque seu algoritmo está correto e tem o consumo de tempo pedido.
- b) Escreva um algoritmo $\text{MEDIANAS-2}(A, n, k)$ que recebe um vetor de números inteiros $A[1..n]$ e um número inteiro positivo k e devolve um vetor $B[1..n-k+1]$ das medianas dos k -segmentos de A . Seu algoritmo deve consumir tempo $O(n \lg k)$. Explique sucintamente porque seu algoritmo está correto e tem o consumo de tempo pedido. O seu algoritmo pode utilizar como subrotinas algoritmos para a manipulação de árvores balanceadas de busca:

$\text{TREE-BUILD}(T, A, p, r)$: contrói uma árvore balanceada de busca T com os elementos de um vetor $A[p..r]$ de números inteiros;

$\text{TREE-SEARCH}(T, x)$: devolve VERDADEIRO se x é um elemento da árvore T e em caso contrário devolve FALSO;

$\text{TREE-INSERT}(T, x)$: insere o número inteiro x na árvore T ;

$\text{TREE-DELETE}(T, x)$: remove o número inteiro x da árvore T ;

$\text{TREE-MINIMUM}(T)$: devolve o menor número inteiro da árvore T ;

$\text{TREE-MAXIMUM}(T)$: devolve o maior número inteiro da árvore T .