Simulado 2008
Prova 01/08/2008

Questão 1 [1 ponto]

Exr 4.29 Suponha que estamos estudando o desempenho de um algoritmo em função do tamanho, n, das instâncias de um problema. Considere as seguintes afirmações: (1) "o consumo de tempo do algoritmo é $\mathrm{O}(n^2)$ no pior caso" e (2) "o consumo de tempo do algoritmo é $\mathrm{O}(n^2)$ para toda instância do problema". Qual a diferença entre essas afirmações?

Exr 4.30 Suponha que estamos estudando o desempenho de um algoritmo em função do tamanho, n, das instâncias de um problema. Considere as seguintes afirmações: (1) "o consumo de tempo do algoritmo é $\mathrm{O}(n^2)$ no melhor caso" e (2) "o consumo de tempo do algoritmo é $\mathrm{O}(n^2)$ para alguma instância de tamanho n". Qual a diferença entre essas afirmações?

Questão 2 [1 ponto]

Exr 11.10 Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de intervalos na reta real. Suponha que cada intervalo tem a forma $[s, f)$. Queremos encontrar uma coleção disjunta máxima de $\mathcal{C}$. Qual das alternativas está correta: (1) o intervalo com menor f pertence a alguma solução do problema; (2) o intervalo com maior f pertence a alguma solução; (3) o intervalo com menor s pertence a alguma solução; (4) o intervalo com maior s pertence a alguma solução.

Questão 3 [1 ponto]

Exr 6.35 É verdade que existe um algoritmo que consome $\mathrm{O}(n)$ unidades de tempo em média para encontrar o $\lfloor \lg n \rfloor$-ésimo menor elemento de um conjunto de n números? Dê uma justificativa curta para sua resposta.

Questão 4 [2 pontos]

Exr 7.31 Uma fila com prioridades é *estável* se os itens com uma mesma chave são removidos da fila na mesma ordem em que foram inseridos. Descreva como implementar uma fila com prioridades estável de modo que as operações de remoção e inserção consumam tempo logarítmico (isto é, se a fila tem n itens então o consumo deve ser $\mathrm{O}(\lg n)$).

Questão 5 [2 pontos]

Exr 3.12 Considere a função T definida pela seguinte recorrência: $T(r) = 1$ para todo r racional tal que $\frac{1}{3} < r \leq 1$ e

$$T(r) = T(r/3) + T(2r/3) + 5r$$

para todo racional $r > 1$. Mostre que $T(r) = \mathrm{O}(r \lg r)$.

Questão 6 [2 pontos]

Exr 18.19 Suponha dadas seqüências $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ e $\langle b_1, \ldots, b_k \rangle$ de números inteiros positivos. Queremos produzir uma seqüência $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ definida assim:

$$x_i = \begin{matrix} 1 & \text{se } b_i \in \{a_1, \ldots, a_n\} \\ 0 & \text{caso contrário .} \end{matrix}$$

Você tem duas alternativas: (a) ordenar $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ e calcular x_i usando busca linear, (b) não ordenar $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ e calcular x_i usando busca linear. Qual das duas alternativas é assintoticamente mais eficiente? Qual é assintoticamente mais eficiente se $k = n$? Qual é assintoticamente mais eficiente se $k = n$? e se $k = \lfloor \lg n \rfloor$? e se $k = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$? e se $k = \lfloor \lg \lg n \rfloor$?

Questão 7 [3 pontos]

Exr 12.9 [CLRS 17-2, Busca binária dinâmica] A busca binária em um vetor ordenado consome tempo logarítmico, mas o tempo necessário para inserir um novo elemento é linear no tamanho do vetor. Isso pode ser melhorado se mantivermos diversos vetores ordenados (em lugar de um só). Suponha que queremos implementar as operações BUSCA e INSERÇAO em um conjunto de n elementos. Seja $\langle n_{k-1}, n_{k-2}, \ldots, n_0 \rangle$ a representação binária de n, onde $k = \lceil \lg(n+1) \rceil$. Temos vetores crescentes $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$, sendo que o comprimento de A_i é 2^i. Um vetor típico A_i é relevante se $n_i = 1$ e irrelevante se $n_i = 0$. O número total de elementos nos k vetores é, portanto,

$$\sum_{i=0}^{k-1} n_i \, 2^i = n \, .$$

Cada vetor é crescente, mas não há qualquer relação entre os valores dos elementos em dois vetores diferentes. A. Dê um algoritmo para a operação BUSCA. Dê uma delimitação superior para o consumo de tempo do algoritmo. B. Dê um algoritmo para a operação INSERÇAO. Dê uma delimitação superior para o consumo de tempo do algoritmo. Calcule o consumo de tempo *amortizado*. C. Discuta uma implementação da operação REMOÇÃO.

Questão 8 [3 pontos]

Exr 10.15 Suponha dada uma seqüência $\langle x_1, \ldots, x_{2n-1} \rangle$ tal que $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ são inteiros positivos e $x_2, x_4, \ldots, x_{2n}$ pertencem ao conjunto $\{+, *\}$. É claro que "$+$" representa soma e "$*$" representa multiplicação. Queremos inserir parênteses na seqüência $\langle x_1, \ldots, x_{2n-1} \rangle$ de tal forma que a expressão aritmética resultante tenha o maior valor possível. Por exemplo, se a seqüência dada é $2+4*1+5$ então uma solução é a expressão $((2+4)*(1+5))$, que vale 36. Escreva um algoritmo de programação dinâmica que resolva o problema. Mostre que o seu algoritmo está correto. Escreva a recorrência que serve de base para o seu algoritmo. Calcule o consumo de tempo do seu algoritmo.

Questão 9 [3 pontos]

Exr 15.25 Escreva o pseudocódigo de um algoritmo que receba um grafo (não-dirigido) conexo G com pesos w associados às arestas (cada aresta (u, v) tem peso $w(u, v)$) e devolva o peso de uma árvore geradora de peso máximo. Suponha que os vértices de G são $1, \ldots, n$ e o grafo é representado por sua matriz de adjacências. Escreva o algoritmo mais simples que puder, sem operações supérfluas. Escreva o algoritmo "por extenso", isto é, sem chamar outros algoritmos. Faça um esboço da prova de correção do seu algoritmo. Diga, em notação O, qual o consumo de tempo de seu algoritmo.

Questão 10 [3 pontos]

Exr 19.26 Considere a seguinte afirmação: "Há problemas em NP que não são NP-completos." A afirmação é verdadeira ou falsa?

Exr 19.29 Considere a seguinte afirmação: "Existem problemas NP-completos em P." A afirmação é verdadeira ou falsa?

Exr 19.21 Suponha que X e Y são dois problemas em NP. Considere a seguinte afirmação: "Se X pode ser polinomialmente reduzido a Y e Y está em P então X está em P." A afirmação é verdadeira ou falsa?

Exr 19.22 Suponha que X e Y são dois problemas em NP. Considere a seguinte afirmação: "Se $X \leq_{\mathrm{P}} Y$ então X está em P." A afirmação é verdadeira ou falsa?

Exr 19.12 Suponha por um momento que o problema SUBSET-SUM está em P. Mostre que o seguinte problema pode ser resolvido em tempo polinomial: dado um conjunto S (finito, é claro) de números naturais e um número natural t, encontrar um subconjunto S' de S tal que $\sum_{s \in S'} s = t$ (ou constatar que um tal S' não existe).