

Projeto de Operadores Morfológicos Multi-Escala por Otimização Estatística

Marcel Brun

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Área de Concentração : **Ciência da Computação**
Orientador : **Prof. Dr. Junior Barrera**

O autor recebeu apoio financeiro da FAPESP e da Texas A & M University.

São Paulo, 27 de Julho de 2002

**Projeto de Operadores Morfológicos
Multi-Escala por Otimização Estatística**

Marcel Brun

”Hay hombres que de su ciencia
Tienen la cabeza llena;
Hay sabios de todas menas,
Mas digo, sin ser muy ducho:
Es mejor que aprender mucho
El aprender cosas buenas.”

José Hernández

Dedico este trabalho a Karina e a meus pais.
Tambem gostaria dedicá-lo à memoria de meu amigo Pablo,
falecido no dia 24 de outubro de 2001.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer sinceramente a todos os que me brindaram com a sua amizade nestes anos fora de meu país, e me fizeram sentir o Brasil como um segundo lar. Agradeço especialmente:

à minha esposa Karina, por suportar o tempo que estivemos longe, os momentos difíceis, as constantes viagens, e mesmo assim não deixar de ser a minha fonte de forças.

a toda minha família, pela confiança depositada em mim, e pela ajuda oferecida a todo momento.

ao Junior Barrera, por me oferecer a possibilidade de realizar este doutorado, pela permanente orientação em todos os aspectos desta etapa, tanto científicos como humanos, e por brindar-me com a sua amizade desde o meu primeiro dia no Brasil.

ao Edward Dougherty, pela oportunidade que me ofereceu de trabalhar na universidade de Texas A&M durante um ano, pela orientação e pelos trabalhos que desenvolvemos.

ao Ed Suh e Yidong Chen, pela possibilidade oferecida para participar do projeto de microarrays do NIH, em Washington.

aos pesquisadores com os quais trabalhei no desenvolvimento de projetos ou artigos, pelo respeito e o profissionalismo com que foram realizados todos esses trabalhos, e pela influência que tiveram no meu amadurecimento como pesquisador, especialmente ao Junior Barrera, Edward R. Dougherty, Roberto Hirata Jr., Ronaldo Fumio Hashimoto, Roberto M. Cesar Jr., Routo Terada, Daniel Dantas, Walter Trepode, Heraldo Madeira, Seungchan Kim e Yoganand Balagurunathan.

aos professores do IME, pelo excelente nível de ensino, e a todos os funcionários do IME, por todo o apoio que recebi deles.

à Celina, ao David, ao Roberto e ao Ney, pela ajuda com a redação da tese.

aos professores da Universidade Nacional de Mar del Plata, dentre eles os responsáveis por eu ter abraçado a área de processamento de imagens.

à Sonia Trepode, por aquele formulário de inscrição que me fez assinar em 1997.

ao Cristian Novoa Bustos, por ter sido como um irmão durante estes anos.

ao Roberto Hirata Jr. e à Nina T. Hirata, sem os quais não sei se teria conseguido realizar este trabalho.

ao Ronaldo, Angélica e Beatriz, por tudo o que significaram para nós durante nossa estadia em College Station.

a todos os amigos que conheci nestes quatro anos de trabalho, e aos amigos que deixei em Mar del Plata, que sempre estiveram próximos.

outra vez, à Karina, por tudo o que ela significa para mim.

Agradeço também à FAPESP e ao Departamento de Engenharia Elétrica da Texas A&M University pelo suporte financeiro.

Resumo

O processamento digital de imagens envolve a transformação de imagens por funções chamadas operadores de imagens.

A família de operadores lineares tem um grande desenvolvimento, mas recentemente, devido ao crescimento do poder de processamento dos computadores, os operadores não lineares estão sendo usados para resolver maior quantidade de problemas. Entre as principais técnicas utilizadas para projetar operadores não lineares está a Morfología Matemática, que permite a construção de operadores complexos por meio da combinação de operadores mais simples. Estes operadores são chamados de Operadores Morfológicos.

Atualmente está sendo explorado o projeto de operadores morfológicos através de exemplos, utilizando técnicas de aprendizado computacional. A qualidade do operador projetado depende fortemente da quantidade de exemplos utilizados, sendo esta de natureza exponencial com respeito a complexidade do problema. Uma solução para este problema é restringir o espaço de busca do operador, durante o processo de aprendizado. Se for bem definida, uma restrição pode melhorar sensivelmente a qualidade do operador projetado, sendo a especificação destas restrições um aspecto chave no projeto estatístico de operadores. Um bom conhecimento a priori do problema é fundamental para obter uma boa restrição do espaço.

Neste trabalho apresentamos duas técnicas para o projeto estatístico de operadores morfológicos que permitem diminuir a quantidade de exemplos necessários para obter uma boa estimação, pela exploração de conhecimento a priori. Uma delas, baseada em envelope, restringe a família de operadores viáveis, em função de operadores projetados heurísticamente. A segunda, baseada em restrições de resolução, equilibra os erros de estimação com o custo de restrição, através de um esquema piramidal. Finalmente apresentamos uma técnica combinada, onde são aproveitadas as vantagens do projeto sob envelope com o projeto piramidal.

Abstract

Digital Image processing involves a transformation of images by functions called image operators.

The family of linear operators has had a large development, but recently, due to the growth of the processing power of computers, the non linear operators are being used to solve a larger number of problems. Among the most important techniques used to project non linear operators we can mention the mathematical morphology, which allows for the construction of complex operators by means of the combination of simpler ones. These operators are called morphological operators.

Nowadays is being studied the design of morphological operators through the use of examples, using learning techniques. The quality of the designed operator strongly depends on the number of examples used, being this quantity of exponential nature in respect to the complexity of the problem. One of the solutions to this problem is to constraint the operator's search space, during the process of learning. If it were well defined, this constraint can improve ostensibly the quality of the designed operator. For this reason, the specification of these constraints is a key aspect of the statistical design of operators. A good a priori knowledge of the problem is fundamental to get a good constraint of the space.

In this work we present two techniques for the statistical design of morphological operators, that enables us to diminish the number of examples necessary to get a good estimation, through the exploration of a priori knowledge. One of them, based on envelope, constraints the family of viable operators, according to the operators designed heuristically. The second one, based on constraints of resolution, balance the estimation errors with the cost of constraint, through a pyramid scheme. Finally we present a combined technique, where we make use of the advantages of the design about envelope over the pyramid design.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Morfología Matemática	1
1.2	Contexto histórico	2
1.3	Contribuições da tese	3
1.4	Estrutura da tese	4
2	Fundamentos	7
2.1	Introdução	7
2.2	Operadores Morfológicos	7
2.3	W -Operadores	9
2.4	Operadores Aperture	10
2.5	Projeto estatístico de W -operadores	12
2.6	Projeto de operadores sujeitos a restrições	13
3	Envelope	15
3.1	Introdução	15
3.2	Restrição por Envelope	16
3.3	Projeto estatístico de operadores restritos por Envelope	19
3.4	Análise do erro	20
3.5	Exemplos de aplicação	23
3.5.1	Correção de borramento de imagens	23
3.5.2	Deteção de bordas em imagens binárias com ruído	25
3.5.3	Identificação de Texturas	29
3.5.4	Reconhecimento de caracteres	33
3.5.5	Comparação com Stack Filters	37

4	Multi-resolução	41
4.1	Introdução	41
4.2	Sub-amostragem	41
4.2.1	Sub-amostragem espacial	41
4.2.2	Sub-amostragem na escala de cinza	44
4.2.3	Sub-amostragem combinada	45
4.3	Operadores restritos por resolução	46
4.3.1	Restrição por resolução	46
4.3.2	Estimação de operadores restritos por resolução	48
4.3.3	Não preservação do erro ao aplicar restrição na escala de cinza dos operadores	49
4.3.4	Análise do erro para restrição de resolução	54
4.3.5	Análise do erro para W -operadores binários	58
4.4	Projeto Multiresolução	60
4.4.1	Projeto piramidal de operadores restritos por resolução	61
4.5	Exemplos de aplicação	63
4.5.1	Correção de borramento em imagens 2D com 16 níveis de cinza	63
4.5.2	Correção de borramento em imagens 2D com 64 níveis de cinza	66
5	Envelope Multi-resolução	73
5.1	Introdução	73
5.2	Envelope Multi-resolução	73
5.3	Análise do erro	76
5.4	Projeto consistente de operadores sob ρ -envelope	76
5.4.1	Exemplo	78
5.5	Exemplos de aplicação	81
5.5.1	Filtragem de ruído em diferentes escalas	81
6	Conclusão	91
6.1	Envelope	91
6.2	Multi-resolução	91
6.3	Envelope Multi-resolução	92
6.4	Desenvolvimentos futuros	92
A	Publicações relacionadas ao tema da tese	93

A.1	Artigos de revista	93
A.2	Artigos em conferência.	95
B	Lista complementar de atividades e publicações	97
B.1	Atividades desenvolvidas	97
B.2	Artigos de revista	97
B.3	Artigos em conferência.	98

Lista de Figuras

3.1	Exemplo de envelope	17
3.2	Envelope no operador projetado estatisticamente. (a) Imagem com ruído. (b) Operador projetado estatisticamente ψ . (c) Envelope superior $\psi \wedge \beta$. (d) Envelope $(\psi \wedge \beta) \vee \alpha$	18
3.3	Aplicação direta do filtro projetado heurísticamente. (a) Imagem com ruído. (b) Operador de Abertura-Fechamento α . (c) Operador de Fechamento-Abertura β . (d) Envelope $(i \wedge \beta) \vee \alpha$	18
3.4	Superfície da função booleana, (a) imagem, (b) combinado com a superfície	24
3.5	Núcleo de convolução	24
3.6	Imagem Booleana: (a) combinada; (b) seção; (c) emboçada; (d) seção	25
3.7	MSE para as imagens do modelo Booleano	26
3.8	(a) Imagem original; (b) Imagem original com ruído	27
3.9	(a) Imagem ideal (bordas); (b) Resultado da técnica (1)	27
3.10	Técnica (2) : (a) Eliminação do ruído; (b) Detecção das bordas usando $(i - \varepsilon_B)\varphi$	28
3.11	Eliminação de ruído sem usar envelope	28
3.12	Técnica (3)	29
3.13	Erro em função da quantidade de amostras	30
3.14	Imagem do mapa	30
3.15	(a) Imagem observada; (b) Imagem ideal	31
3.16	Textura identificada com o operador projetado estatisticamente	31
3.17	Textura identificada pelo operador projetado heurísticamente	32
3.18	Textura identificada pelo operador restrito por envelope	33
3.19	Imagem com texto	34
3.20	Marcadores obtidos pelo operador projetado estatisticamente	34
3.21	Reconstrução das letras marcadas na Figura 3.20	35
3.22	Marcadores obtidos pelo operador restrito por envelope	35
3.23	Reconstrução das letras marcadas na Figura 3.22	36

3.24	(a) Imagem ideal; (b) Imagem com ruído	37
3.25	(a) Resultado do stack filter; (b) resultado do primeiro envelope; (c) resultado do segundo envelope	38
3.26	(a) Imagem original; (b) Imagem com ruído	39
3.27	(a) Resultado do stack filter; (b) Resultado do primeiro envelope; (c) resultado do segundo envelope	39
4.1	Janelas utilizadas para sub-amostragem espacial: (a) W_0 ; (b) W_1	42
4.2	Exemplo de configuração	43
4.3	Exemplo de sub-amostragem com configurações Aperture	44
4.4	Exemplo de sub-amostragem com configurações Aperture	45
4.5	Restrições espacial e de escala de cinza combinadas	46
4.6	Restrição por resolução	47
4.7	Diagrama comutativo	48
4.8	Diagrama comutativo	51
4.9	MSE para a) Π_1 , b) Π_2 e c) Π_3	56
4.10	MSE para operadores restritos e não restritos	57
4.11	Comparação entre $\Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt})$ e $E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{N-c}, \psi_{opt-c})]$ para a) Π_1 , b) Π_2 e c) Π_3	57
4.12	Estrutura de pirâmide	61
4.13	(a) Imagem ideal (b) exemplo de ruído adicionado	63
4.14	Erro em função do tamanho da janela	63
4.15	Janela de convolução	64
4.16	Imagens Booleanas: (a) Parte de uma imagem (b) depois do borramento	64
4.17	MSE para 16 níveis de cinza	65
4.18	Pirâmides para os operadores “Mrs W 1” e “Mrs W 7”	65
4.19	Pirâmides para os operadores “Mrs W 8” e “Mrs W 9”	65
4.20	Modelo de imagem: a) original, b) combinado com o fundo variável	66
4.21	Modelo de imagem:(a) Imagem combinada (b) seção. (c) Imagem borrada, (d) seção	67
4.22	MSE para 64 níveis de cinza	68
4.23	Pirâmides para operadores “6” e “8”	68
4.24	Pirâmides para operadores “9” e “11”	68
4.25	MSE erro: multiresolução \times não-multiresolução	69
4.26	Pirâmides: $\{W_3, W_4\}, \{W_2, W_3, W_4\}, \dots, \{W_0, W_1, W_2, W_3, W_4\}$	69

4.27	Imagem original	70
4.28	Imagem borrada	70
4.29	Operador linear	71
4.30	W -operador multiresolução	71
4.31	Aperture não multiresolução	72
4.32	Aperture multiresolução	72
5.1	Ação de α sobre D_0 através de ρ	74
5.2	Diagrama comutativo	75
5.3	Núcleo do operador α'	80
5.4	Núcleo do operador α associado a α'	81
5.5	Imagens originais utilizadas para os testes	83
5.6	Elementos estruturantes usados no envelope	83
5.7	Primeira imagem corrompida com ruído	84
5.8	Janelas usadas na pirâmide	84
5.9	Gráfico do erro estimado sobre a Figura 1	85
5.10	Gráfico do erro estimado sobre a Figura 2	86
5.11	Gráfico do erro estimado sobre a Figura 3	86
5.12	Gráfico do erro estimado sobre a Figura 4	87
5.13	Gráfico do erro médio estimado sobre as Figuras 2, 3 e 4	87
5.14	Figura corrompida com ruído	88
5.15	Resultado da aplicação de ψ_{mul}	88
5.16	Resultado da aplicação de ψ_{env}	89
5.17	Resultado da aplicação de $\psi_{\text{env-mul}}$	89

Lista de Tabelas

4.1	Exemplo de configuração	43
4.2	Distribuição sobre $L_0 \times D_0$	53
4.3	Distribuição sobre $L_1 \times D_1$	53
4.4	MSE para os operadores na restrição \mathbf{Q} e os operadores associados em $L_1^{D_1}$	53
4.5	Distribuição Π_1 sobre $\{0, 1\} \times D_1$	56
4.6	Distribuição Π_2 sobre $\{0, 1\} \times D_1$	56
5.1	Exemplo de frequências observadas: nível 0 da pirâmide	79
5.2	Exemplo de frequências observadas: nível 1 da pirâmide	79
5.3	Exemplo de frequências observadas: nível 2 da pirâmide	79
5.4	Operadores projetados a partir da tabelas de frequências.	82

Capítulo 1

Introdução

1.1 Morfologia Matemática

Este trabalho enfoca um desafio dentro da visão computacional: o projeto automático de transformações de imagens, através de técnicas de morfologia matemática e reconhecimento de padrões.

De grande crescimento nos últimos tempos, devido ao aumento do poder de processamento e de armazenamento dos computadores modernos, a *visão computacional* é a disciplina dedicada a obtenção de informação a partir de imagens, utilizando no processo métodos computacionais [1, 2, 3, 4, 5].

Uma das etapas envolvidas no processo de visão computacional é a transformação das imagens, ou seja, o estudo de funções que, aplicadas numa imagem digital, (chamadas assim por serem armazenadas em forma digital no computador) devolvem outra imagem digital. O *processamento digital de imagens*, ou PDI, é o ramo da visão computacional que estuda estas transformações, que são realizadas através de funções chamadas *operadores de imagens*, e têm como objetivo, entre outros, a compressão, codificação, restauração, realce e segmentação de imagens.

Existem diversas técnicas para representar e modelar operadores de imagens. As técnicas baseadas em operadores lineares são as de maior difusão englobando, entre outras, as transformadas de Fourier e Wavelet. Dentro das técnicas não lineares, evidenciamos o desenvolvimento da *morfologia matemática*, que é uma área do processamento digital de imagens que provê uma sólida fundamentação teórica para o estudo de mapeamentos sobre reticulados completos, sendo os operadores de imagens casos particulares destes mapeamentos. [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]

O aspecto central da morfologia matemática é a decomposição, de qualquer operador sobre reticulados, numa combinação de quatro operadores básicos: erosão, dilatação, anti-erosão e anti-dilatação, e as operações de supremo e ínfimo. A sua definição formal está dado pela *linguagem morfológica*, uma linguagem baseada nestes operadores básicos e que, a partir deles, permite construir outros operadores mais complexos de forma iterativa. As frases desta linguagem são chamadas de *operadores morfológicos*, cuja semântica são operadores de imagens [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

A importância prática da morfologia matemática como técnica de processamento de imagens pode ser comprovado pela existência de realizações físicas da linguagem morfológica, ou *máquinas morfológicas*, de ampla difusão, como o Texture Analyzer, a MMach, MMorph, Micromorph e o Visilog, entre outros [20, 21, 22, 23].

A pesar da ampla difusão de algumas máquinas morfológicas, o projeto de operadores morfológicos para resolver problemas específicos não é uma tarefa simples. A metodologia mais utilizada, para criar operadores morfológicos complexos, como os de esqueleto [24, 25] e de watershed [26, 27], é baseada na implementação destes a partir da combinação de outros mais simples, em um processo iterativo. Com esta técnica é possível a criação de operadores bem complexos.

Outra metodologia utilizada para projetar operadores de imagens é baseada em otimização estatística. Nesta técnica, pares de imagens são usados para definir um operador morfológico através de algoritmos de aprendizado computacional [13, 14, 15, 28].

Nesta metodologia, as imagens observadas e ideais são consideradas como realizações de processos aleatórios. A distribuição conjunta dos dois processos é estimada a partir destas realizações, também chamadas de *exemplos de treinamento*. A partir desta distribuição é projetado o operador que, aplicado sobre o processo aleatório observado, melhor aproxima o processo aleatório ideal. A qualidade da aproximação é computada por meio de uma medida estatística de proximidade [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36].

A qualidade de um operador de imagens projetado estatisticamente depende de dois fatores: o tamanho do espaço de operadores, no qual é restrita a busca do operador ótimo, e a qualidade da estimação, que depende do algoritmo de aprendizado e da quantidade de exemplos disponíveis. Infelizmente, esses dois fatores são mutuamente complementares no seguinte sentido: dado um determinado algoritmo de aprendizado, e uma determinada quantidade de exemplos, quanto maior é o espaço de operadores, menor é a qualidade de estimação. [37].

O conhecimento de alguma informação sobre o problema a resolver, como por exemplo o tipo de distribuição para os processos estocásticos, permite realizar uma redução de tamanho do espaço de operadores, evitando, em parte, a perda na qualidade de estimação. No contexto do projeto estatístico de operadores morfológicos, esta redução é realizada através das *restrições*, que são subfamílias de operadores, definidas em forma algébrica, mas em função de algum conhecimento do problema [38, 39, 40, 41, 42, 43, 37].

A utilização de restrições, definidas a partir de conhecimento a priori do problema, tem a desvantagem de depender fortemente deste conhecimento. Se ele é errado, ou é aplicado a outro problema, a restrição pode fazer cair drasticamente a qualidade dos operadores projetados, mesmo com grande quantidade de exemplos.

1.2 Contexto histórico

O início da morfologia matemática se remonta aos trabalhos de Matheron e Serra [7, 8, 6], sendo originalmente pensada como uma ferramenta robusta para extrair informação de imagens microscópicas de rochas. Já neste trabalho inicial apareceram os primeiros resultados de representação de operadores crescentes, de fundamental importância para o desenvolvimento de técnicas de projeto estatístico.

A partir da representação dos operadores crescentes, e da modelagem no contexto de operadores sobre conjuntos aleatórios [44], foi possível o desenvolvimento de um marco teórico para o projeto estatístico de operadores crescentes binários e em níveis de cinza [45, 46].

Um grande avanço foi a representação de operadores não necessariamente crescentes [18, 19], o qual permitiu desenvolver técnicas de projeto estatístico desses operadores [47, 48, 49, 50, 13],

Avanços nesta área foram realizados, como análise da precisão dos operadores projetados [51], a inserção da técnica no contexto de aprendizado computacional [34], e representação de operadores invariantes por translações e localmente definidos na escala de cinzas, chamados Aperture [52, 35, 36, 53].

Uma limitação importante, na aplicação das técnicas de projeto estatístico, é o tamanho do espaço de operadores. Diversos trabalhos exploraram o uso de conhecimento a priori no projeto estatístico de operadores morfológicos, por exemplo, limitando o tamanho da representação dos operadores [38], projetando filtros crescentes [54, 39, 55], utilizando técnicas Bayesianas de estimação assumindo uma distribuição a priori para as probabilidades condicionais [56], corrigindo os valores de um operador definido a priori [57], utilizando técnicas diferenciais [58, 59] e os representando como composição [60, 61, 62, 63].

A aplicação de uma restrição no espaço de operadores é viável somente se existe um algoritmo eficiente para projetar um operador morfológico dentro dela. Como exemplo, os filtros “stack” são operadores sobre imagens em níveis de cinza, que são definidos por um único operador binário crescente, aplicado em todos os *cortes* da imagem [64, 65], a qual foi viabilizada como técnica de projeto automático de operadores morfológicos a partir da apresentação de um algoritmo eficiente para projetar operadores binários crescentes [66, 67],

Para uma restrição ter impacto positivo no projeto estatístico de operadores morfológicos, ela tem que cumprir alguns requisitos básicos: a) existir uma forma simple de transmitir o conhecimento do pesquisador sobre a restrição; b) existir um algoritmo eficiente para estimar o operador ótimo dentro da restrição c) melhorar a estimação do operador ótimo quando a quantidade de amostras é pequena.

Neste trabalho apresentamos duas novas restrições, mostrando como elas cumprem estes requisitos, e criando, a partir delas, uma nova técnica de projeto multi-escala de operadores morfológicos.

1.3 Contribuições da tese

O estudo de um tipo de restrição algébrica para imagens binárias, a *restrição independente*, baseada em definir valores fixos para algumas observações levou a perceber que ela é um caso particular de uma restrição mais general, a **restrição por envelope**, aplicável tanto a imagens binárias, como a imagens em níveis de cinza.

Outra linha de pesquisa começou com o estudo de uma técnica piramidal ad-hoc para o projeto estatístico de operadores binários. Esta técnica piramidal, baseada na criação de uma seqüência de relações de equivalência no domínio dos operadores, se mostrou altamente eficiente em problemas de filtragem de ruído em imagens, quando tanto a imagem como o ruído possuíam componentes de diferentes tamanhos.

O estudo das propriedades teóricas desta técnica permitiu ver que ela possui uma forte fundamentação teórica. Para isso foi definida a **restrição por resolução**, baseada numa única relação de equivalência no domínio dos operadores. Um operador projetado dentro desta restrição pode perder qualidade pelo tamanho menor do espaço mais, se as classes de equivalência são bem definidas, o ganho na qualidade de estimação pode ser maior.

Um resultado importante deste estudo é o *teorema de preservação de erro*, do qual é derivada uma técnica simples para projetar estatisticamente os operadores restritos por resolução, onde estes

operadores são o resultado direto do mesmo algoritmo de aprendizado utilizado para projetar operadores não restritos. Além do teorema de preservação de erro, foi estudado o comportamento do erro de estimação e foram deduzidas expressões médias para ele no caso de operadores sobre imagens binárias.

Uma propriedade requerida nos algoritmos de aprendizado é a *consistência*, i.e., que quanto maior é a quantidade de exemplos usados para projetar um operador, mais próximo ele fica do operador ótimo. O projeto de operadores binários utilizando envelope tem a desvantagem de não ser consistente, pois se o operador ótimo restrito é diferente do operador ótimo não restrito, então o operador projetado se aproxima do primeiro à medida que aumenta a quantidade de exemplos. Aqui é onde aparece a importância do projeto combinado usando **envelope multi-resolução**. A aplicação do envelope somente num nível da pirâmide, permite obter as duas propriedades desejadas num projeto automático: consistência e bom comportamento para quantidades pequenas de amostras. Neste trabalho apresentamos a técnica para imagens binárias [68], mostrando algumas propriedades teóricas e exemplos práticos.

Em todos os casos, fizemos simulações para analisar as vantagens das restrições em certas condições não triviais, e aplicamos a técnica em diversos problemas de filtragem e correção de borramento. Estes exemplos confirmaram os resultados teóricos obtidos.

Parte do trabalho foi realizado em colaboração com o Doutor Edward R. Dougherty, da “Texas A&M University”, no período compreendido entre Outubro de 2000 e outubro de 2001.

1.4 Estrutura da tese

- No capítulo 2 (**Fundamentos**) apresentamos os modelos de imagens utilizados, os conceitos básicos da Morfologia Matemática, a representação dos operadores morfológicos e o projeto estatístico a partir de exemplos. Apresentamos o problema de estimação com poucas amostras, e a técnica de restrições.
- No capítulo 3 (**Envelope**) apresentamos a restrição de envelope, que no caso das imagens binárias é também chamada de restrição independente, apresentamos a técnica de estimação de operadores restritos por envelope, através da projeção de operadores dentro da restrição provando que a projeção do operador ótimo é ótimo na restrição. Apresentamos aplicações práticas comparando o envelope com o projeto estatístico sem restrições.
- No capítulo 4 (**Multi-resolução**) apresentamos o conceito de restrição por resolução para imagens binárias em níveis de cinza. Provamos o teorema de preservação de erro, que relaciona o operador restrito ótimo com o operador ótimo no espaço associado à menor resolução. Apresentamos simulações para estudar as vantagens desta técnica. Apresentamos também aplicações práticas comparando-a com outras técnicas de estimação.
- No capítulo 5 (**Envelope multi-resolução**) apresentamos a técnica de projeto utilizando envelope combinado com multi-resolução, estendemos as propriedades do projeto por envelope ao contexto de multi-resolução, mostramos a consistência do novo estimador e o aplicamos em situações experimentais.
- No capítulo 6 (**Conclusão**) apresentamos as conclusões deste trabalho e algumas futuras linhas de pesquisa.

- No apêndice A (**Publicações relacionadas ao tema da tese**) apresentamos uma lista dos artigos publicados ou submetidos durante o período do doutorado, associados diretamente ao tema da tese, junto com um breve resumo de cada artigo.
- No apêndice B (**Lista complementar de publicações**) apresentamos uma lista dos artigos publicados ou submetidos durante o período do doutorado, não associados diretamente ao tema da tese, junto com um breve resumo de cada artigo.

Capítulo 2

Fundamentos

2.1 Introdução

Nesta seção apresentaremos as noções básicas da morfologia matemática e do projeto estatístico de operadores morfológicos a partir de exemplos. Primeiro será introduzido o conceito de reticulado, e de operador morfológico, e as propriedades de decomposição destes operadores. Depois serão apresentados os W -operadores e operadores Aperture, e a representação por funções características. A seguinte seção trata do projeto estatístico de operadores morfológicos num contexto onde as imagens são realizações de processos estocásticos. Finalmente é definido o conceito de restrição no espaço de operadores como técnica geral para a melhora da estimação.

2.2 Operadores Morfológicos

No caso de imagens binárias, a morfologia matemática está fundamentada em operações de intersecção e união. No caso de imagens não binárias, as operações envolvidas são de ínfimo e supremo. O modelo de imagens a utilizar deve ter uma estrutura onde possam estar definidas estas operações. Esta estrutura é o reticulado completo [69].

Nesta seção vamos introduzir o conceito de *reticulado completo* e a decomposição de operadores sob reticulados como supremo de uma sub-família de operadores.

Definição 2.1 Um conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}, \leq) é chamado de **reticulado** se todo subconjunto finito de \mathcal{L} tem ínfimo e supremo. Um conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ é um **intervalo** se e somente se existem $A, B \in \mathcal{L}$ tais que $A \leq X \leq B \Leftrightarrow X \in \mathcal{X}$, e é denotado por $\mathcal{X} = [A, B]$.

Usualmente, na definição de imagens, elas são definidas como mapeamentos desde um domínio T , que pode ser, por exemplo, um subconjunto de \mathbb{Z}^2 , num reticulado, que pode ser, por exemplo, o intervalo $[0, 255]$, chamado de **escala de cinza** da imagem. A seguinte proposição mostra que se a escala de cinza é um reticulado, então o espaço de imagens é também um reticulado.

Proposição 2.2 Seja E um conjunto não vazio e seja \mathcal{L} um reticulado, então a família $FUN[E, \mathcal{L}] = \mathcal{L}^E$, das funções com domínio em E e escala de cinza em \mathcal{L} , é também um reticulado com a relação

de ordem dada por

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in E$$

Em seguida apresentamos uma definição de operador de imagens dentro do contexto dos reticulados. Esta definição é bem geral, para modelar a maior parte dos problemas em processamento de imagens, e ao mesmo tempo permite obter resultados importantes como o de sub-decomposição [19]

Definição 2.3 *Sejam \mathcal{F}, \mathcal{G} dois reticulados completos, um **operador de imagens** é uma função $\Psi : F \rightarrow G$.*

Como exemplo de operadores de imagens básicos utilizados na morfologia matemática, estão a erosão, dilatação, anti-erosão e anti-dilatação [69]

Definição 2.4 *Sejam $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ dois reticulados, um operador $\varepsilon : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ que satisfaz $\varepsilon(\bigwedge_{i \in I} X_i) = \bigwedge_{i \in I} \varepsilon(X_i)$, para qualquer coleção $X_i \in \mathcal{L}_1, i \in I$, é chamado de **erosão**. Um operador $\delta : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ que satisfaz $\delta(\bigvee_{i \in I} X_i) = \bigvee_{i \in I} \delta(X_i)$, para qualquer coleção $X_i \in \mathcal{L}_1, i \in I$, é chamado de **dilatação**.*

Definição 2.5 *Sejam $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ dois reticulados, um operador $\varepsilon^a : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ que satisfaz $\varepsilon^a(\bigwedge_{i \in I} X_i) = \bigvee_{i \in I} \varepsilon^a(X_i)$, para qualquer coleção $X_i \in \mathcal{L}_1, i \in I$, é chamado de **anti-erosão**. Um operador $\delta^a : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ que satisfaz $\delta^a(\bigvee_{i \in I} X_i) = \bigwedge_{i \in I} \delta^a(X_i)$, para qualquer coleção $X_i \in \mathcal{L}_1, i \in I$, é chamado de **anti-dilatação**.*

Seja \mathcal{L}_1 um reticulado, seja $A \in \mathcal{L}_1$, um exemplo de erosão é operador $\varepsilon_A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \{0, 1\}$ dado por

$$\varepsilon_A(X) = \begin{cases} 1 & : \text{ se } A \leq X \\ 0 & : \text{ se não} \end{cases} . \quad (2.1)$$

e um exemplo de anti-dilatação é o operador $\delta_A^a : \mathcal{L}_1 \rightarrow \{0, 1\}$ definido por

$$\delta_A^a(X) = \begin{cases} 1 & : \text{ se } X \leq A \\ 0 & : \text{ se não} \end{cases} . \quad (2.2)$$

Definição 2.6 *Sejam $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ dois reticulados, sejam $A, B \in \mathcal{L}_1$, e sejam ε_A e δ_B^a respectivamente a erosão pelo elemento estruturante A e a anti-dilatação pelo elemento estruturante B [69], o operador $\lambda_{A,B} : \mathcal{L}_1 \rightarrow \{0, 1\}$, definido por*

$$\lambda_{A,B} = \varepsilon_A \wedge \delta_B^a$$

*é chamado de **operador sup-gerador binário***

Proposição 2.7 *O operador sup-gerador $\lambda_{A,B}$ pode ser definido em forma equivalente por*

$$\lambda_{A,B}(X) = \begin{cases} 1 & : \text{ se } X \in [A, B] \\ 0 & : \text{ se não} \end{cases} . \quad (2.3)$$

Definição 2.8 *Para todo operador $\Psi \in FUN[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, o **Núcleo** de Ψ é a função $\mathcal{K}(\Psi) : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L}_1)$, onde $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto de partes de X , definida, para cada $Y \in \mathcal{L}_2$, por*

$$\mathcal{K}(\Psi)(Y) = \{X \in \mathcal{L}_1 : Y \leq \Psi(X)\}$$

Seja W um conjunto finito. No caso particular de operadores binários, definidos de $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}(W)$ em $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, estes podem ser representados simplesmente por $\mathcal{K}(\Psi)(1)$, usualmente denotado $\mathcal{K}(\Psi)$, e denominado **Núcleo** do operador. O espaço de possíveis núcleos $\mathcal{P}(\mathcal{L}_1)$ é isomórfico ao espaço de operadores binários $\Psi \in \text{FUN}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, i.e., $\mathcal{K}(\varphi) \subseteq \mathcal{K}(\psi) \Leftrightarrow \varphi \leq \psi$.

Proposição 2.9 *Qualquer operador $\Psi : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ tem a seguinte decomposição [19]:*

$$\Psi(X) = \bigvee \{Y \in \mathcal{L}_2 : \bigvee \{\lambda_{A,B}(X) : [A, B] \subseteq \mathcal{K}(\Psi)(Y)\} = 1\}$$

Definição 2.10 *Para todo operador morfológico $\Psi \in \text{FUN}[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, a base de Ψ é a função $\mathbf{B}(\Psi) : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L}_1))$ definida por, para cada $Y \in \mathcal{L}_2$,*

$$\mathbf{B}(\Psi)(Y) = \text{Max}(\{[A, B] : [A, B] \subseteq \mathcal{K}(\Psi)(Y)\})$$

Onde $\text{Max}(\mathcal{X})$ denota o conjunto de intervalos maximais contidos na coleção de intervalos \mathcal{X} .

Proposição 2.11 *Sejam \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 dois reticulados finitos, quaisquer operador $\Psi : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ têm a seguinte decomposição:*

$$\Psi(X) = \bigvee \{Y \in \mathcal{L}_2 : \bigvee \{\lambda_{A,B}(X) : [A, B] \subseteq \mathbf{B}(\Psi)(Y)\} = 1\}$$

2.3 *W*-Operadores

Sejam $L = [0, \dots, l]$ e $M = [0, \dots, m]$ as escalas de cinza das imagens, considerando a estrutura de reticulado de L^E e M^E , os operadores $\Psi : L^E \rightarrow M^E$ são operadores morfológicos.

Seja o domínio das imagens E um grupo Abelianamente com a operação $+$: $E \times E \rightarrow E$. Seja $f \in L^E$ uma imagem sob E , e seja $t \in E$. Então a translação espacial de f por t é definida por

$$f_t(x) = f(x - t), \forall x \in E$$

Um operador morfológico $\Psi : L^E \rightarrow M^E$ se diz **Invariante por translação** se $\Psi(f_t) = \Psi(f)_t$ para qualquer $f \in L^E$ e $t \in E$.

Uma **janela** W é um subconjunto finito de E , e uma **configuração de janela** (ou configuração) e uma função $c : W \rightarrow L$. Um operador morfológico Ψ e **localmente definido por W** se sempre que $f_{-t}|_W = g_{-t}|_W$ então $\Psi(f)(t) = \Psi(g)(t)$, para todo f, g em $\text{FUN}(E, L)$ e todo t em E .

Definição 2.12 *Um operador invariante por translações e localmente definido por uma janela W é chamado de **W-operador**.*

A família dos *W*-operadores é uma sub-família dos operadores de imagens. A restrição pela janela W faz o resultado num ponto $t \in E$ depender somente dos valores da imagem numa vizinhança dele. A invariância por translação faz que essa dependência seja a mesma para qualquer ponto $t \in E$. Se, por exemplo, a janela W só contém a origem de E , então a família de *W*-operadores é formada por todas as transformações pontuais. Se $W = E$, então todos os operadores morfológicos i.t. são *W*-operadores. Mas a propriedade mais importante dos *W*-operadores é a possibilidade de representá-los a partir de funções mais simples.

Definição 2.13 *Sejam L e M as escalas de cinza das imagens observadas e ideais, respectivamente, e W uma janela, uma **função característica** e uma função $\psi : L^W \rightarrow M$.*

Proposição 2.14 *Seja Ψ um W -operador, seja ψ a função característica definida por $\psi(\mathbf{x}) = \Psi(f)(0)$ para alguma imagem f tal que $f|_W = \mathbf{x}$, então*

$$\Psi(f)(t) = \psi(f_{-t}|_W)$$

Portanto existe uma bijeção entre o espaço de W -operadores e o das funções características sobre a janela W . Em particular, as funções sub-geradoras $\lambda_{A,B}$ de M^W caracterizam W -operadores $\Lambda_{A,B}$ por $\Lambda_{A,B}(f)(t) = \lambda(f_{-t}|_W)$ e, portanto, os W -operadores têm decomposição em função da base das funções características associadas.

Teorema 2.15 *Se $\Psi : L^E \rightarrow M^E$ é um W -operador, e $\psi : L^W \rightarrow M$ é a sua função característica associada, então*

$$\Psi(f) = \sum_{y=1}^m \vee \{ \Lambda_{A,B}(f) : [A, B] \in \mathbf{B}(\psi)(y) \}$$

2.4 Operadores Aperture

Na restrição definida pelos W -operadores, os operadores de imagens são invariantes por translações espaciais e dependem somente das observações dentro da janela espacial W . Esta restrição é prática pois muitos operadores de imagens úteis podem ser englobados dentro desta família, como por exemplo os filtros mediana, máximo, mínimo, e as versões discretas dos filtros de convolução.

Da mesma maneira que restrições espaciais, podem ser realizadas restrições na escala de cinzas, através da K -funções características, que são funções características invariantes por translações na escala de cinza, e definidos localmente dentro de uma janela nos níveis de cinza, como vai ser apresentado a continuação [52, 35].

Definição 2.16 *Seja E o domínio das imagens, $W \in E$ uma janela, e $L = [0, \dots, l]$ a escala de cinza, sendo L um grupo abeliano (por exemplo, $L = \mathcal{Z}$, ou $L = \mathcal{Z}_n$), uma função $\psi : FUN(W, L) \rightarrow L$ é **invariante por translações verticais** se para todo $y \in L$ e todo $u \in FUN(W, K)$,*

$$\psi(u + y) = \psi(u) + y,$$

onde $u + y$ denota a função $(u + y)(t) = u(t) + y$ para todo $t \in E$.

Sejam $k \in \mathcal{N}$ e $K = [-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k]$, com $k \leq l$. K é chamada de **janela na escala de cinza**. A cada configuração $u \in FUN(W, L)$ podemos associar uma configuração com $2k + 1$ níveis de cinza, centrada no ponto $u(0)$.

Definição 2.17 *Seja E o domínio das imagens, $W \in E$ uma janela, $L = [0, \dots, l]$ a escala de cinza, sendo L um grupo abeliano, e $K = [-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k]$ uma janela na escala de cinza, uma **configuração Aperture** é uma função $c \in FUN(W, K)$.*

Cada configuração $u \in \text{FUN}(W, L)$ pode ser restrita á janela K por, para todo $t \in W$,

$$(u|K)(t) = \begin{cases} u(t) - u(0) & : -k \leq u(t) - u(0) \leq k \\ k & : u(t) > k \\ -k & : u(t) < -k \end{cases} \quad (2.4)$$

Definição 2.18 *Seja E o domínio das imagens, $W \in E$ uma janela, L a escala de cinza, sendo L um grupo abeliano (por exemplo, $L = \mathcal{Z}$, ou $L = \mathcal{Z}_n$), e $K = [-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k]$ uma janela na escala de cinza, uma função característica $\psi : \text{FUN}(W, L) \rightarrow L$ é **localmente definida em K** se para todo $u \in \text{FUN}(W, K)$*

$$\psi(u) = u(0) + \beta_{u(0)}(u|K) \quad (2.5)$$

onde β_y é uma função característica da forma $\beta_y : \text{FUN}(W, K) \rightarrow K$.

O valor $u(0)$ define a posição vertical da janela de observação $W \times K$. A função β_y é definida para cada possível valor de $u(0)$.

Definição 2.19 *Uma função característica invariante por translações na escala de cinzas, localmente definida por uma janela K , é chamada de **função K -característica**.*

Se a função característica ψ é uma função K -característica, definida pelas funções β_y , com $y \in L$, então $\beta_y = \beta_{y'}$ para todo $y, y' \in L$, e chamamos a esta função β_ψ . Portanto, uma função K -característica ψ satisfaz

$$\psi(u) = u(0) + \beta_\psi(u|K)$$

Definição 2.20 *Um WK -operador é um W -operador cuja função característica é uma função K -característica.*

Os WK -operadores são operadores invariantes por translação espacial e nos níveis de cinza, e localmente definidos em W e K .

Um WK -operador Ψ é caracterizado, portanto, por

$$\Psi(f)(t) = f_{-t}(0) + \beta_\psi([f_{-t}|W]|K)$$

Esta definição pode ser flexibilizada um pouco mais, permitindo um posicionamento vertical da janela diferente do dado por $u(0)$.

Definição 2.21 *Seja $z : \text{FUN}(W, L) \rightarrow L$ uma função invariante por translações verticais, se trocamos a equação 2.4 por*

$$(u|K)(t) = \begin{cases} u(z) - z(0) & : -k \leq u(z) - z(0) \leq k \\ k & : u(z) > k \\ -k & : u(z) < -k \end{cases} \quad (2.6)$$

e a equação 2.5 por

$$\psi(u) = z(u) + \beta_{z(u)}(u|K) \quad (2.7)$$

então um WK -operador é chamado **operador Aperture**.

Um operador Aperture Ψ é caracterizado por

$$\Psi(f)(t) = z(f_{-t}|W) + \beta_\psi([f_{-t}|W]|K)$$

O operador Aperture tem mais flexibilidade para posicionar a janela verticalmente, podendo ser usada, por exemplo, a mediana dos valores observados dentro da janela, em vez do valor na origem $u(0)$, como na definição de WK -operadores. Em imagens com ruído pontual, e janelas K pequenas, a melhora no posicionamento da janela pode ser notável [36, 35]

2.5 Projeto estatístico de W -operadores

O projeto automático de operadores morfológicos supõe que as imagens não são determinísticas, mas realizações de processos estocásticos. O modelo utilizado, na morfologia matemática, para representar as imagens e o de conjunto aleatório, para imagens binárias, e campo aleatório para imagens mais gerais. [5, 70, 71, 44]

Definição 2.22 *Um processo aleatório é uma família de variáveis aleatórias $\{X(\omega, u)\}_{u \in T}$ para um conjunto de índices T , onde para cada índice $u_0 \in T$, a variável aleatória $\{X(\omega, u_0)\}$ esta definida sobre o espaço S .*

Definição 2.23 *Uma imagem digital é a realização de um processo aleatório discreto $\{X(\omega, u)\}_{u \in T}$ para um conjunto de índices $T = E \subset Z^2$, que toma valores no conjunto $L \subset Z$.*

Seja $\omega_0 \in S$ um evento, e seja $X(\omega_0, u)$, $u \in E$, então X é uma função com $X : E \rightarrow L$, atribuindo a cada ponto $u \in E$ o valor $X(\omega_0, u)$.

O modelo aleatório para as imagens define uma estrutura para o projeto estatístico de operadores morfológicos. Um operador morfológico deve ser capaz de cumprir a sua função para diferentes realizações de uma imagem aleatória. Seja O uma imagem aleatória, e Ψ um operador morfológico, para cada realização $o = O(\omega)$ de O , $\Psi(o)$ pode ser considerada como uma realização de outra imagem aleatória, chamada $\Psi(O)$. Usualmente queremos que a nova imagem aleatória $\Psi(O)$ seja uma boa aproximação de uma imagem aleatória ideal I . I e O estão definidas sobre o mesmo espaço amostral S .

Exemplo: A imagem aleatória O pode ser a degradação por ruído aleatório de uma imagem aleatória binária R , isto é, $O = \Theta(R)$, onde Θ é uma transformação aleatória de adição de ruído. A imagem aleatória I pode ser definida pelas bordas de R . O objetivo neste caso é a obtenção de um operador morfológico Ψ que, aplicado a realizações $o = O(\omega)$, obtenha as bordas da realização $r = R(\omega)$, que corresponderia à realização $i = I(\omega)$. A imagem aleatória I será chamada de *imagem ideal*, O será chamada de *imagem observada* e $\Psi(O)$ de *estimador*.

A qualidade do estimador Ψ é medida pela distancia media entre a imagem ideal e a imagem obtida pela aplicação de Ψ sobre a imagem observada, $\epsilon(\Psi) = E[D(I, \Psi(O))]$, onde $D : L^E \times L^E \rightarrow \mathcal{R}$ pode ser definida, se $|E| < \infty$, como a media de uma medida de distancia puntual,

$$D(f, g) = \sum_{u \in E} d(f(u), g(u))$$

com $d : L \times L \rightarrow \mathcal{R}$.

Definição 2.24 *Seja $d : L \times L \rightarrow \mathcal{R}$ uma distancia e seja $|E| < \infty$, o erro do operador Ψ como estimador de I a partir de O é dada por*

$$\epsilon(\Psi) = E \left[\frac{1}{|E|} \sum_{u \in E} d(I(u), \Psi(O)(u)) \right]$$

Exemplo: Se $d(y, y') = |y - y'|$, então o erro é o Erro Absoluto Médio, ou MAE (mean absolute error). Se $d(y, y') = (y - y')^2$, o erro é o Erro Quadrático Médio, ou MSE (mean square error).

O projeto automático de operadores morfológicos consiste em encontrar, dado um modelo para as imagens aleatórias observadas e ideais, um operador Ψ de menor erro, dentro de uma família \mathcal{F} de operadores. Neste trabalho a família de operadores considerada é a família Ψ_W dos W -operadores. Neste caso, o operador Ψ está definido pela função característica ψ , por

$$\Psi(o)(u) = \psi(o_{-u}|W)$$

e o erro é dado por

$$Er[I, \Psi(O)] = E \left[\frac{1}{|E|} \sum_{u \in E} d(I(u), \psi(o_{-u}|W)) \right]$$

se a distribuição conjunta de I e O é estacionária, isto é, se

$$Prob[I(u) = y, o_{-u}|W = \mathbf{x}] = Prob[I(u') = y, o_{-u'}|W = \mathbf{x}]$$

para todo $y \in L$, $\mathbf{x} : W \rightarrow L$, $u, u' \in E$, então esta distribuição conjunta induz uma distribuição $P : L \times L^W \rightarrow [0, 1]$ por

$$P(y, \mathbf{a}) = Prob[I(u) = y, o_{-u}|W = \mathbf{x}]$$

. Seja $Er[\psi] = E[d(y, \psi(\mathbf{x}))]$, a esperança sob a distribuição induzida, então $Er[\psi] = Er[I, \Psi(O)]$. Portanto, procurar o W -operador Ψ de mínimo erro é equivalente a procurar a função característica ψ de mínimo erro com a distribuição induzida. A partir deste ponto, dada o isomorfismo entre W -operadores e suas funções características, e a equivalência do erro nos dois espaços, poderemos nos referir ao operador morfológico por quaisquer das duas representações. Por exemplo, podemos falar de um W -operador $\psi : L^W \rightarrow L$.

2.6 Projeto de operadores sujeitos a restrições

Uma das desvantagens do projeto automático de operadores é a sensibilidade à quantidade de dados de treinamento. O projeto estatístico baseado somente em dados de treinamento pode exigir uma grande quantidade de dados de treinamento se as imagens possuem grande variedade de formas com distribuições sem massa de probabilidade concentrada. Para resolver este problema podem ser utilizadas restrições no projeto de operadores, por meio de uma sub-família da família dos operadores aceitáveis. Estas sub-famílias são definidas por meio de propriedades que tem que ser válidas para os operadores.

Definição 2.25 *Chamamos de Ψ_W ao espaço de W -operadores,*

Um exemplo de restrição é exigir que os operadores sejam crescentes (i.e., $X \subseteq Y \Rightarrow \psi(X) \subseteq \psi(Y)$) [39]. Outra possibilidade é exigir, para operadores binários, fixação do valor associado a algumas configurações, o que é chamado de **restrição independente** [72].

Qualquer restrição vai diminuir o espaço de operadores e, portanto, se for bem definida, diminuir o erro de estimação, necessitando menor quantidade de dados de treinamento para atingir um bom resultado no projeto automático. Deve se considerar que no uso de restrições, o projeto automático está estimando o operador ótimo dentro da restrição, que pode ser diferente do operador não restrito ótimo e, portanto, ter um erro maior que ele. Se essa diferença é muito grande, o ganho com a diminuição no erro de estimação pode ser anulado pela perda com o incremento do erro do operador ótimo estimado. Este balanço entre erro de estimação e o erro do operador ótimo é o ponto chave a ser considerado no projeto de operadores sob restrições.

Seja $\mathbf{Q} \subset \Psi_W$ uma restrição, e sejam ψ_{opt} e ψ_c os operadores ótimos em Ψ_W e \mathbf{Q} , respectivamente. Se $\epsilon(\psi)$ é a medida de erro usada (por exemplo MSE ou MAE), então $\epsilon(\psi_c) \geq \epsilon(\psi_{opt})$, e definimos como **custo da restrição** a diferença $\Delta_{\mathbf{Q}} = \epsilon(\psi_c) - \epsilon(\psi_{opt})$.

Aqui vamos supor que as técnicas de estimação são consistentes tanto para operadores em Ψ_W como para \mathbf{Q} . Neste caso, uma amostra de N exemplos permite estimar os dois operadores ótimos. Sejam $\psi_{N,c}$ o estimador de ψ_c e ψ_N o estimador de ψ_{opt} . O erro do estimador pode ser decomposto como a soma do erro do operador ótimo mais o erro de estimação,

$$\begin{aligned} \epsilon(\psi_{N,c}) &= \epsilon(\psi_c) + \Delta(\psi_{N,c}, \psi_c) \\ &= \epsilon(\psi_{opt}) + \Delta_{\mathbf{Q}} + \Delta(\psi_{N,c}, \psi_c) \\ \epsilon(\psi_N) &= \epsilon(\psi_{opt}) + \Delta(\psi_N, \psi_{opt}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como as amostras são aleatórias, estamos interessados no erro médio sobre todas as possíveis amostras de tamanho N , $E[\epsilon(\psi_{N,c})]$ e $E[\epsilon(\psi_N)]$, dados por

$$\begin{aligned} E[\epsilon(\psi_{N,c})] &= \epsilon(\psi_{opt}) + \Delta_{\mathbf{Q}} + E[\Delta(\psi_{N,c}, \psi_c)] \\ E[\epsilon(\psi_N)] &= \epsilon(\psi_{opt}) + E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt})] \end{aligned} \quad (2.9)$$

A restrição é considerada vantajosa se a diferença entre os erros de estimação, com e sem restrição, supera a diferença dos erros dos correspondentes operadores ótimos, isto é

$$\begin{aligned} E[\epsilon(\psi_{N,c})] &\leq E[\epsilon(\psi_N)] \\ \Delta_{\mathbf{Q}} + E[\Delta(\psi_{N,c}, \psi_c)] &\leq E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt})] \\ \Delta_{\mathbf{Q}} &\leq E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt})] - E[\Delta(\psi_{N,c}, \psi_c)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definir uma boa restrição significa encontrar uma restrição onde a desigualdade é válida para a quantidade N de amostras a serem utilizadas. Isto vai depender da aplicação considerada.

Capítulo 3

Envelope

3.1 Introdução

A técnica clássica para projetar operadores morfológicos é baseada em heurística: o operador morfológico é construído a partir da concatenação, união, intersecção e negação de erosões e dilatações, no contexto da linguagem formal chamada de *linguagem morfológica*. O conhecimento do pesquisador é aplicado na decomposição do problema em sub-problemas e na representação desta decomposição na linguagem morfológica. Esta tarefa pode não ser simples, mesmo para um especialista em morfologia matemática. A complexidade do projeto depende do problema e do grau de exatidão desejado.

Por outro lado, o projeto automático de operadores morfológicos sofre do problema da quantidade de exemplos de treinamento. Quanto maior o tamanho da janela, melhor é o operador ótimo que pode ser obtido, mas também é maior a quantidade de exemplos necessários para treinar o operador com um nível de precisão desejável. Uma forma de diminuir o erro de estimação no projeto automático de operadores e, portanto, a necessidade de grandes amostras, é usando conhecimento a priori. O conhecimento algébrico a priori impõe restrições estruturais nos operadores como, por exemplo, restringir os operadores projetados a um sub-espaço do espaço de operadores.

Em muitos casos de filtragem de ruído, é factível projetar heurísticamente filtros alternados seqüenciais [69] que têm um bom desempenho na filtragem. As vezes funcionam tão bem seqüências de abertura-fechamento como as seqüências de fechamento-abertura [7], e é válido se perguntar qual dos dois é a melhor, pois a primeira costuma dar um resultado maior do que o desejado e a segunda costuma dar um resultado menor do que o desejado. Se os dois operadores são bem especificados, podemos ter muita certeza que o operador ótimo vai estar num ponto intermediário entre eles e, nesse caso, isto pode servir como conhecimento a priori, definindo como sub-espaço de operadores o intervalo definido pelos dois operadores.

No caso geral, a restrição estará definida por dois operadores α e β tais que $\alpha \leq \beta$. O par (α, β) é chamado de *Envelope* e é a parte humana do processo, ou o conhecimento a priori usado para melhorar a estimação estatística do operador ótimo.

3.2 Restrição por Envelope

Algumas restrições podem ser definidas por um par de operadores que delimitam a família de operadores aceitáveis para o projeto automático. A restrição vai estar definida por um intervalo no reticulado dos operadores portanto, estes dois operadores tem que ser tais que determinem um intervalo não vazio.

Definição 3.1 *Sejam $D = L^W$ o espaço de configurações e L^D o espaço de operadores morfológicos munido da estrutura de reticulado com a desigualdade \leq , um **Envelope** é um par (α, β) de operadores $\alpha, \beta \in L^D$ com $\alpha \leq \beta$.*

Pela propriedade $\alpha \leq \beta$, o intervalo $[\alpha, \beta] = \{\psi : \alpha \leq \psi \leq \beta\}$ é não vazio pois pelo menos α e β estão nele.

Definição 3.2 *Uma restrição por Envelope $\mathbf{Q}_{\alpha, \beta} \subseteq L^D$ e definida por*

$$\mathbf{Q}_{\alpha, \beta} = [\alpha, \beta] = \{\psi : \alpha \leq \psi \leq \beta\}$$

*Os elementos de $\mathbf{Q}_{\alpha, \beta} \subseteq L^D$ são chamados de **operadores restritos por Envelope***

No caso de operadores binários, existe uma equivalência direta entre as restrições por Envelope e as *restrições independentes*. Neste caso, o espaço de operadores L^D , com $L = \{0, 1\}$ e $D = \{0, 1\}^W$ é isomorfo á coleção $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ de coleções de subconjuntos de W .

Definição 3.3 *Uma restrição independente é uma sub-coleção $\mathbf{Q} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ tal que existem duas coleções $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(W)$ tais que $X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \in \mathcal{K}, \forall \mathcal{K} \in \mathbf{Q}$ e $X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow X \notin \mathcal{K}, \forall \mathcal{K} \in \mathbf{Q}$*

Proposição 3.4 *Seja $\mathbf{Q} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ uma restrição independente, então existem um par de operadores (α, β) tais que, para quaisquer $\psi \in L^D$, $\mathcal{K}(\psi) \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow \alpha \leq \psi \leq \beta$. Em particular, $\mathcal{K}((\psi \wedge \beta) \vee \alpha) \in \mathbf{Q}$.*

Dem.: *Definimos α e β através dos respectivos núcleos*

$$\mathcal{K}(\alpha) = \mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(W) : \mathbf{x} \in \mathcal{K}, \forall \mathcal{K} \in \mathbf{Q}\}$$

e

$$\mathcal{K}(\beta) = \mathcal{B}^c = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(W) : \mathbf{x} \notin \mathcal{K}, \forall \mathcal{K} \in \mathbf{Q}\}^c$$

onde o complemento é relativo a $\mathcal{P}(W)$. Vamos provar agora que $\mathcal{K}(\psi) \in \mathbf{Q} \Rightarrow \alpha \leq \psi \leq \beta$. Primeiro, $\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\alpha) \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{K}, \forall \mathcal{K} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{K}(\psi)$. Como isto é valido para quaisquer $\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\alpha)$, $\alpha \leq \psi$. Segundo, $\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\psi) \Rightarrow \mathbf{x} \notin \mathcal{K}^c(\beta) \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{K}(\beta)$. Agora, vamos provar que $\alpha \leq \psi \leq \beta \Rightarrow \mathcal{K}(\psi) \in \mathbf{Q}$. Temos que $\alpha \leq \psi \leq \beta \Rightarrow \mathcal{K}(\alpha) \subseteq \mathcal{K}(\psi) \subseteq \mathcal{K}(\beta)$. Pela primeira inclusão, $\mathcal{K}(\psi) \supseteq \mathcal{A}$ e, pela segunda inclusão, $\mathcal{K}(\psi) \subseteq \mathcal{B}^c$. Portanto, temos $\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\psi) \in \mathbf{Q}$. Finalmente, $\mathcal{K}((\psi \wedge \beta) \vee \alpha) \in \mathbf{Q}$ é consequência imediata das inequações $\alpha \leq (\psi \wedge \beta) \vee \alpha \leq \beta$.

■

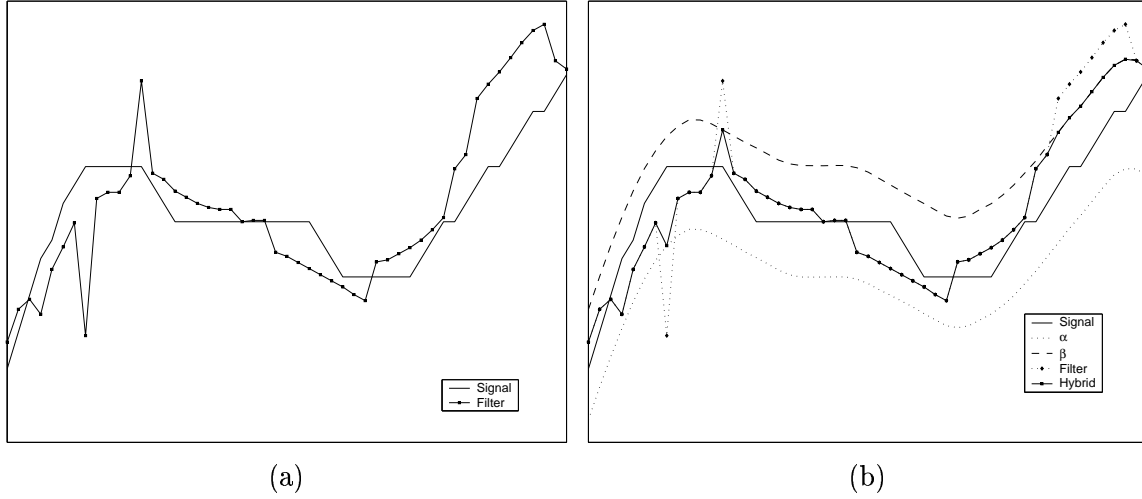


Figura 3.1: Exemplo de envelope

O método utilizado para treinar um operador restrito por Envelope é aplicando uma *projeção* ao operador treinado ψ_{opt} .

Definição 3.5 Seja $\psi \in L^D$ um operador morfológico, e seja $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$ uma restrição por Envelope, a projeção ψ_{con} do operador ψ na restrição $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$ é dada por, para todo $\mathbf{x} \in D$,:

$$\psi_{con}(\mathbf{x}) = (\psi(\mathbf{x}) \vee \alpha(\mathbf{x})) \wedge \beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha(\mathbf{x}) & : \psi(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x}) \\ \psi(\mathbf{x}) & : \alpha(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \leq \beta(\mathbf{x}) \\ \beta(\mathbf{x}) & : \psi(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x}) \end{cases} . \quad (3.1)$$

Pela definição, $\alpha \leq \psi_{con} \leq \beta$ e, portanto, $\psi_{con} \in \mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$ e é um operador restrito por Envelope.

A Figura 3.1 (a) mostra um sinal e a estimação desse sinal (por exemplo uma filtragem de uma realização ruidosa do sinal). A Figura 3.1 (b) mostra o resultado de aplicar um Envelope, definido por α e β , ao filtro projetado. Neste caso podemos ver como, usando um Envelope bem definido, o sinal resultante do operador restrito por Envelope está mais próximo do sinal ideal.

Nas Figuras 3.2 e 3.3 podemos ver um exemplo de *Envelope binário*. O Envelope é definido por $\alpha = \phi_B \gamma_B$ e $\beta = \gamma_B \phi_B$, onde ϕ e γ são o fechamento e a abertura morfológica [7], respectivamente, e B é um elemento estruturante vertical de 3 pontos.

A Figura 3.2 mostra: (a) uma realização de uma imagem com ruído; (b) o resultado de aplicar um operador ψ projetado estatisticamente a partir de outros pares de imagens ideal-ruidosa; (c) o resultado de aplicar $\psi \wedge \beta$, usando só a parte superior do Envelope; e (d) o resultado de aplicar o operador restrito por Envelope $(\psi \wedge \beta) \vee \alpha$. O operador ψ devolve uma imagem com 14 pontos errados, e $(\psi \wedge \beta) \vee \alpha$ só tem 6.

A Figura 3.3 mostra o resultado de aplicar somente os operadores projetados heurísticamente: (a) a imagem com ruído; (b) o resultado de aplicar somente α ; (c) o resultado de aplicar somente β ; e (d) o resultado de aplicar o *Envelope* sobre a identidade i , $(i \wedge \beta) \vee \alpha$. Nos três casos, a quantidade de pontos de erro são 9, 12 e 13, respectivamente.

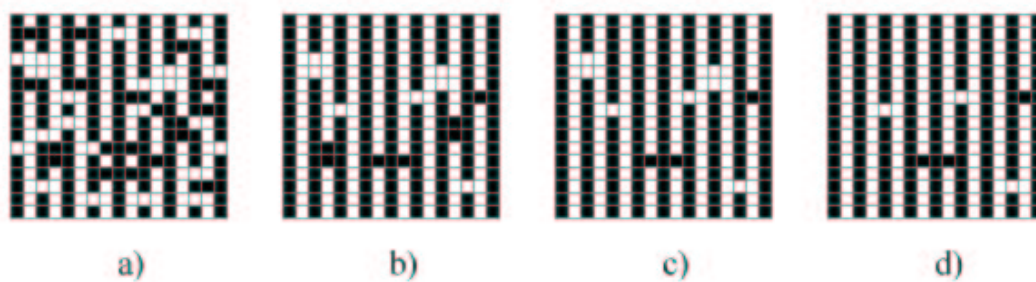


Figura 3.2: Envelope no operador projetado estatisticamente. (a) Imagem com ruído. (b) Operador projetado estatisticamente ψ . (c) Envelope superior $\psi \wedge \beta$. (d) Envelope $(\psi \wedge \beta) \vee \alpha$.

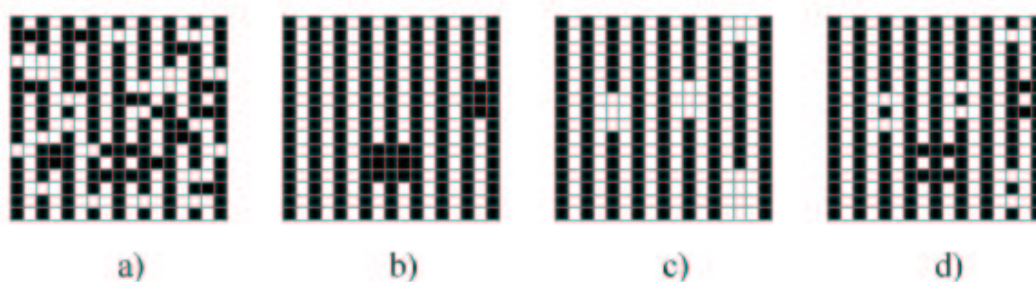


Figura 3.3: Aplicação direta do filtro projetado heurísticamente. (a) Imagem com ruído. (b) Operador de Abertura-Fechamento α . (c) Operador de Fechamento-Abertura β . (d) Envelope $(i \wedge \beta) \vee \alpha$.

3.3 Projeto estatístico de operadores restritos por Envelope

A definição de uma restrição tem que estar associada a uma técnica prática de estimação (ou projeto estatístico a partir de amostras) do operador ótimo na restrição. Isto já foi realizado, por exemplo, no caso de filtros binários crescentes [39, 40]. A aplicação de Envelope em operadores projetados pode ser considerada como um problema de projeto estatístico do operador ótimo restrito (por Envelope).

No projeto de operadores restritos por envelope, a metodologia usada é estimar o operador ótimo ψ_{opt} não restrito por meio de um estimador ψ_N e projetá-lo na restrição usando a equação $\psi_{N-c} = (\psi_N \wedge \beta) \vee \alpha$. O estimador ψ_N (sem restrições) é obtido através de algum algoritmo de estimação, a partir de um conjunto de N pares de exemplos. Entre estes algoritmos podemos nomear o ISI e as árvores de decisão [73, 74, 35, 75]. Todos estes algoritmos são consistentes, isto é, para uma amostra suficientemente grande, o operador estimado está suficientemente próximo do operador restrito ótimo.

Se a estimação é perfeita, então $\psi_N = \psi_{opt}$, e neste caso queremos também que ψ_{N-c} seja o operador ótimo na restrição. Neste caso, pela definição de projeção, $\psi_{N-c} = (\psi_N \wedge \beta) \vee \alpha = (\psi_{opt} \wedge \beta) \vee \alpha$. Portanto, ψ_{N-c} vai ser ótimo na restrição se e somente se a projeção do operador não restrito ótimo, $(\psi_{opt} \wedge \beta) \vee \alpha$ é ótimo na restrição.

A seguinte proposição mostra que na restrição por envelope esta afirmação é verdadeira, para quaisquer envelope (α, β)

Proposição 3.6 *Seja $\psi_{opt-c} = (\psi_{opt} \wedge \beta) \vee \alpha$. Para qualquer operador $\psi \in \mathbf{Q}_{\alpha, \beta}$, temos $\Delta(\psi, \psi_{opt-c}) \geq 0$, isto é, a projeção do operador não restrito ótimo é ótimo na restrição.*

Dem.: *Se $\psi \in \mathbf{Q}_{\alpha, \beta}$ e $\psi_{opt}(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})$, então $\psi_{opt}(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$ e, portanto,*

$$(\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 > (\alpha(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2.$$

Similarmente, se $\psi \in \mathbf{Q}_{\alpha, \beta}$ e $\psi_{opt}(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})$, então $\psi_{opt}(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{x})$ e, portanto,

$$(\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 > (\beta(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2.$$

Como a diferença de erro pode ser separada em duas partes, é válido

$$\Delta(\psi, \psi_{opt-c}) = \Delta(\psi, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}).$$

Usando as três desigualdades anteriores, podemos provar então que o incremento em erro $\Delta(\psi, \psi_{opt-c})$ de usar ψ em lugar de ψ_{opt-c} satisfaz

$$\begin{aligned}
\Delta(\psi, \psi_{opt-c}) &= \sum_{\mathbf{x} \in D} (\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) - \sum_{\mathbf{x} \in D} (\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in D} (\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) \\
&\quad - \sum_{\psi_{opt}(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})} (\alpha(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) - \sum_{\psi_{opt}(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})} (\beta(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) \\
&= \sum_{\psi_{opt}(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})} (\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) + \sum_{\alpha(\mathbf{x}) < \psi_{opt}(\mathbf{x}) < \beta(\mathbf{x})} (\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) \\
&\quad + \sum_{\psi_{opt}(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})} (\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) \\
&\quad - \sum_{\psi_{opt}(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})} (\alpha(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) - \sum_{\psi_{opt}(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})} (\beta(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) \\
&= \sum_{\psi_{opt}(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})} \left[(\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 - (\alpha(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 \right] P(x) \\
&\quad + \sum_{\alpha(\mathbf{x}) < \psi_{opt}(\mathbf{x}) < \beta(\mathbf{x})} (\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 P(x) \\
&\quad + \sum_{\psi_{opt}(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})} \left[(\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 - (\beta(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x}))^2 \right] P(x) \\
&\geq 0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto, o incremento de erro é não negativo, e o operador ψ_{opt-c} tem erro menor que qualquer operador $\psi \in \mathbf{Q}_{\alpha, \beta}$ e, portanto, é ótimo na restrição. ■

A propriedade anterior mostra a validade de estimar o operador restrito ótimo através da projeção do estimador não restrito ótimo.

3.4 Análise do erro

Sejam ψ_{opt} , ψ_{opt-c} , ψ e ψ_c respectivamente os operadores não restrito ótimo, restrito ótimo, projetado e restrito projetado, um ponto importante a analisar é se é melhor usar o operador restrito ou não. Para isto, vamos definir a *vantagem* de usar a restrição para um operador:

Definição 3.7 A vantagem A_ψ de aplicar o operador restrito ψ_c em lugar do operador ψ é:

$$A_\psi(\alpha, \beta) = \Delta(\psi, \psi_c) = MSE(\psi) - MSE(\psi_c)$$

Se a vantagem é positiva ($A_\psi \geq 0$) então o erro do operador restrito projetado ψ_c é menor que o erro do operador projetado ψ e, portanto, é melhor usar ψ_c . Se a vantagem é negativa ($A_\psi < 0$), então o erro de ψ_c é maior que o erro de ψ e é melhor não usar a restrição.

O erro de ψ_c pode ser computado como a soma de três partes: (a) o erro do operador não restrito ótimo; (b) o incremento de erro entre o operador não restrito ótimo e o operador restrito ótimo; e (c) o incremento de erro entre o operador restrito ótimo e o operador restrito projetado. Se utilizamos o MSE como medida de erro, então

$$MSE(\psi_c) = MSE(\psi_{opt}) + \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) + \Delta(\psi_c, \psi_{opt-c})$$

e, da mesma maneira

$$MSE(\psi) = MSE(\psi_{opt}) + \Delta(\psi, \psi_{opt})$$

e, portanto, a vantagem pode ser escrita como

$$\begin{aligned} A_\psi &= MSE(\psi) - MSE(\psi_c) \\ &= \left(MSE(\psi_{opt}) + \Delta(\psi, \psi_{opt}) \right) - \left(MSE(\psi_{opt}) + \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) + \Delta(\psi_c, \psi_{opt-c}) \right) \\ &= \left(\Delta(\psi, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_c, \psi_{opt-c}) \right) - \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Definição 3.8 Os termos $\Delta(\psi, \psi_{opt})$ e $\Delta(\psi_c, \psi_{opt-c})$ são a precisão dos operadores ψ e ψ_c respectivamente, e o termo $\Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt})$ é o incremento de erro devido à restrição.

Portanto, a vantagem da restrição está dada por dois factores: (a) o incremento em precisão (ou diferença entre as precisões); e (b) o incremento de erro devido à restrição. Quando maior é o incremento de erro devido à restrição, maior tem que ser o incremento de precisão para obter uma vantagem positiva.

Esta fórmula mostra que a especificação de uma restrição tem que balancear dois aspectos básicos: se a restrição é muito forte (ou seja, o espaço é pequeno) a estimação dentro da restrição pode ser muito boa, e portanto o incremento de precisão pode ser alto, mas também pode ser alto o incremento de erro devido à restrição, anulando o ganho em precisão.

No sentido inverso, se a restrição é muito fraca, o incremento de erro devido à restrição pode ser pequeno, mas ao mesmo tempo pode não existir muita diferença entre as precisões, e a contribuição positiva (incremento em precisão) pode ainda ser menor que a contribuição negativa (incremento de erro).

A medida do ganho de usar uma restrição sobre um operador ψ está dada pela *vantagem* A_ψ . No caso da restrição por envelope, definido pelo envelope (α, β) , a vantagem é chamada de $A_\psi(\alpha, \beta)$, e o envelope é vantajoso para o operador ψ se $A_\psi(\alpha, \beta) \geq 0$. Os operadores restritos são $\psi_{opt-c} = (\psi_{opt} \wedge \beta) \vee \alpha$ e $\psi_c = (\psi \wedge \beta) \vee \alpha$.

Recordamos aqui que, pela Eq. 3.3, a vantagem é computada como

$$A_\psi = \left(\Delta(\psi, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_c, \psi_{opt-c}) \right) - \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) \quad (3.4)$$

A seguinte proposição prova que, para a restrição por envelope, o incremento em precisão é sempre positivo, isto é, a precisão é sempre maior no envelope que no espaço completo.

Proposição 3.9 Para qualquer operador $\psi \in L^D$, $\Delta(\psi, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_c, \psi_{opt-c}) \geq 0$

Dem.: Dado que

$$\Delta(\psi_c, \psi_{opt}) = \Delta(\psi_c, \psi_{opt-c}) + \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}),$$

temos

$$\begin{aligned} \Delta(\psi, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_c, \psi_{opt-c}) &= \Delta(\psi, \psi_{opt}) - [\Delta(\psi_c, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt})] \\ &= \Delta(\psi, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_c, \psi_{opt}) + \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in D} \left([\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 - [\psi_c(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 \right. \\ &\quad \left. + [\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 \right) P(x). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agora, podemos dividir o espaço D em 7 partes, $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_7$, dependendo da posição de $\psi_{opt}(\mathbf{x})$ e $\psi(\mathbf{x})$ com respeito a $\alpha(\mathbf{x})$ e $\beta(\mathbf{x})$, e analisar a equação 3.5 para cada parte D_i .

Para cada $\mathbf{x} \in D$, seja

$$\begin{aligned} \Delta_1(\mathbf{x}) &= [\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 \\ \Delta_2(\mathbf{x}) &= [\psi_c(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 \\ \Delta_3(\mathbf{x}) &= [\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 \\ \Delta(\mathbf{x}) &= \Delta_1(\mathbf{x}) - \Delta_2(\mathbf{x}) + \Delta_3(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

1. $\psi(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt}(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})$

Neste caso, $\psi_c(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})$, portanto, $\Delta_2(\mathbf{x}) = \Delta_3(\mathbf{x})$ e $\Delta(\mathbf{x}) \geq 0$.

2. $\psi(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})$ e $\alpha(\mathbf{x}) \leq \psi_{opt}(\mathbf{x}) \leq \beta(\mathbf{x})$

Neste caso, $\psi_c(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) = \psi_{opt}(\mathbf{x})$, portanto $\Delta_3(\mathbf{x}) = 0$ e $\Delta(\mathbf{x})$ passa a ser

$$\Delta(\mathbf{x}) = [\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 - [\alpha(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2$$

Pelas condições deste caso, temos $\psi(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x}) \leq \psi_{opt}(\mathbf{x})$ e, portanto, $[\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 > [\alpha(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2$ e $\Delta(\mathbf{x}) \geq 0$

3. $\psi(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt}(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})$

Neste caso $\psi_c(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})$, portanto $\Delta(\mathbf{x})$ passa a ser

$$\Delta(\mathbf{x}) = [\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 - [\alpha(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 + [\beta(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2$$

Pelas condições deste caso, temos $\psi(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x}) < \beta(\mathbf{x}) \leq \psi_{opt}(\mathbf{x})$ e, portanto, $[\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 > [\alpha(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2$ e $\Delta(\mathbf{x}) \geq 0$

4. $\alpha(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \leq \beta(\mathbf{x})$, qualquer valor de $\psi_{opt}(\mathbf{x})$

Neste caso, $\psi_c(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$, portanto $\Delta_1(\mathbf{x}) = \Delta_2(\mathbf{x})$ e $\Delta(\mathbf{x}) \geq 0$.

5. $\psi(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt}(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x})$

Neste caso $\psi_c(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})$, portanto $\Delta(\mathbf{x})$ passa a ser

$$\Delta(\mathbf{x}) = [\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 - [\beta(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 + [\alpha(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2$$

Pelas condições deste caso, temos $\psi_{opt}(\mathbf{x}) < \alpha(\mathbf{x}) < \beta(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$, portanto $[\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 > [\beta(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2$ e $\Delta(\mathbf{x}) \geq 0$

6. $\psi(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})$ e $\alpha(\mathbf{x}) \leq \psi_{opt}(\mathbf{x}) \leq \beta(\mathbf{x})$

Neste caso, $\psi_c(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) = \psi_{opt}(\mathbf{x})$, portanto $\Delta_3(\mathbf{x}) = 0$ e $\Delta(\mathbf{x})$ passa a ser

$$\Delta(\mathbf{x}) = [\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 - [\beta(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2$$

Pelas condições deste caso, temos $\psi_{opt}(\mathbf{x}) \leq \beta(\mathbf{x}) < \psi(\mathbf{x})$ e, portanto, $[\psi(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2 > [\beta(\mathbf{x}) - \psi_{opt}(\mathbf{x})]^2$ e $\Delta(\mathbf{x}) \geq 0$

7. $\psi(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt}(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x})$

Neste caso, $\psi_c(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})$ e $\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})$, portanto, $\Delta_2(\mathbf{x}) = \Delta_3(\mathbf{x})$ e $\Delta(\mathbf{x}) \geq 0$.

■

A importância deste resultado está no fato de mostrar que, no caso da restrição por envelope, sempre se tem diminuição do erro de estimação. Por esta razão, se o filtro ótimo está dentro do envelope, isto é, se $\alpha \leq \psi_{opt} \leq \beta$, então podemos provar:

Proposição 3.10 Se $\alpha \leq \psi_{opt} \leq \beta$, então $A_\psi(\alpha, \beta) \geq 0$ para todo operador $\psi \in L^D$.

Dem.: Se $\alpha \leq \psi_{opt} \leq \beta$ então $\psi_{opt-c} = (\psi_{opt} \wedge \beta) \vee \alpha = \psi_{opt}$ e, portanto, $\Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) = 0$. Assim, para quaisquer $\psi \in L^D$, temos

$$A_\psi(\alpha, \delta) = \left(\Delta(\psi, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_c, \psi_{opt-c}) \right) \geq 0$$

pela proposição anterior.

■

Este resultado diz que se o envelope é bem selecionado, então ele vai dar bom resultado para quaisquer operador ψ .

3.5 Exemplos de aplicação

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados práticos usando envelope, tanto para imagens binárias como níveis de cinza.

3.5.1 Correção de borramento de imagens

Esta aplicação mostra a correção de borramento aplicado a imagens geradas por um modelo Booleano aleatório [76] sobre um fundo de mudança suave. A função Booleana é formada colocando aleatoriamente funções primárias na imagem, e tomando o máximo de todas elas. A função aleatória primária é uma pirâmide com 16 níveis de cinza. A imagem resultante é adicionada a uma superfície com gradiente suave, para exigir mais do projeto estatístico. A superfície foi gerada selecionando 4 valores aleatórios nos cantos da imagem, (com o valor uniformemente selecionado no intervalo [0 50]), e gerando uma superfície suave que conecta os 4 pontos, usando interpolação por distância. No total

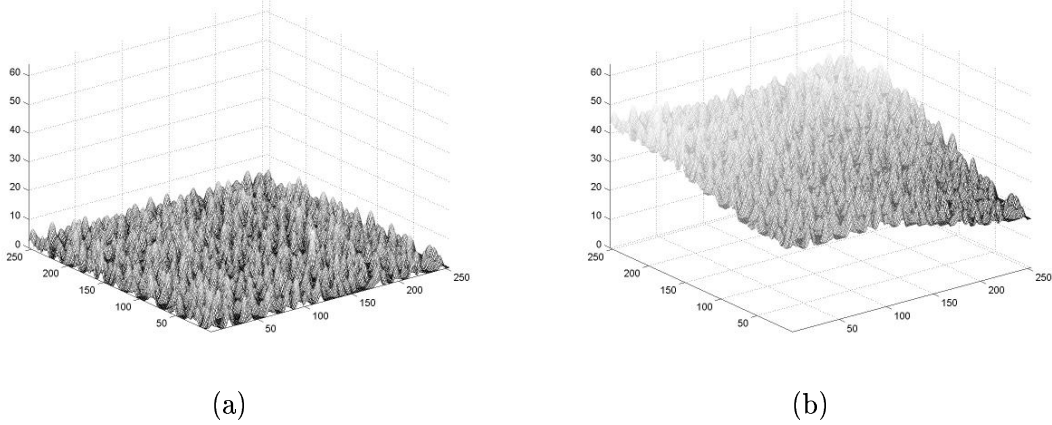


Figura 3.4: Superfície da função booleana, (a) imagem, (b) combinado com a superfície

1	2	1
2	3	2
1	2	1

Figura 3.5: Nucleo de convolução

foram geradas 20 imagens, 10 para treinar o operador de correção de borrimento e 10 para testar a efetividade dos operadores treinados.

A Figura 3.4 mostra uma realização das pirâmides e a adição da superfície. O borrimento foi gerado usando um núcleo de convolução mostrado na Figura 3.5. 10 pares de imagens original e borrada foram usados para projetar os operadores de correção de borrimento.

A Figura 3.6 (a) mostra uma parte de uma imagem original, e a Figura 3.6 (b) mostra um corte linear. A Figura 3.6 (c) mostra o borrimento da figura anterior, com o corte na Figura 3.6 (d)

O desempenho dos operadores Aperture, linear e Envelope foram analisados em função da quantidade de imagens usadas no treinamento (de 1 a 10). O operador envelope, Env_l , foi definido pelo envelope (α, β) dados por

$$\alpha(\mathbf{x}) = \psi_{lin}(\mathbf{x}) - 1 \quad (3.7)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \psi_{lin}(\mathbf{x}) + 1 \quad (3.8)$$

onde ψ_{lin} é o filtro linear ótimo com uma janela 9×9 . O operador Aperture foi projetado numa janela 3×3 com janela na escala de zinza $K = [-5, 5]$.

O segundo operador envelope, Env_r , foi definido pelo envelope (α, β) dado por

$$\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_B(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \delta_B(\mathbf{x}) \quad (3.10)$$

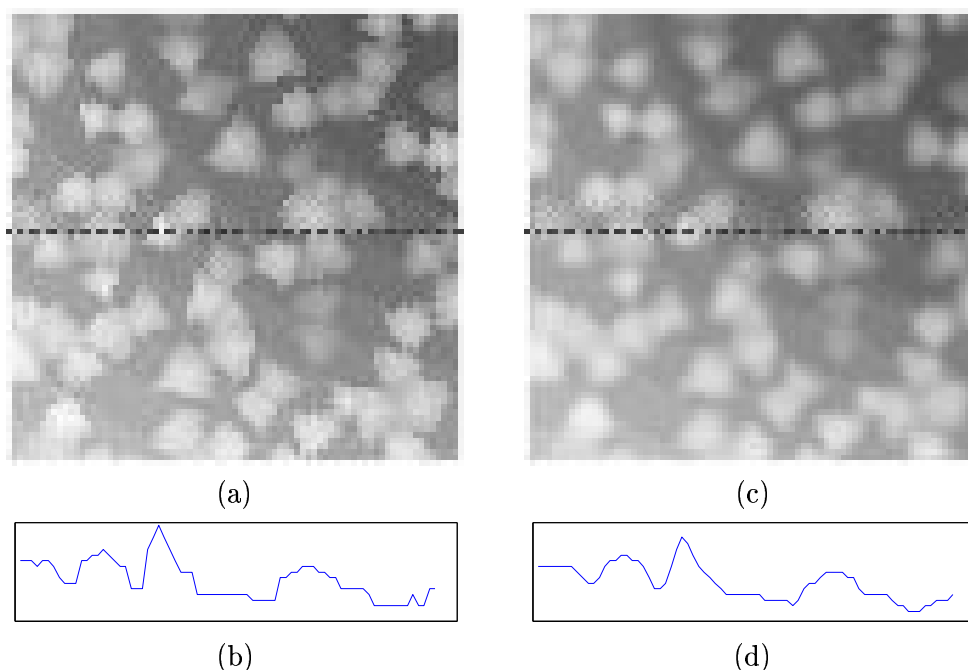


Figura 3.6: Imagem Booleana: (a) combinada; (b) seção; (c) emboçada; (d) seção

onde B é um elemento estruturante 3×3 .

A figura 3.7 mostra a media do MSE (medido nas 10 imagens de teste) dos operadores Aperture, linear e Envelope projetados. Os resultados confirmam a vantagem do envelope, sendo pequena para Env_r , mais muito maior para Env_l , mesmo quando usando 10 imagens de treinamento.

3.5.2 Detecção de bordas em imagens binárias com ruído

Aqui consideraremos o projeto de um operador binário para detecção de bordas em imagens binárias corrompidas com ruído pontual aleatório. Vamos comparar três diferentes técnicas para realizar a tarefa:

1. Aplicação de um operador projetado numa janela 3×3 , sem restrições, para detectar diretamente as bordas na imagem com ruído.
2. Aplicação de um operador projetado numa janela 3×3 , restrito por envelope, para eliminar o ruído, seguido de um detector de bordas heurístico.
3. Aplicação de um operador projetado numa janela 3×3 , restrito por envelope, para eliminar o ruído, seguido de um operador projetado para detectar bordas, sem restrições.

A primeira técnica é completamente estatística, enquanto a segunda e terceira combinam estatística com heurística, mostrando as vantagens de usar envelope.

As Figuras 3.8 (a) e Figuras 3.8 (b) mostram, respectivamente, realizações da imagem original e da imagem original com ruído,

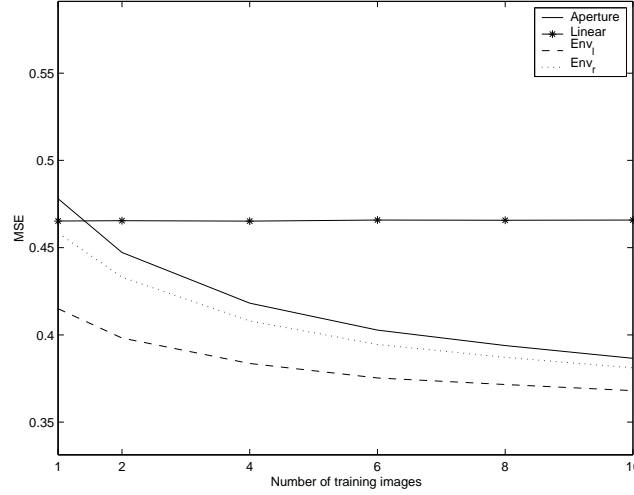


Figura 3.7: MSE para as imagens do modelo Booleano

As Figuras 3.9 (a) e Figuras 3.9 (b) mostram, respectivamente a imagem ideal (bordas) e a imagem obtida a partir da imagem com ruído usando o operador projetado pela técnica (1) usando 4 imagens de treinamento.

A Figura 3.10 (a) mostra o resultado da primeira etapa da técnica (2) sobre a imagem da Figura 3.8 (b). O operador restrito por envelope utilizado, φ , é obtido pela equação $\varphi = (\psi \wedge \beta) \vee \alpha$, onde $\alpha = \gamma_{B \oplus B} \phi_{B \oplus B} \gamma_{B \oplus B}$ e $\beta = \phi_{B \oplus B} \gamma_{B \oplus B} \phi_{B \oplus B}$, e γ denota fechamento, \oplus soma de Minkowsky, B é um elemento estruturante 3×3 , e ψ foi projetado estatisticamente numa janela 3×3 . O MAE de φ é de 0.0013. A Figura 3.10 (b) mostra o resultado final da técnica (2), aplicando o detector heurístico de bordas $i - \varepsilon_B$, onde i é o operador identidade.

Neste caso é evidente a vantagem de usar o Envelope, pela diminuição à metade do erro, mesmo usando uma janela menor para o treinamento do operador restrito por Envelope.

Para comparar o resultado da eliminação de ruído com e sem usar envelope, a Figura 3.11 mostra o resultado de aplicar um operador não restrito ψ , projetado para eliminar o ruído, aplicado na realização da imagem da Figura 3.8 (b). ψ foi projetado usando 4 imagens de treinamento, e a janela é uma cruz 3×3 dilatada por ela própria. O erro do operador foi estimado em 6 imagens, obtendo um MAE estimado de 0.0028.

Para a técnica (3), treinamos um operador não restrito ξ para detecção de bordas, numa janela 3×3 , usando 4 imagens de treinamento. O resultado de aplicar a composição $\xi\varphi$ na realização da Figura 3.8 (b) pode ser vista na Figura 3.12

Finalmente, o MAE dos três detectores de bordas é $\text{MAE}[\psi] = 0.0065$, $\text{MAE}[(i - \varepsilon_B)\varphi] = 0.0027$, $\text{MAE}[\xi\varphi] = 0.0024$.

Em resumo, definir um operador de detecção de bordas para imagens ruidosas, por métodos puramente heurísticos, é difícil, mas é muito simples definir uma restrição por envelope para o projeto estatístico.

Um ultimo exemplo mostra uma característica do projeto restrito por envelope: quando a quantidade de amostras é muito grande, a utilização da restrição pode ser desvantajosa. Para este exemplo

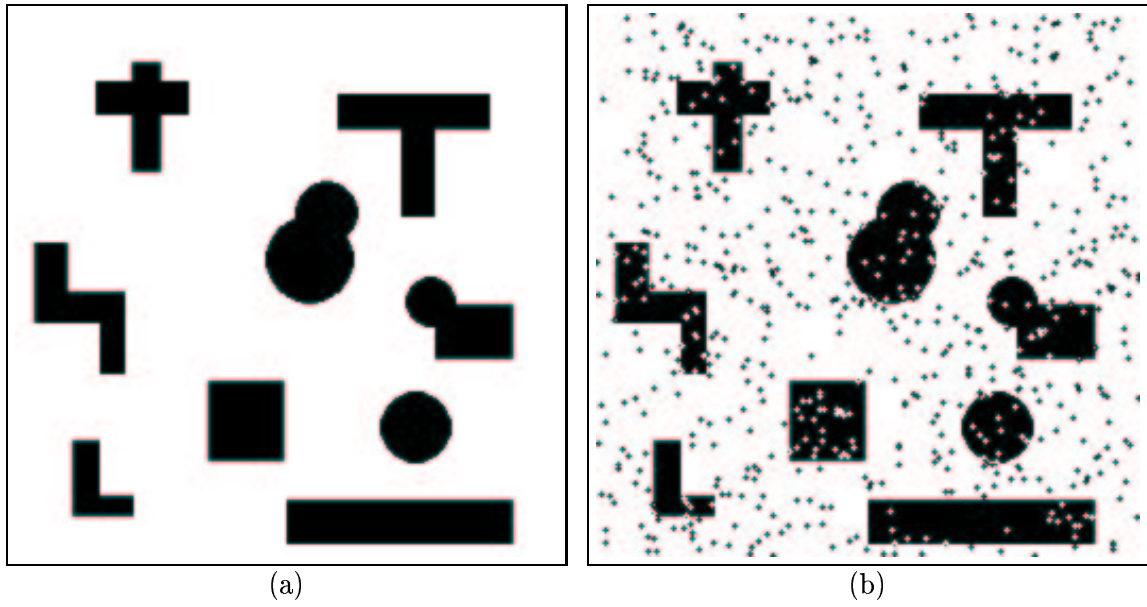


Figura 3.8: (a) Imagem original; (b) Imagem original com ruído

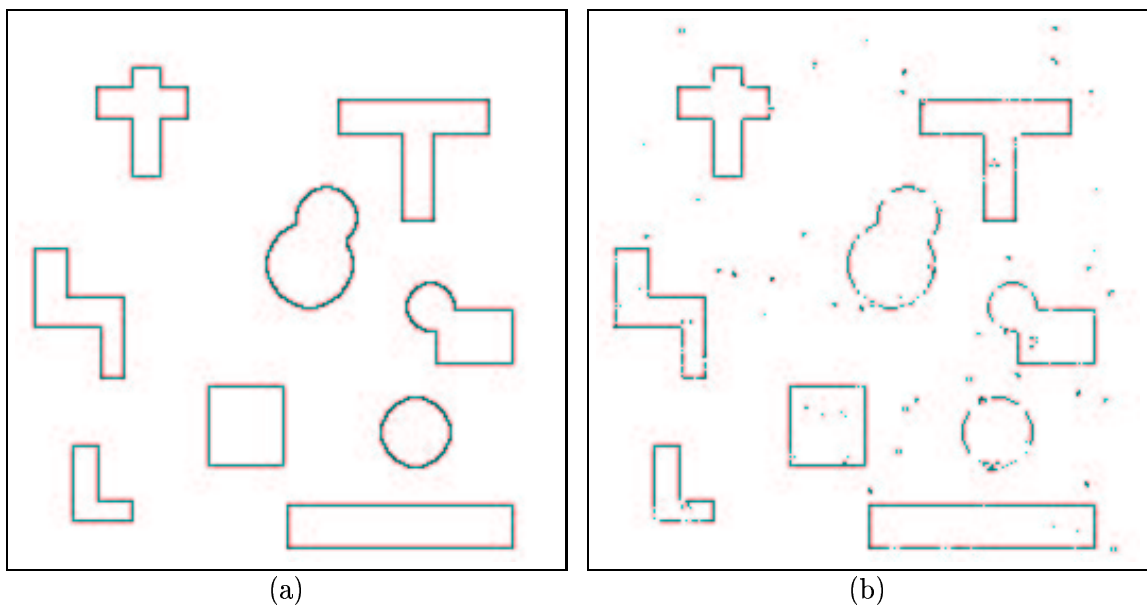


Figura 3.9: (a) Imagem ideal (bordas); (b) Resultado da técnica (1)

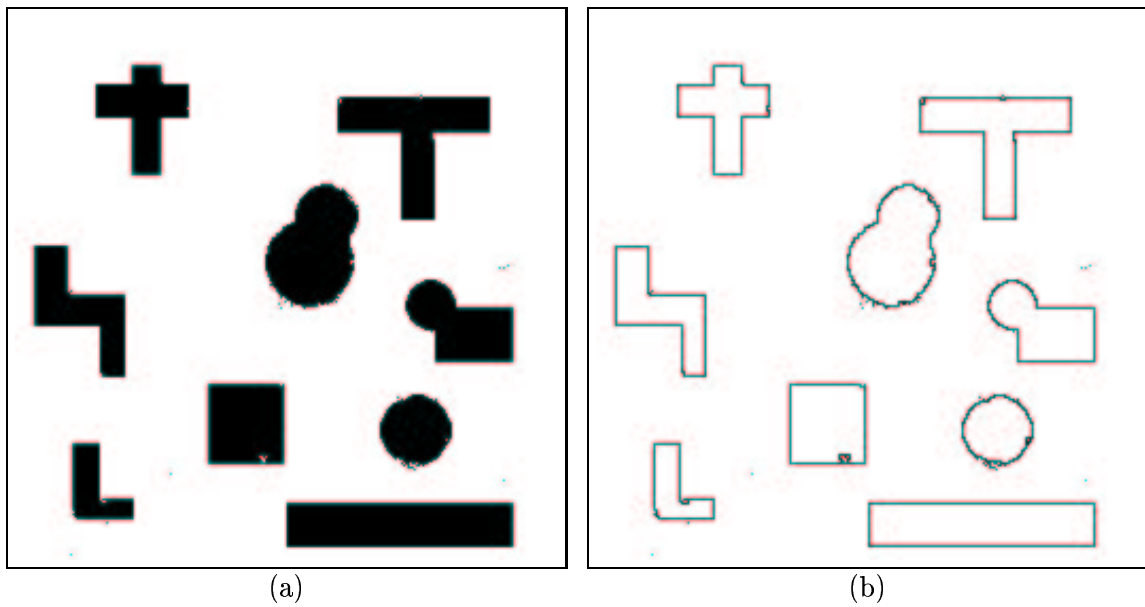


Figura 3.10: Técnica (2) : (a) Eliminação do ruído; (b) Detecção das bordas usando $(i - \varepsilon_B)\varphi$

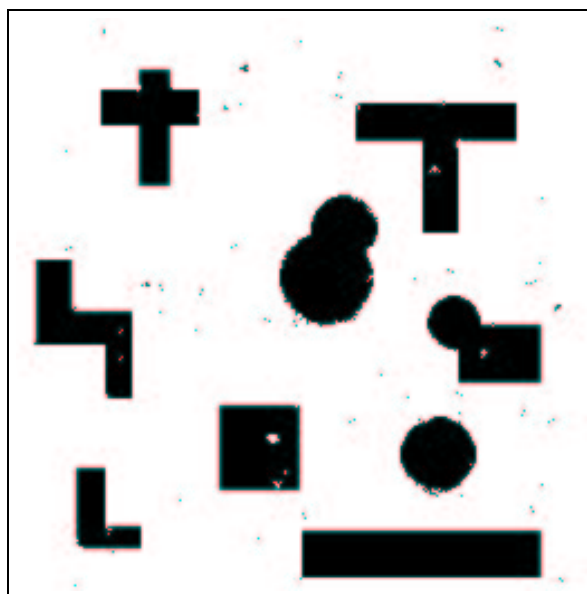


Figura 3.11: Eliminação de ruído sem usar envelope

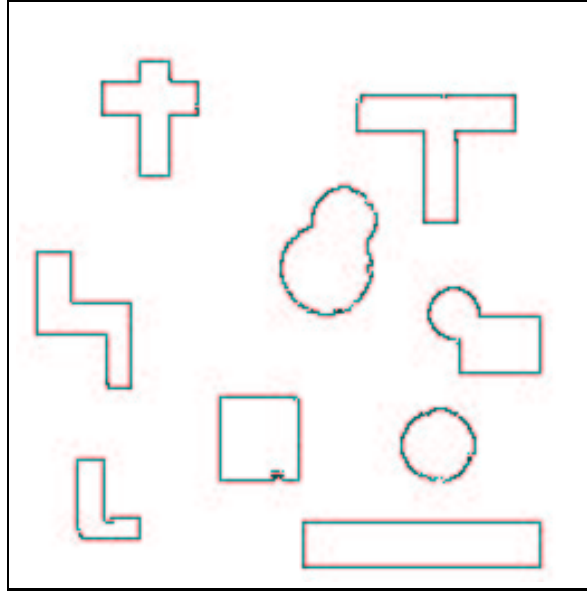


Figura 3.12: Técnica (3)

estimamos o erro da primeira etapa das técnicas 2 e 3, ou seja, a eliminação de ruído. Na Figura 3.13 podemos ver a evolução do erro com respeito à quantidade N de imagens de treinamento. Neste exemplo podemos perceber claramente como a restrição por Envelope funciona bem para poucas amostras, que é onde a estimação é pior, mas já não dá bons resultados quando a estimação melhora.

3.5.3 Identificação de Texturas

Outro experimento realizado foi o de detecção de texturas num mapa. Neste caso foi a de detecção de regiões do mapa marcadas por linhas, com qualquer orientação. A Figura 3.14 mostra uma imagem de um mapa, usado para os experimentos.

Uma parte desse mapa foi usado para treinar um operador morfológico. As imagens de treinamento podem ser vistas na Figura 3.15, onde estão a figura observada e a imagem ideal, esta última formada somente pelas linhas a detectar.

Para complicar um pouco o processo, as imagens foram rotacionadas em 45, 90, 135 e 180 graus, tanto para treinamento como para teste. Foi treinado um W -operador binário, pelo algoritmo ISI [77], usando uma janela de 4×4 . A Figura 3.16 mostra o resultado do operador treinado, sobre a imagem completa da Figura 3.14. Podemos ver que o resultado é satisfatório, mas perde algumas das linhas, e pega outros pontos que não pertencem à textura.

Para aplicar o envelope foi criado um operador β , que detecta as linhas, por eliminação de linhas que estão muito próximas umas das outras. Este operador tende a deixar passar mais que as linhas a serem reconhecidas e, portanto, vai ser usado como limitante superior do envelope. Neste caso não vai ser definido um limitante inferior, para simplificar um pouco o processo.

O operador β está definido por

$$\beta = \delta_B(\iota - \gamma_{B_3} \phi_{B_3} \gamma_{B_3} \gamma_{B_2} \phi_{B_2} \gamma_{B_2} \gamma_{B_1} \phi_{B_1} \gamma_{B_1} (\phi_{B_2} (\bigvee_i \phi_{L_i})))$$

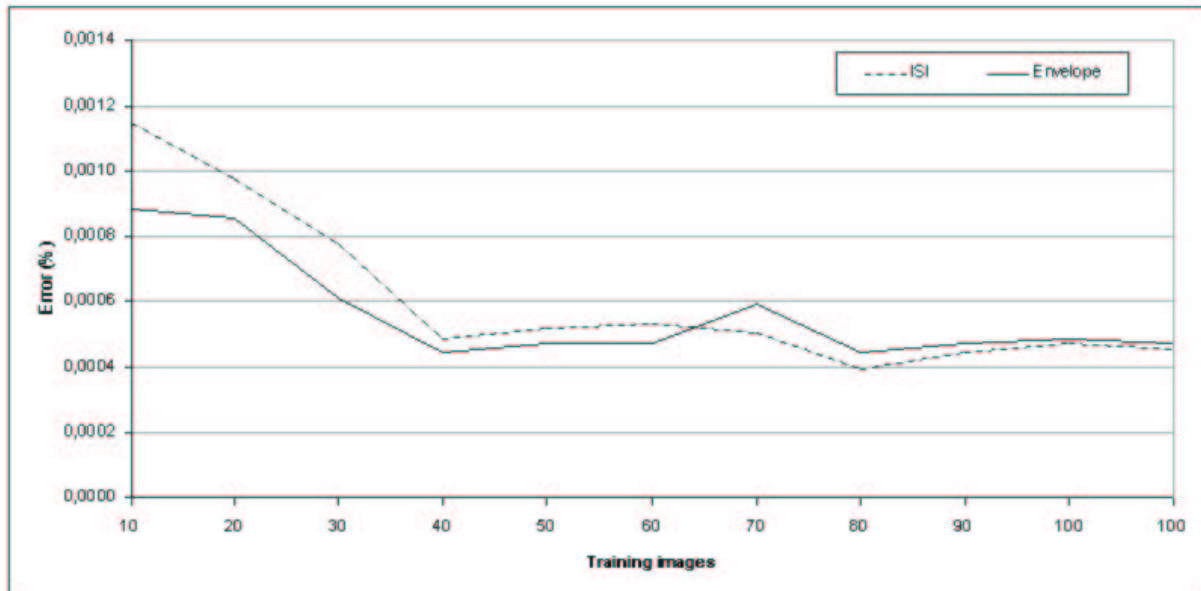


Figura 3.13: Erro em função da quantidade de amostras

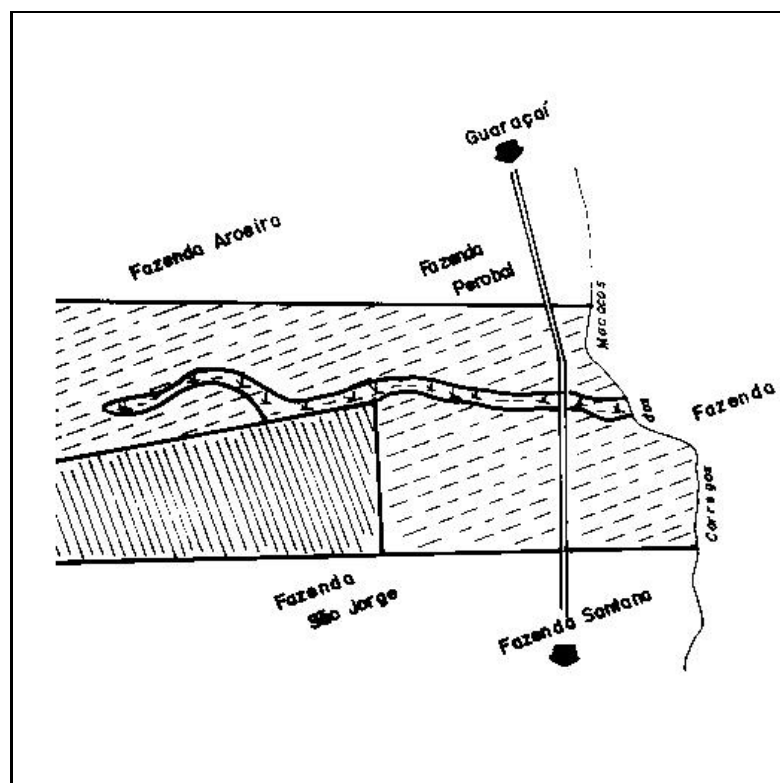


Figura 3.14: Imagem do mapa

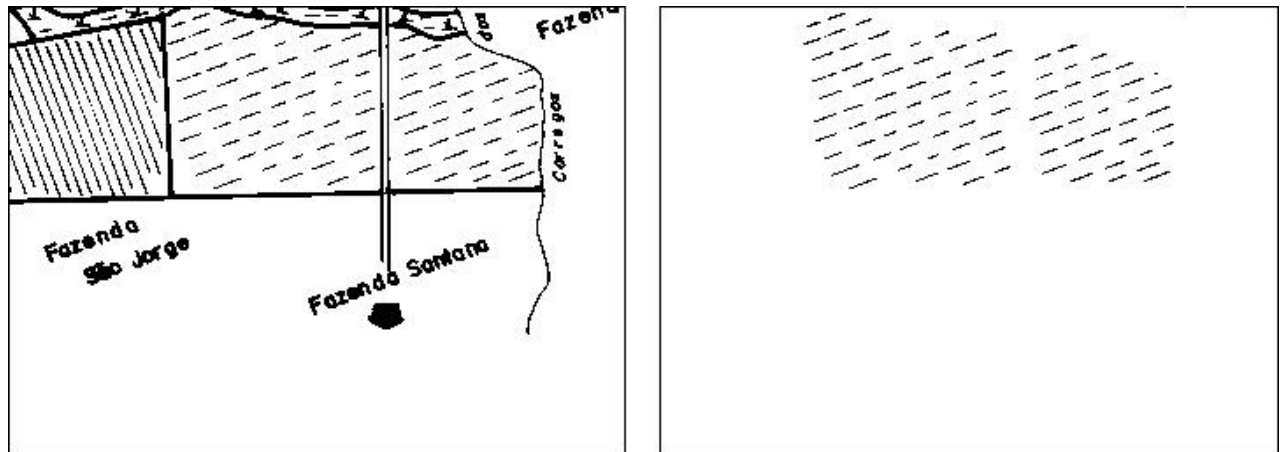


Figura 3.15: (a) Imagem observada; (b) Imagem ideal

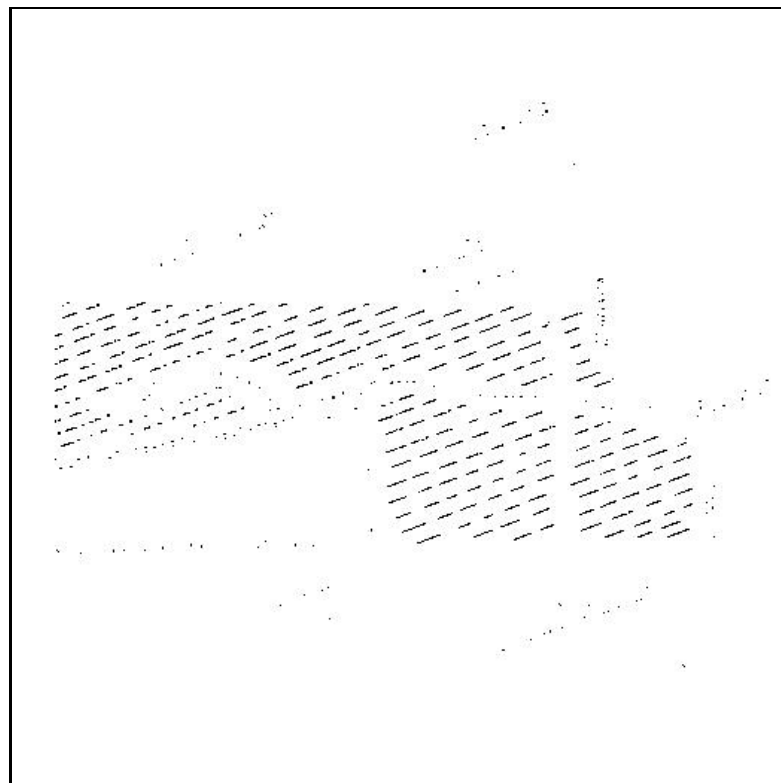


Figura 3.16: Textura identificada com o operador projetado estatisticamente

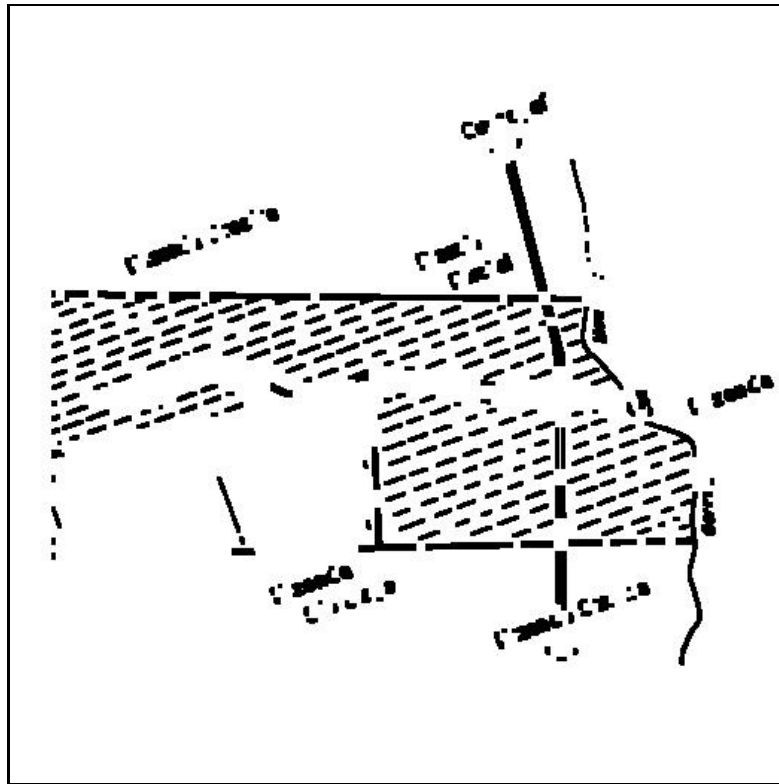


Figura 3.17: Textura identificada pelo operador projetado heurísticamente

onde ϕ , γ , ι e δ são, respectivamente, o fechamento, a abertura, a identidade e a dilatação [7]. B_1, B_2 , e B_3 são, respectivamente, os elementos estruturantes quadrados 3×3 , 5×5 , e 7×7 , centrados na origem. Os L_i são segmentos de linhas com 5 pontos, centrados no origem, e com inclinação nos 5 ângulos considerados (0, 45, 90, 135 e 180 graus).

Para entender o funcionamento do operador β , podemos analisar cada parte dele. A união de fechamentos preenche o espaço entre os segmentos, a seqüência de aberturas e fechamentos elimina quase todos os objetos, exceto as linhas finas. A subtração elimina as linhas que restaram do processo, e o que fica é dilatado para ter certeza de que as linhas resultantes incluem completamente as linhas originais da textura. A Figura 3.17 mostra o resultado da aplicação deste operador sobre a imagem completa, lembrando que ele vai ser utilizado como envelope, não por si mesmo. Finalmente a Figura 3.17 mostra o resultado da aplicação da restrição β ao operador projetado estatisticamente.

Comparando as Figuras 3.16 e 3.18 podemos conferir uma melhora, devido ao envelope. Para estimar o erro foi projetado também um operador sobre uma janela 5×5 , e medido a proporção de pontos da imagem mal classificados, nas 5 rotações possíveis da imagem, e tomando a média desses valores. Para o projeto estatístico puro, o erro (MAE) foi de 2.77% para a janela 4×4 e 2.50% para a janela de 5×5 . O erro para o operador restrito foi de 2.49% para a janela de 4×4 , e de 2.07% para a janela 5×5 . Para ambas janelas observamos melhora quantitativa do desempenho do operador.

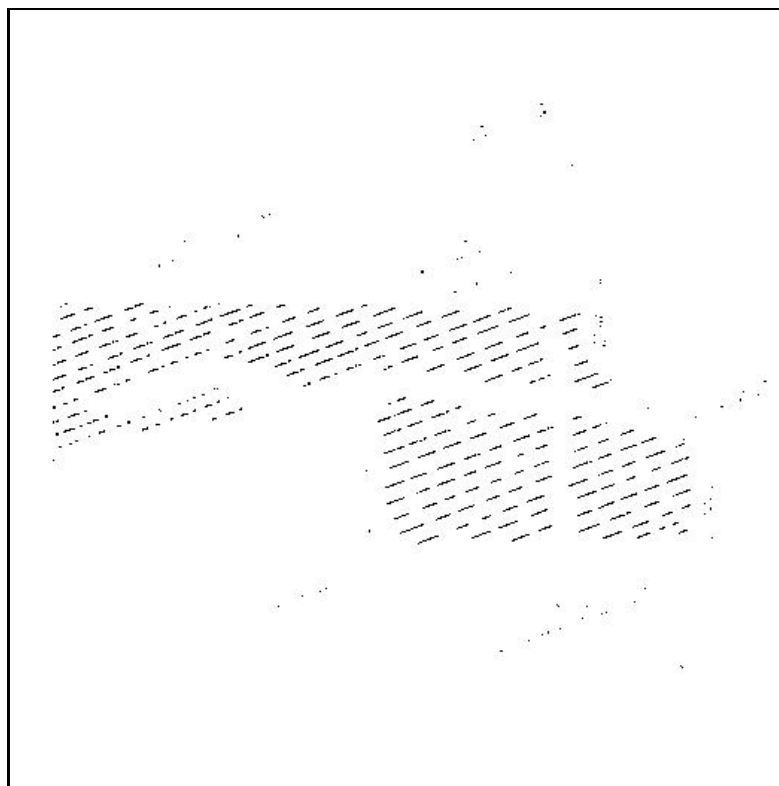


Figura 3.18: Textura identificada pelo operador restrito por envelope

3.5.4 Reconhecimento de caracteres

O objetivo deste exemplo é projetar um operador binário para reconhecer a letra a numa imagem com texto. O operador tem que funcionar como um marcador para a letra, isto significa que pelo menos um ponto da letra tem que ser reconhecido como pertencendo a uma letra a .

A Figura 3.19 mostra uma imagem binária de um texto, resultante da digitalização de uma página de texto, a 300 dpi. A Figura 3.20 mostra o resultado de um operador projetado estatisticamente sem restrições. O resultado desta figura serve como marcador para as letras a da Figura 3.19. O operador está baseado numa janela 11×11 , e foi usado um só parágrafo para treina-lo.

A Figura 3.21 mostra o resultado da Figura 3.20 depois de aplicado um filtro e reconstruídas as letras marcadas. O filtro é definido pela aplicação de duas aberturas, a primeira pelo elemento estruturante horizontal de dois pontos, e a segunda pelo elemento estruturante vertical de dois pontos.

Neste caso os erros do operador projetado estatisticamente são por excesso, isto é, detecta todas as letras a , mais marca outras letras como se fossem a . Outra vez é necessário somente utilizar a parte superior do envelope, β . O operador β foi projetado heurísticamente, por

$$\beta = \delta_B(\varepsilon_B \delta_A - i)$$

onde A e B são, respetivamente, um quadrado 5×5 e as bordas internas de um quadrado 9×9 . Este operador detecta objetos com um buraco no meio. A primeira dilatação por A preenche pequenas imperfeições. A erosão por B , combinada com a subtração da identidade, equivale a um casamento de padrões suave, onde são detectados elementos que contém o quadrado 9×9 e tem o pixel central

Assim, Freud (apud Sara Pain, 1985) descreve, de maneira metafórica, um id onde se encontram os instintos, um ego ativo e organizador, representado pela realidade, e um superego. Trata-se do mesmo ego, representado por ele como; um cavaleiro que trata de conciliar as exigências da cavaldura com as imposições do caminho, para estruturar a ação possível, mas conveniente a cada momento. (pág. 55)

O termo organização do ego pode ser interpretada, como um ego que se apresenta organizado. Mas ela não se refere à potência organizativa, e sim a sua capacidade de auto-regulação.

Do ponto de vista genético, o ego aparece primeiramente como um ego prático, que se dá inteiramente na eficiência da própria atividade. O ego

Figura 3.19: Imagem com texto

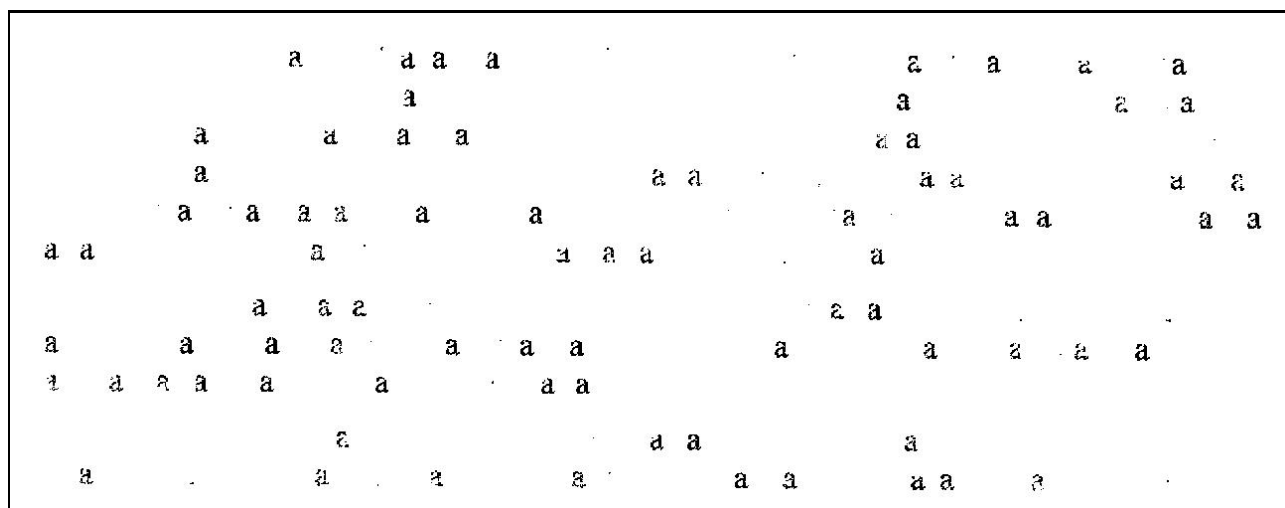


Figura 3.20: Marcadores obtidos pelo operador projetado estatisticamente

dele oco. Finalmente, a dilatação marca alguns pixels das letras assim identificadas. A Figura 3.22 mostra os marcadores obtidos pelo operador restrito pelo envelope, e a Figura 3.23 mostra as letras depois da aplicação do filtro e da reconstrução.

Testado o erro sobre 6 imagens de exemplo, com 4342 letras, obtivemos que, para o operador projetado estatisticamente, o erro estimado, computado como a proporção de letras mau classificadas, é de 26.09%, 16.88% e 5.92%, para janelas de 7×7 , 9×9 e 11×11 , respectivamente. Para o operador restrito por envelope, os erros foram de 3.59%, 2.51% e 0.81%, respetivamente. Em todos os casos a melhora foi superior a 85%.

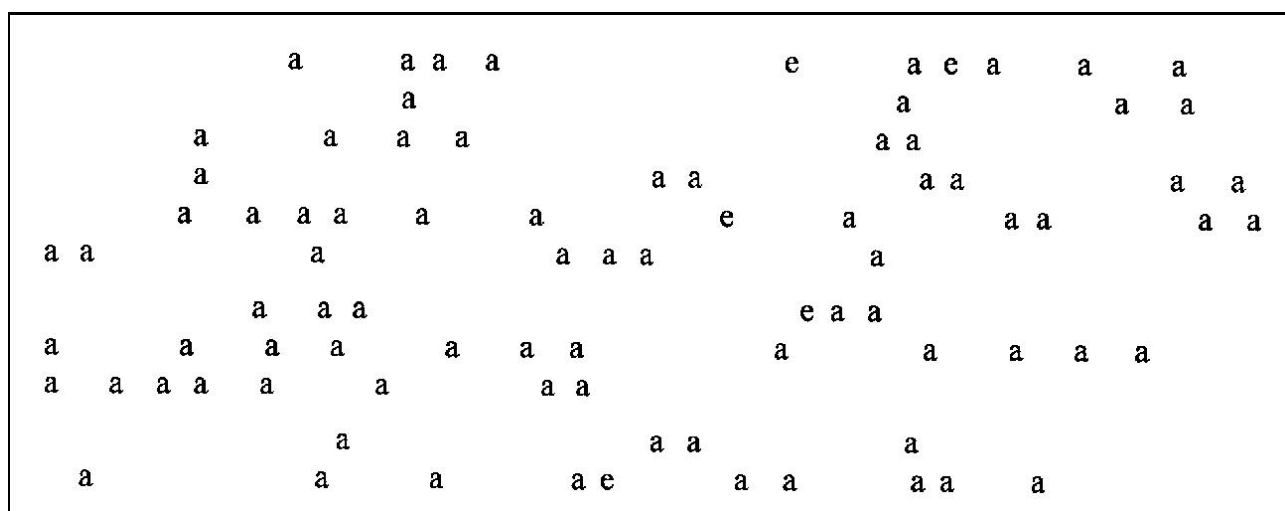


Figura 3.23: Reconstrução das letras marcadas na Figura 3.22

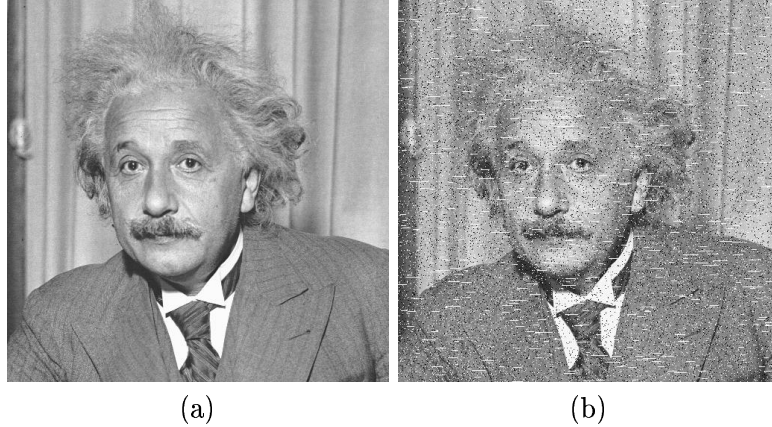


Figura 3.24: (a) Imagem ideal; (b) Imagem com ruído

3.5.5 Comparação com Stack Filters

Foram realizados dois experimentos para comparar as performances do Envelope e do *Stack Filter*. Stack Filter é uma classe de operadores sobre imagens, os quais comutam com o limiar. Os W -operadores nesta família são crescentes, e tem uma decomposição em erosões por elementos estruturantes planos. Uma das técnicas utilizadas, para projetar estatisticamente operadores desta família, é a do *switching* [54, 39, 55]. Este algoritmo realiza mudanças no núcleo de um operador projetado estatisticamente, sem restrições, para obter um operador crescente, minimizando o erro do processo.

Os experimentos consistiram na filtragem de ruído em imagens reais (não sintéticas) com 256 níveis de cinza. O ruído está baseado num modelo *sal e pimenta*, com amplitude de 200 níveis de cinza, afetando 10% dos pontos da imagem, mais linhas brancas horizontais. As linhas são formadas por segmentos horizontais de intensidade 255 (máxima), com 35% de probabilidade de ocorrência, e cujo comprimento tem distribuição normal, com média 5 (pixels), e variancia 49.

No primeiro experimento foi utilizada a foto da Figura 3.24 (a), com 10 realizações de ruído. Uma imagem foi utilizada para treinar o stack filter, e as outras nove para testa-lo. A Figura 3.24 (b) mostra a mesma imagem com uma realização do ruído. O erro quadrático médio da imagem com ruído, estimado sobre as 9 imagens de teste, é 1912, e depois de aplicar o operador é 106.

Para aplicar a restrição por envelope no operador morfológico projetado, definimos dois envelopes diferentes, um usando filtros alternados seqüenciais (ASF), e outro usando filtros da mediana. No primeiro caso, o envelope (α, β) está definido por

$$\beta = \phi_B \gamma_B \phi_B$$

$$\alpha = \gamma_B \phi_B \gamma_B,$$

onde ϕ_B é o fechamento morfológico e γ_B é a abertura morfológica, e B é um elemento estruturante definido por uma cruz 3×3 dilatada por ela própria. Aplicando este envelope ao operador projetado, o erro MSE foi reduzido a 79. O segundo envelope está baseado num operador mediana f , sobre uma janela 5×5 . O envelope (α, β) está definido por

$$\beta = f + 30$$

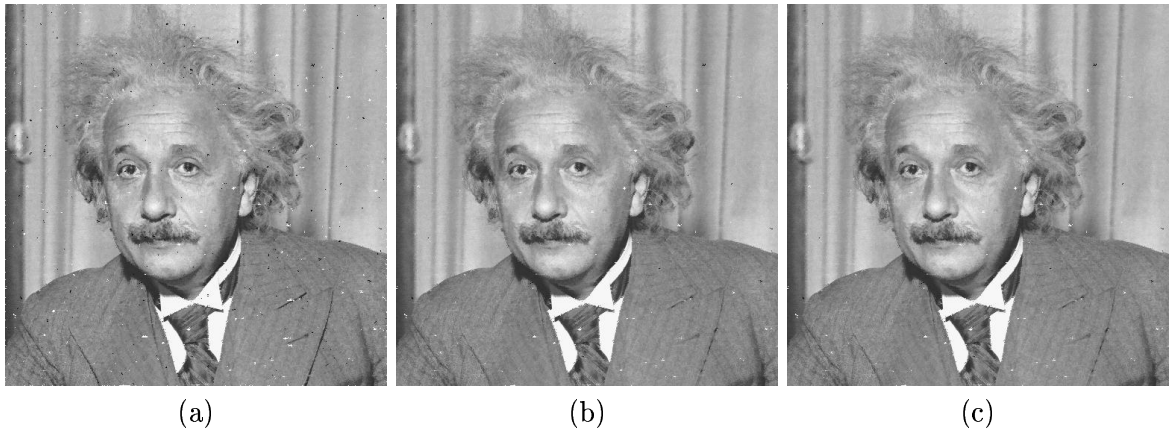


Figura 3.25: (a) Resultado do stack filter; (b) resultado do primeiro envelope; (c) resultado do segundo envelope

$$\alpha = f - 30.$$

Com este envelope o erro MSE se reduz a 55. Neste caso o MSE foi reduzido a 75% e a 52%, usando filtros seqüenciais e de mediana, respectivamente. As Figuras 3.25 (a), 3.25 (b) e 3.25 (c) mostram, respectivamente, o resultado do stack filter, do primeiro envelope e do segundo envelope.

O segundo experimento é similar ao primeiro, mas usando outra imagem. Em lugar de projetar novamente o operador morfológico, para a nova imagem, foi utilizado o operador treinado no exemplo anterior, pois é uma situação esperada a de treinar um operador num tipo de imagens, e aplicá-lo em outro. Neste exemplo foram aplicados também dois envelopes, um definido por filtros seqüenciais alternados, e o seguinte baseado num filtro de mediana. O primeiro envelope (α, β) é definido por

$$\beta = \phi_B \gamma_B \phi_B$$

$$\alpha = \gamma_B \phi_B \gamma_B,$$

onde B é um elemento estruturante horizontal de 3 pontos. O segundo envelope está baseado num filtro mediana f , definido numa janela vertical 5×1 , e por

$$\beta = f + 30$$

$$\alpha = f - 30.$$

O erro MSE médio estimado sobre as imagens com ruído é de 2387. O operador projetado, aplicado sobre estas imagens, produz um MSE médio de 298. O resultado dos envelopes é de 282 para o primeiro envelope e 251 para o segundo, sendo reduzido a 95% e a 85% respectivamente.

A Figura 3.26 (a) mostra a imagem original do cameraman, usada para este experimento, e a Figura 3.26 (b) mostra a mesma imagem com ruído.

As Figuras 3.27 (a), 3.27 (b) e 3.27 (c) mostram, respectivamente, o resultado do stack filter, do primeiro envelope e do segundo envelope.

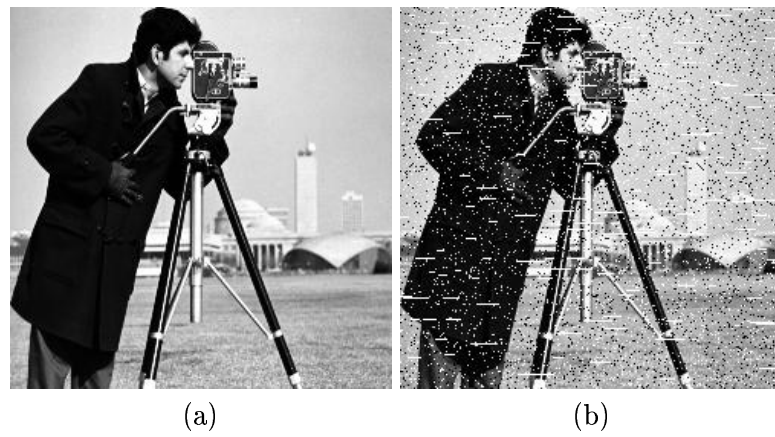


Figura 3.26: (a) Imagem original; (b) Imagem com ruído

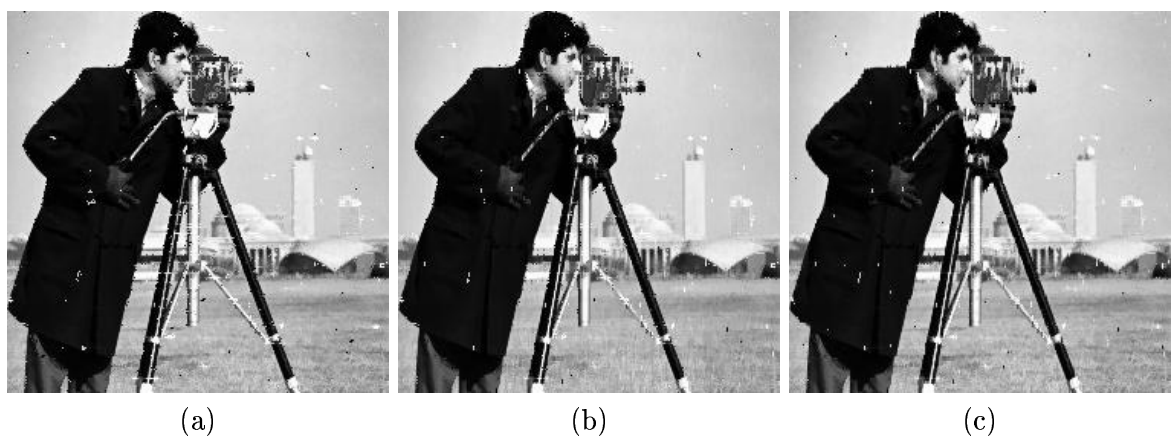


Figura 3.27: (a) Resultado do stack filter; (b) Resultado do primeiro envelope; (c) resultado do segundo envelope

Capítulo 4

Multi-resolução

4.1 Introdução

No capítulo anterior introduzimos a restrição de *envelope* para mitigar a necessidade de dados de treinamento no projeto automático de W -operadores. Outra forma intuitiva de diminuir esses requisitos é diminuindo o tamanho da janela, que leva à perda de qualidade do operador ótimo, mas, por outro lado, pode levar a uma considerável melhora na estimação. Nesta seção vamos apresentar uma generalização desta técnica, onde a partir das configurações originais são obtidas novas configurações, num espaço mais restrito.

A restrição por resolução depende da definição de um espaço de configurações menor e, portanto, um espaço de W -operadores menor, e de um mapeamento entre as configurações no espaço original e no espaço restrito. O mapeamento é definido heurísticamente e, como é mostrado aqui, é determinante na qualidade do operador restrito ótimo, em função das características estatísticas das imagens onde vai ser aplicado.

4.2 Sub-amostragem

A sub-amostragem é um caso particular de mudança de resolução. Nesta seção vamos apresentar a sub-amostragem espacial, de escala de valores, y combinada. Com estes exemplos será introduzido o conceito de mapeamento de resolução, no qual está baseada a restrição por resolução.

4.2.1 Sub-amostragem espacial

Este caso de sub-amostragem consiste em utilizar janelas de tamanho menor para analisar as imagens. Desta maneira a informação obtida para cada ponto da imagem é menor (menos variáveis) mas, por outro lado, a família de possíveis observações é também menor, facilitando a realização de estatísticas sobre ela.

A sub-amostragem espacial está baseada em duas janelas espaciais: W_0 e W_1 , relacionadas pela inclusão $W_1 \subset W_0$. Como exemplo, a janela W_0 pode ser um quadrado de tamanho 3×3 , com a origem no pixel central (Fig. 4.1 (a)), e a janela W_1 pode ser a cruz 3×3 , com a mesma origem

(Fig. 4.1 (b)).

(-2,2)	(-1,2)	(0,2)	(1,2)	(2,2)
(-2,1)	X₁ (-1,1)	X₂ (0,1)	X₃ (1,1)	(2,1)
(-2,0)	X₄ (-1,0)	X₅ (0,0)	X₆ (1,0)	(2,0)
(-2,-1)	X₇ (-1,-1)	X₈ (0,-1)	X₉ (1,-1)	(2,-1)
(-2,-2)	(-1,-2)	(0,-2)	(1,-2)	(2,-2)

(a)

(-2,2)	(-1,2)	(0,2)	(1,2)	(2,2)
(-2,1)	(-1,1)	Z₁ (0,1)	(1,1)	(2,1)
(-2,0)	Z₂ (-1,0)	Z₃ (0,0)	Z₄ (1,0)	(2,0)
(-2,-1)	(-1,-1)	Z₅ (0,-1)	(1,-1)	(2,-1)
(-2,-2)	(-1,-2)	(0,-2)	(1,-2)	(2,-2)

(b)

Figura 4.1: Janelas utilizadas para sub-amostragem espacial: (a) W_0 ; (b) W_1

No processo do projeto de um W -operador sobre W_0 , esta janela é transladada pela imagem observada, registrandose para cada posição os nove valores observados, em forma de vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_9)$.

No exemplo da Figura 4.1 (a) os vetores tem nove valores, correspondendo cada elemento do vetor a um ponto da janela. Como exemplo, se observamos uma imagem f no ponto (a, b) , a observação usando a janela W_0 está formada pelo vetor

$$\mathbf{x} = (f(a-1, b+1), f(a, b+1), f(a+1, b+1), f(a-1, b), f(a, b), f(a+1, b), f(a-1, b-1), f(a, b-1), f(a+1, b-1)). \quad (4.1)$$

Para a janela W_1 podemos realizar o mesmo processo, percorrendo a imagem observada e registrando, para cada posição, um vetor de valores $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_5)$. Para uma função f observada no ponto (a, b) , a observação é dada por

$$\mathbf{z} = (f(a, b+1), f(a-1, b), f(a, b), f(a+1, b), f(a, b-1)). \quad (4.2)$$

Lembramos que para uma imagem digital definida por uma função $f : E \rightarrow L$, com $L = [0, 1, \dots, l-1]$, a observação num ponto $t = (a, b)$ ($t \in E$) é dada pela restrição sobre W_0 da função f trasladada por $-t$, isto é, $f_{-t}(W_0) = f_{-t}|_{W_0}$. A função $f_{-t}(W_0) \in \text{FUN}(W_0, L)$ é chamada de *configuração de janela*.

No exemplo da Figura 4.1 (a), existe uma relação entre os elementos do vetor de observações e os pontos da janela, a qual é dada pela equação 4.1. Cada configuração de janela $f_{-t}(W_0)$ tem associado um único vetor $\mathbf{x} \in L^9$. Por exemplo, se $L = [0, 1]$ (imagens binárias), uma configuração de janela num ponto $t = (a, b)$ pode ser definida pela tabela 4.1, e essa configuração de janela (Fig. 4.2) tem associado o vetor $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0)$.

No caso general, se não temos dúvida de qual é a relação entre os elementos do vetor \mathbf{x} e os pontos de uma janela W , podemos referirnos em forma indistinta a estes vetores ou as configurações. A partir de agora, quando ficar claro pelo contexto, falaremos de uma *configuração* \mathbf{x} , para indicar tanto da configuração $f_{-t}(W)$ como o vetor associado \mathbf{x} . Chamamos de D_0 o espaço de configurações

(u, v)	$f_{W_0,t}(u, v)$
(-1, 1)	0
(0, 1)	0
(1, 1)	1
(-1, 0)	1
(0, 0)	1
(1, 0)	1
(-1, -1)	0
(0, -1)	1
(1, -1)	0

Tabela 4.1: Exemplo de configuração

(-2,2)	(-1,2)	(0,2)	(1,2)	(2,2)
	0	0	1	
(-2,1)	(-1,1)	(0,1)	(1,1)	(2,1)
	1	1	1	
(-2,0)	(-1,0)	(0,0)	(1,0)	(2,0)
	0	1	0	
(-2,-1)	(-1,-1)	(0,-1)	(1,-1)	(2,-1)
(-2,-2)	(-1,-2)	(0,-2)	(1,-2)	(2,-2)

Figura 4.2: Exemplo de configuração

sobre W_0 , sendo $D_0 = \text{FUN}(W_0, L)$. Da mesma maneira, o espaço D_1 de configurações sobre W_1 e definido por $D_1 = \text{FUN}(W_1, L)$. Neste texto, D_0 e D_1 podem indicar tanto o espaço de configurações da forma $f_{-t}(W_0)$ e $f_{-t}(W_1)$, respectivamente, como o espaço de vetores \mathbf{x} e \mathbf{z} , respectivamente.

Voltando ao exemplo da Figura 4.1, outra forma de computar as configurações observadas sobre W_1 , sem necessidade de percorrer novamente a Figura, e aproveitar as configurações computadas sobre W_0 , e o conhecimento da relação entre W_1 e W_0 .

No mesmo exemplo da Figura 4.1, em função da definição dos vetores \mathbf{x} (Eq. 4.1) e \mathbf{z} (Eq. 4.2), podemos ver que $z_1 = x_2$, $z_2 = x_4$, $z_3 = x_5$, $z_4 = x_6$ e $z_5 = x_8$. Esta relação permite transformar cada vetor \mathbf{x} , observado através da janela W_0 , num vetor \mathbf{z} , observado através da janela W_1 . Como exemplo, se usando a janela W_0 foi observada a configuração $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0)$ num ponto $t \in E$ da imagem, nesse mesmo ponto será observada a configuração $\mathbf{z} = (0, 1, 1, 1, 1)$, quando usada a janela W_1 . A relação entre as configurações em D_0 e D_1 pode ser formalizada por um mapeamento $\rho: L^9 \rightarrow L^5$, definido por $\rho(x_1, \dots, x_9) = (x_2, x_4, x_5, x_6, x_8)$.

O mesmo processo pode ser realizado com configurações aperture. Sejam por exemplo W_0 uma janela espacial de 5 pontos, W_1 uma sub-janela formada pelo primeiro, terceiro e quinto ponto de W_0 , e $K = [-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]$. O mapeamento para as configurações está definido por $\rho(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_3, x_5)$. Na Figura 4.3 podemos ver este exemplo de sub-amostragem sobre duas configurações Aperture.

Agora podemos definir em forma geral a sub-amostragem espacial.

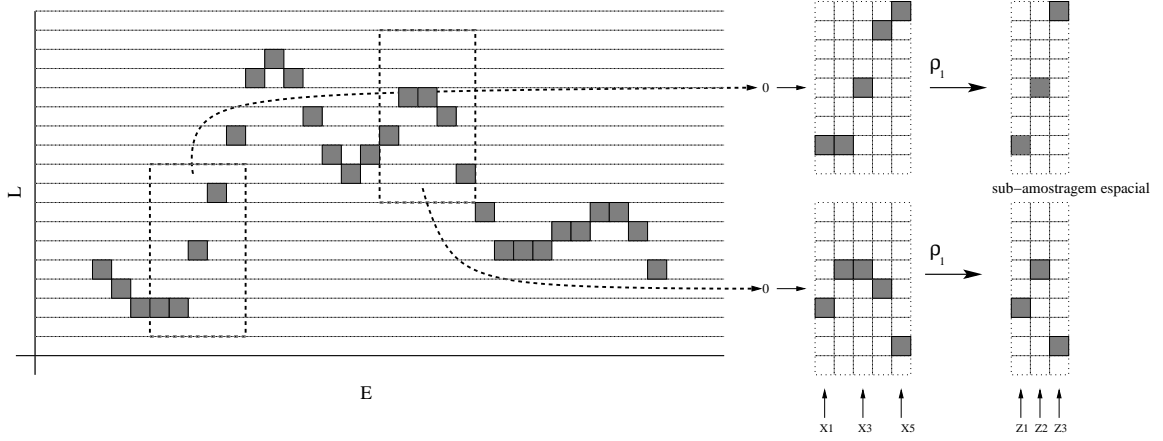


Figura 4.3: Exemplo de sub-amostragem com configurações Aperture

Definição 4.1 Sejam W_0, W_1 duas janelas, tais que $W_1 \subset W_0 \subset E$, e L a escala de níveis de cinza (por exemplo, $L = [0, 1]$ no caso binário). Definimos $D_0 = FUN(W_0, L)$ e $D_1 = FUN(W_1, L)$, os espaços de configurações usando as janelas W_0 e W_1 respectivamente. Uma **sub-amostragem espacial** é definida por um mapeamento $\rho : D_0 \rightarrow D_1$ que associa a cada configuração $\mathbf{x} \in D_0$ uma configuração $\mathbf{z} = \rho(\mathbf{x})$, definida por $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) \forall t \in W_1$ (neste caso, \mathbf{x} e \mathbf{z} são considerados como funções em $FUN(W_0, L)$ e $FUN(W_1, L)$, respectivamente).

4.2.2 Sub-amostragem na escala de cinza

A sub-amostragem na escala de valores baseia-se na simplificação das observações através da redução da quantidade de níveis de cinza.

Sejam W a janela utilizada para percorrer a imagem, e $L = [0, 1, \dots, l]$ a escala de níveis de cinza das configurações observadas. A ideia desta sub-amostragem, também chamada de *quantização*, e de criar novas observações com menos níveis de cinza.

Como exemplo podemos mostrar uma situação similar à da figura 4.3, de janelas Aperture. Seja W uma janela espacial de 5 pontos, $K_0 = [-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]$ uma janela nos níveis de cinza, de 9 pontos, e $K_1 = [-2, -1, 0, 1, 2]$ outra janela nos níveis de cinza, com somente 5 pontos. As observações são realizadas com a janela $W \times K_0$, e mapeadas à janela $W \times K_1$ pelo seguinte mapeamento: $\rho(x_1, \dots, x_5) = (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_5 \rfloor)$, onde $\lfloor \bullet \rfloor$ indica arredondamento para zero. Na Figura 4.4 podemos ver este exemplo de sub-amostragem sobre duas configurações Aperture.

A sub-amostragem da escala de valores pode ser definida formalmente da seguinte maneira, para W -operadores:

Definição 4.2 Sejam $W \subset E$ a janela e $L_0 = [0, \dots, l_0]$ a escala de valores das observações, com l_0 um número ímpar. Seja $L_1 = [0, \dots, l_1 - 1]$ uma escala de valores menor, com $l_1 = \frac{l_0}{2}$. L_0 e L_1 definem dois espaços de configurações, $D_0 = FUN(W, L_0)$ e $D_1 = FUN(W, L_1)$. Uma **quantização**, ou sub-amostragem na escala de valores, é um mapeamento $\rho : D_0 \rightarrow D_1$ que associa a cada configuração $\mathbf{x} \in D_0$ uma configuração $\mathbf{z} = \rho(\mathbf{x}) = \lfloor \frac{\mathbf{x}}{2} \rfloor \in D_1$, onde $\lfloor \bullet \rfloor$ indica arredondamento para zero.

Neste caso, uma configuração $\mathbf{x} \in D_0$ com, no máximo, l_0 níveis de cinza é quantizada para obter

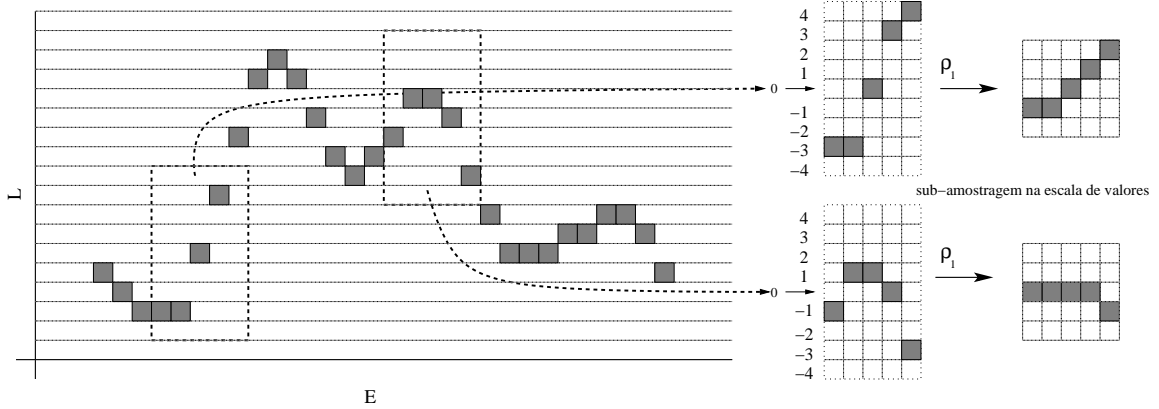


Figura 4.4: Exemplo de sub-amostragem com configurações Aperture

uma configuração $\mathbf{z} \in D_1$ com, no máximo, a metade de níveis de cinza.

4.2.3 Sub-amostragem combinada

As restrições espaciais e de escala de cinza podem ser combinadas para obter uma restrição um pouco mais complexa. Sejam W_0 e W_1 as janelas de observação, com $W_1 \subset W_0$, e sejam as escalas de cinza $L_0 = L = [0, \dots, l_0 - 1]$ e $L_1 = [0, \dots, l_1 - 1]$, com l_0 ímpar e $l_1 = \frac{l_0}{2}$.

Neste caso vamos considerar três espaços de configurações. O primeiro espaço de configurações é $D_0 = \text{FUN}(W_0, L_0)$, obtido percorrendo a imagem com a janela W_0 utilizando a escala de cinza L_0 . O segundo espaço é $D_{01} = \text{FUN}(W_1, L_0)$, resultante de sub-amostragem espacial de D_0 . O terceiro espaço é $D_1 = \text{FUN}(W_1, L_1)$, resultante de sub-amostragem na escala de valores de D_{01} .

Os espaços D_0 e D_{01} estão relacionados pelo mapeamento $\rho_1 : D_0 \rightarrow D_{01}$, que define uma restrição espacial por $[\rho_1(\mathbf{x})](t) = \mathbf{x}(t) \forall t \in W_1$. Os espaços D_{01} e D_1 estão relacionados pelo mapeamento $\rho_2 : D_{01} \rightarrow D_1$, que define uma quantização por $\rho_2(\mathbf{x}) = \lfloor \frac{\mathbf{x}}{2} \rfloor$. A composição $\rho : D_0 \xrightarrow{\rho_1} D_{01} \xrightarrow{\rho_2} D_1$ é um mapeamento de D_0 em D_1 , e define também uma restrição por resolução sobre D_0 . A Figura 4.5 mostra um exemplo de restrição espacial e de escala de cinza combinadas, aplicadas a configurações Aperture. Neste exemplo $K_0 = [-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]$, $K_1 = [-2, -1, 0, 1, 2]$, W_0 é um vetor de 5 pontos, W_1 é um vetor de 3 pontos e

$$\rho_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_3, x_5)$$

$$\rho_2(z_1, z_2, z_3) = (\lfloor \frac{z_1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{z_3}{2} \rfloor, \lfloor \frac{z_3}{2} \rfloor)$$

As técnicas de sub-amostragem mostradas aqui são as mais simples, a primeira consiste simplesmente em utilizar menos variáveis no vetor de valores observados, a segunda consiste em reduzir à metade a escala de valores, e a terceira é simplesmente uma combinação das anteriores. Mesmo sendo as três diferentes, elas podem ser consideradas como parte de uma definição mais geral de sub-amostragem, cujo objetivo principal é diminuir a quantidade de possíveis observações. Esta técnica geral de sub-amostragem é apresentada na seguinte seção, com o nome de *restrição por resolução*.

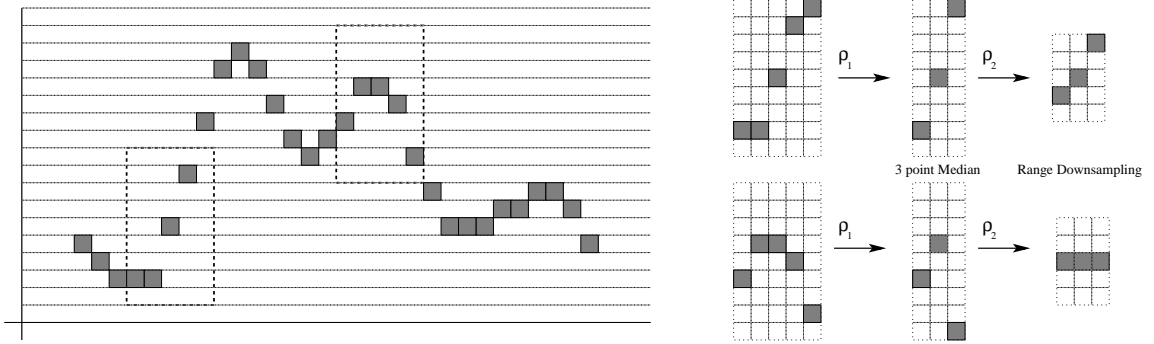


Figura 4.5: Restrições espacial e de escala de cinza combinadas

4.3 Operadores restritos por resolução

Todos os exemplos anteriores definem casos particulares de restrição por resolução, mesmo o último exemplo, que generaliza os dois anteriores. Nesta seção vamos definir restrição por resolução na forma mais geral, e analisar suas propriedades.

4.3.1 Restrição por resolução

O primeiro conceito necessário para definir a restrição por resolução é a do mapeamento entre os dois espaços de diferente resolução.

Definição 4.3 Chamamos de *mapeamento de resolução* uma função sobrejetora entre dois reticulados completos.

Como exemplo, os três casos de sub-amostragem apresentados na seção anterior podem ser considerados como mapeamentos de resolução, pois os espaços de configurações, da forma $D = \text{FUN}(W, L)$ são reticulados completos (com a relação de ordem definida por $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}' \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}'(t) \forall t \in W$), e os mapeamentos definidos nesses exemplos são todos sobrejetores.

O mapeamento de resolução tem interesse quando aplicado à família de configurações observadas na imagem,

Definição 4.4 Sejam $D_0 = \text{FUN}(W_0, L_0)$ o espaço de configurações observadas, $D_1 = \text{FUN}(W_1, L_1)$ um espaço de configurações menor (isto é, com menos elementos) e $\rho : D_0 \rightarrow D_1$ um mapeamento de resolução. O mapeamento ρ define uma restrição no espaço de operadores morfológicos sobre D_0 , $\mathbf{Q}_\rho = \{\psi \in \text{FUN}(D_0, L_0) : \rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}') \Rightarrow \psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}')\}$, a qual é chamada de *restrição de resolução*.

Se $\mathbf{x} \in D_0$, a classe de equivalência de \mathbf{x} é definida por $C[\mathbf{x}] = \{\mathbf{x}' : \rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}')\}$.

Se consideramos as classes de equivalência sobre D_0 definidas pelo mapeamento de resolução ρ , os operadores restritos por resolução são aqueles que associam o mesmo valor as configurações que pertencem à mesma classe de equivalência. Na Figura 4.6 podemos ver um esquema do funcionamento da restrição por resolução. O mapeamento ρ cria uma partição do espaço D_0 , e o operador restrito

por resolução ψ associa o mesmo valor para todos as configurações que estão numa mesma classe de equivalencia.

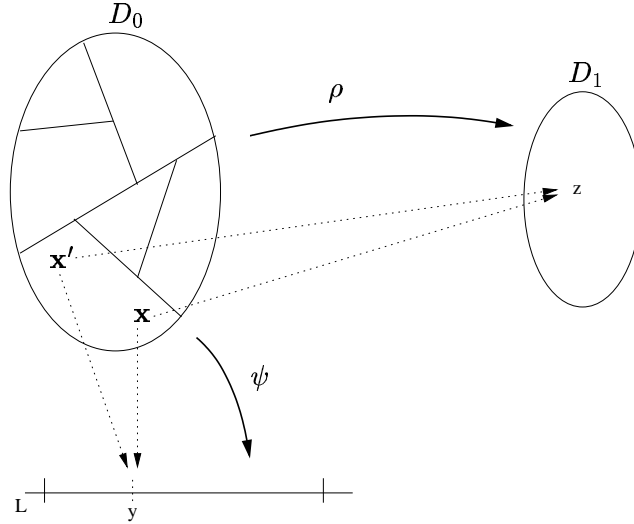


Figura 4.6: Restrição por resolução

O espaço D_0 de configurações usualmente corresponde às observações da imagem dentro de uma janela W_0 , ou dentro de uma janela $W_0 \times K$ no caso de configurações Aperture.

Como foi mostrado anteriormente, os operadores morfológicos são identificados com funções características. Portanto, na hora de falar do operador morfológico Ψ podemos usar diretamente a função característica associada ψ . Seja W_0 a janela de observação, L_0 a escala de valores da imagem observada (ou seja, os níveis de cinza das observações) e $D_0 = \text{FUN}(W_0, L_0)$ o espaço de configurações observáveis, as funções características são funções $\psi : D_0 \rightarrow L$ (L é a escala de cinza da imagem ideal, que pode ser diferente de L_0). A família Ψ_{W_0} de W -operadores com janela W_0 é definida pela família de funções características $\text{FUN}(D_0, L)$.

Definição 4.5 *Sejam D_0 o espaço de configurações observadas, D_1 outro espaço de configurações e $\rho : D_0 \rightarrow D_1$ um mapeamento de resolução, definimos o mapeamento $T : \text{FUN}(D_1, L) \rightarrow \text{FUN}(D_0, L)$ por $T(\phi)(\mathbf{x}) = \phi(C[\mathbf{x}]) = \phi(\rho(\mathbf{x}))$. Se ϕ é um operador em $\text{FUN}(D_1, L)$, o operador $T(\phi)$ associado a ϕ é denotado ψ_ϕ .*

A Figura 4.7 mostra o diagrama comutativo, onde um operador ϕ sobre D_1 induz o operador ψ sobre D_0 . O mapeamento T é injetor, como mostramos na seguinte proposição:

Proposição 4.6 *O mapeamento T é injetor.*

Dem.: *Sejam $\phi, \phi' : D_1 \rightarrow L$ tais que $\psi_\phi = T(\phi) = T(\phi') = \psi_{\phi'}$. Seja $\mathbf{z} \in D_1$, e seja $\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]$, isto é, $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$.*

Como $\psi_\phi = \psi_{\phi'}$, então $\psi_\phi(\mathbf{x}) = \psi_{\phi'}(\mathbf{x})$, e pela definição, $\phi(C[\mathbf{x}]) = \phi'(C[\mathbf{x}])$ e, portanto, $\phi(\mathbf{z}) = \phi'(\mathbf{z})$

Portanto, $T(\phi) = T(\phi')$ implica que $\phi = \phi'$ e T é injetor. ■

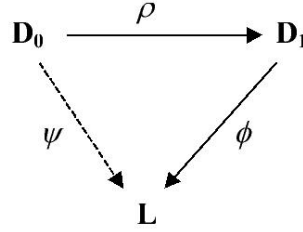


Figura 4.7: Diagrama comutativo

Vamos ver que o contradomínio do mapeamento T é justamente a restrição de resolução \mathbf{Q}_ρ . Isto é, que associa à cada operador sobre D_1 um operador restrito por resolução sobre D_0 .

Proposição 4.7 $T(L_1^D) = \mathbf{Q}_\rho$

Dem.: a) Seja $\phi \in L^{D_1}$ e $\psi_\phi = T(\phi)$. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in D_0$ tais que $\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}')$, então, pela definição $\psi_\phi(\mathbf{x}) = \phi(\rho(\mathbf{x})) = \phi(\rho(\mathbf{x}')) = \psi_\phi(\mathbf{x}')$, e portanto, $\psi_\phi \in \mathbf{Q}_\rho$.

b) Seja $\psi \in \mathbf{Q}_\rho$, definimos $\phi_\psi : D_1 \rightarrow L$ por $\phi_\psi(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{x})$ para algum \mathbf{x} tal que $\mathbf{z} = C[\mathbf{x}]$. ϕ_ψ está bem definida, pois ψ é restrita por resolução. Vamos ver agora que $T(\phi_\psi) = \psi$. Seja $\mathbf{x} \in D_0$, pela definição de T e de ϕ_ψ temos $T(\phi_\psi)(\mathbf{x}) = \phi_\psi(C[\mathbf{x}]) = \psi(\mathbf{x})$.

Portanto, $T : D_1 \rightarrow \mathbf{Q}_\rho$ e é sobrejetora. ■

O mapeamento T é uma sobrejeção entre D_1 e a restrição por resolução \mathbf{Q}_ρ . Pela proposição anterior ele é também injetor, portanto é uma bijeção que identifica de maneira unívoca cada operador restrito por resolução sobre D_0 com uma função sobre D_1 .

4.3.2 Estimação de operadores restritos por resolução

O projeto de operadores morfológicos consiste na procura do operador de mínimo erro, sobre o espaço produto $L \times D_0$, com uma distribuição de probabilidades $P(y, \mathbf{x})$, $y \in L$, $\mathbf{x} \in D_0$. Esta distribuição depende justamente das características estatísticas das imagens ideal-observada. Nosso objetivo é estimar operadores ótimos sobre o espaço D_1 , mas para isso precisamos primeiro de uma distribuição sobre o espaço produto $L \times D_1$. Esta distribuição é induzida por $P(y, \mathbf{x})$, pela seguinte equação:

$$P(y, \mathbf{z}) = P(\{y\} \times \rho^{-1}(\mathbf{z})).$$

A distribuição $P(y, \mathbf{x})$ também induz uma distribuição de probabilidades sobre as configurações, $P(\mathbf{x}) = \sum_{y \in L} P(y, \mathbf{x})$, e esta distribuição induz também uma distribuição sobre as configurações em D_1 , $P(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} P(\mathbf{x})$.

Mesmo existindo uma técnica simples para estimar o operador ótimo em Ψ_{W_0} , não é direta a estimação do operador ótimo dentro de uma restrição genérica. A tabela de frequências dos pares da forma (y, \mathbf{x}) observados não leva diretamente a este operador ótimo. Em outros problemas, como quando a restrição é definida por filtros crescentes [39] ou na restrição por envelope (seção 3), o

estimador do operador ótimo na restrição é obtido projetando, dentro da restrição, o estimador do operador ótimo não restrito.

Como a restrição é menor que o espaço de operadores, esperamos que para quantidades pequenas de amostras o erro de estimação seja menor, mas neste caso de restrição por multi-resolução, não temos uma forma direta de projetar um operador dentro da restrição. A solução para este problema vai ser aproveitar a identificação entre a restrição \mathbf{Q}_ρ e o espaço L^{D_1} para obter o estimador ótimo dentro da restrição. Se o operador ótimo ϕ_{opt} sobre D_1 é associado ao operador ótimo ψ_{opt-c} sobre \mathbf{Q}_ρ , isto é, se $T(\phi_{opt}) = \psi_{opt-c}$, e a medida de erro é equivalente nos dois espaços, então se ϕ_N é um estimador consistente de ϕ_{opt} , $T(\phi_N)$ vai ser um estimador consistente de ψ_{opt-c} . Felizmente, o seguinte teorema mostra que isto é sempre verdadeiro

Teorema 4.8 *Preservação de erro* - Seja $\ell : L \times L \rightarrow \mathcal{R}^+$ uma função de perda que define as funções de risco $R : L^{D_0} \rightarrow \mathcal{R}^+$, por $R(\psi) = E[(\ell(Y, \psi(\mathbf{X})))]$ e $R : L^{D_1} \rightarrow \mathcal{R}^+$, por $R(\phi) = E[(\ell(Y, \phi(\mathbf{Z})))]$, então $R(\psi) = R(\phi_\psi)$, $\forall \psi \in \mathbf{Q}_\rho$

Dem.:

$$\begin{aligned}
R(\phi_\psi) &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \sum_{y \in L} \ell[y, \phi_\psi(\mathbf{z})] P(y, \mathbf{z}) \\
&= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \sum_{y \in L} \ell[y, \phi_\psi(\mathbf{z})] \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} P(y, \mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} \sum_{y \in L} \ell[y, \phi_\psi(\mathbf{z})] P(y, \mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} \sum_{y \in L} \ell[y, \psi(\mathbf{x})] P(y, \mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \sum_{y \in L} \ell[y, \psi(\mathbf{x})] P(y, \mathbf{x}) \\
&= R(\psi)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

■

Como consequência imediata do teorema de preservação de erro (**EP**), os erros absoluto médio e quadrático médio são preservados pelo mapeamento $T : L^{D_1} \rightarrow \mathbf{Q}_\rho$. Portanto, o operador ótimo sobre D_1 induz o operador ótimo sobre \mathbf{Q}_ρ quando a medida de erro são o MAE ou o MSE.

A estimação do operador ótimo sobre D_1 pode ser obtido facilmente a partir da tabela de freqüências sobre D_0 . Se $f_y(\mathbf{x})$ é a quantidade de vezes que a foi observado o par (y, \mathbf{x}) , então as freqüências para as configurações em D_1 são obtidas por

$$f_y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} f_y(\mathbf{x}).$$

Neste caso, o operador ótimo sobre D_1 é definido por $\phi_{opt}(\mathbf{z}) = \text{round}(E[Y|\mathbf{Z}])$ e ele é estimado consistentemente a partir da tabela de freqüências $f_y(\mathbf{z})$, com $\mathbf{z} \in D_1$ e $y \in L$.

4.3.3 Não preservação do erro ao aplicar restrição na escala de cinza dos operadores

O teorema de preservação de erro foi provado para situações de restrição de resolução das configurações, para restrições espaciais, na escala de cinza (da configuração), ou mais complexas. Um

resultado da definição do mapeamento T (Definição . 4.5), é que se ψ é uma função restrita por resolução, com escala de cinza L , então $T(\psi) = \phi_\psi$, tem a mesma escala de cinza L .

O caso particular de restrição por quantização, pode ser considerado, intuitivamente, como o processo de simplificar a imagem observada, diminuindo a quantidade de níveis de cinza, e então percorrendo a imagem mais simples, para criar os pares de exemplos (\mathbf{x}, y) . Se \mathbf{X} é o vetor aleatório original, utilizado para estimar a variável aleatória Y , depois da restrição por resolução teremos um vetor aleatório \mathbf{Z} , a partir do qual vamos estimar também a variável aleatória Y . O teorema de preservação de erro afirma que o operador de mínimo erro, sobre o vetor aleatório \mathbf{Z} , é também o operador de mínimo erro entre os operadores definidos sobre o vetor aleatório \mathbf{X} restritos por resolução.

Podemos pensar em ampliar o mesmo raciocínio com a imagem ideal, diminuindo a quantidade de níveis de cinza, ou a *quantificando*. O processo consistiria em estimar um operador ótimo sobre um modelo de imagem simplificado, onde a mesma quantização é aplicada nas imagens ideal e observada. À saída do operador ótimo é aplicada uma transformação que funciona como pseudo-inversa da quantificação (não pode ser uma inversa, pois na quantificação existe uma perda de informação).

Vamos ver que neste caso, exceto para modelos estatísticos muito simples, estimar o operador ótimo no modelo simplificado (ou quantizado) não garante a obtenção de um bom estimador do operador ótimo do problema original. Primeiro vamos mostrar que o teorema de conservação de erro não é mais válido em geral, obtendo condições sobre o modelo para atingir validade. Mesmo este teorema sendo não válido, poderia acontecer de existir ainda uma relação um para um, entre o operador ótimo do modelo simplificado e o operador ótimo da família de operadores que podem ser obtidos através desta simplificação. No segundo passo vamos apresentar um contraexemplo, onde um operador ótimo num modelo não está associado ao operador ótimo restrito no outro modelo.

Antes de mostrar os dois resultados, temos que definir formalmente a nova restrição. Sejam W a janela espacial de observação, L_0 a escala de cinzas original, L_1 a escala de cinzas simplificada, ou quantizada, $D_0 = L_0^W$ o espaço original de configurações, e $D_1 = L_1^W$ o espaço quantizado de configurações. Seja $\psi : D_0 \rightarrow L_0$ um operador morfológico, e suponhamos que existem duas funções, $s : L_0 \rightarrow L_1$, sobrejetora, e $r : L_1 \rightarrow L_0$, injetora, tais que $s \circ r = Id_{L_1}$. O operador ψ serve para estimar a variável aleatória Y em função do vetor aleatório \mathbf{X} . A função sobrejetora s define a quantização na escala de cinza do operador. Por exemplo, se L_0 é o intervalo inteiro $[0, 255]$, então L_1 pode ser o intervalo inteiro $[0, 127]$, e a função $s : L_0 \rightarrow L_1$ estar definida por $s(y) = \lfloor \frac{y}{2} \rfloor$. A função injetora r permite voltar a L_0 a partir L_1 , mas com certa perda de informação, isto é, podem existir valores em L_0 não atingíveis por r a partir dos valores de L_1 . O mapeamento $\rho : D_0 \rightarrow D_1$ é definido por $\rho(x_1, \dots, x_n) = (s(x_1), \dots, s(x_n))$ (n é a quantidade de elementos da janela W).

Os espaços em consideração são agora o dos operadores $L_0^{D_0} = \{\psi : D_0 \rightarrow L_0\}$, e o dos operadores simplificados $L_1^{D_1} = \{\phi : D_1 \rightarrow L_1\}$. No espaço $L_0^{D_0}$ podemos definir a restrição \mathbf{Q} por duas condições: ψ pertence a \mathbf{Q} se:

1. $\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}')$ então $\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}')$ (igual á definição original), e
2. $\psi(\mathbf{x}) \in r(L_1)$ para qualquer $\mathbf{x} \in D_0$.

A segunda condição permite criar uma bijeção entre \mathbf{Q} e $L_1^{D_1}$, da seguinte maneira: se $\phi_\psi \in L_1^{D_1}$, definimos $\psi_\phi(\mathbf{x}) = r(\phi(\rho(\mathbf{x})))$. O diagrama comutativo da Figura 4.8 mostra como pode ser definido um operador $\psi \in L_0^{D_0}$ a partir de um operador $\phi \in L_1^{D_1}$.

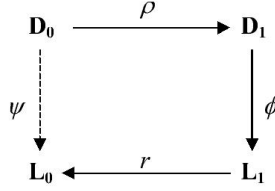


Figura 4.8: Diagrama comutativo

O mapeamento $\phi \mapsto \psi_\phi$ é uma bijeção entre $L_1^{D_1}$ e a restrição $\mathbf{Q} \subset l_0^{D_0}$, com inversa $\psi \mapsto \phi_\psi$ dada por $\phi_\psi(\mathbf{z}) = s(\psi(\mathbf{x}))$ para qualquer $\mathbf{x} \in D_0$ tal que $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$ (a prova é em parte similar á da restrição de resolução, usando a propriedade de que $s \circ r = Id_{L_1}$ e, portanto, $r \circ s = Id_{r(L_1)}$).

Uma pergunta razoável é a seguinte: se ϕ é o melhor estimador de $s(Y)$ em função do vetor aleatório \mathbf{X} , então ψ_ϕ é o melhor estimador de (Y) em função de \mathbf{X} , restrito a \mathbf{Q} ? Vamos ver no seguinte exemplo que isto não é verdadeiro.

Vamos a considerar o caso em que $L_0 = [0, l_0 - 1]$ e $L_1 = [0, l_1 - 1]$ com $q_0 = 2 \times l_1$, e com $s(j) = \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ e $r(i) = 2i$.

Teorema 4.9 *O MSE de ψ como estimador de Y e de ϕ_ψ como estimador de $s(Y)$ estão relacionados por*

$$MSE(\phi_\psi) = \frac{1}{4}MSE(\psi) + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \sum_{i=0}^{l_1-1} 2[(\psi(\mathbf{x}) - 2i) - \frac{1}{2}]P(2i + 1, \mathbf{x}). \quad (4.4)$$

Dem.:

$$\begin{aligned} MSE(\phi_\psi) &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \sum_{i=0}^{l_1-1} (i - \phi_\psi(\mathbf{z}))^2 P_1(i, \mathbf{z}) \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \sum_{i=0}^{l_1-1} (i - \phi_\psi(\mathbf{z}))^2 P_0(s^{-1}(i), \rho^{-1}(\mathbf{z})) \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \sum_{i=0}^{l_1-1} (i - \phi_\psi(\mathbf{z}))^2 \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} \sum_{j=0}^1 P_0(2i + j, \mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} \sum_{i=0}^{l_1-1} \sum_{j=0}^1 (i - \phi_\psi(\mathbf{z}))^2 P_0(2i + j, \mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \sum_{i=0}^{l_1-1} \sum_{j=0}^1 (i - \frac{\psi(\mathbf{x})}{2})^2 P_0(2i + j, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \sum_{i=0}^{l_1-1} \sum_{j=0}^1 (2i - \psi(\mathbf{x}))^2 P(2i + j, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} MSE(\psi) &= \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \sum_{t=0}^{l_0-1} (t - \psi(\mathbf{x}))^2 P(t, \mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \sum_{i=0}^{l_1-1} \sum_{j=0}^1 (2i + j - \psi(\mathbf{x}))^2 P(2i + j, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Portanto, dado que para $j = 0$ os somandos são idênticos,

$$\begin{aligned} MSE(\phi_\psi) - \frac{1}{4}MSE(\psi) &= \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \sum_{i=0}^{l_1-1} ((2i - \psi(\mathbf{x}))^2 - (2i + 1 - \psi(\mathbf{x}))^2) P(2i + 1, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \sum_{i=0}^{l_1-1} 2[(\psi(\mathbf{x}) - 2i) - \frac{1}{2}] P(2i + 1, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

E a equação 4.4 é obtida. ■

Na equação 4.4 podemos ver já uma condição suficiente para ser $MSE(\phi_\psi) = \frac{1}{4}MSE(\psi)$. Isto pode ser obtido se $P(2i + 1, \mathbf{x}) = 0$ para $i \in L_1$, isto é, se as probabilidades estão concentradas em $r(L_1)$. Neste caso, mesmo não sendo verdadeira a preservação de erro (pelo fator *frac*14), a relação linear entre o erro do operador $\phi \in L_1^{D_1}$ e o seu operador associado $\psi_\phi \in \mathbf{Q}$, implica que o operador ótimo em $L_1^{D_1}$ está associado ao operador ótimo em \mathbf{Q} . Mas se não se cumpre esta condição sobre a distribuição, esta propriedade pode não ser verdadeira, como podemos ver no seguinte exemplo.

Sejam as escalas de cinza definidas por $l_0 = 4$ e $l_1 = 2$, então $L_0 = [0, 1, 2, 3]$ e $L_1 = [0, 1]$. Seja a janela definida por dois pontos, $W = (u, v)$, $\rho(\mathbf{x}) = (\lfloor \frac{x_1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{x_2}{2} \rfloor)$. O espaço D_1 tem $2^2 = 4$ configurações diferentes, sendo elas $\{00, 01, 10, 11\}$. O espaço D_0 tem $2^4 = 16$ configurações diferentes, sendo elas $\{00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33\}$.

O mapeamento $\rho : D_0 \rightarrow D_1$ define as seguintes classes de equivalência sobre D_0 : $C[00] = \{00, 01, 10, 11\}$, $C[01] = \{02, 03, 12, 13\}$, $C[10] = \{20, 31, 20, 31\}$ e $C[11] = \{22, 23, 32, 33\}$.

O espaço $L_1^{D_1}$ tem $2^{2^2} = 16$ operadores diferentes, e estes operadores induzem 16 operadores na restrição $\mathbf{Q} \subset L_0^{D_0}$.

Vamos supor que existe uma distribuição P sobre $L_0 \times D_0$, isto é, um modelo para a relação entre a imagem ideal e a imagem observada, dada pela tabela 4.2. Pelo mapeamento de resolução, esta distribuição induz uma distribuição sobre o espaço $L_1 \times D_1$, dada pela tabela 4.3.

A partir das tabelas podemos calcular diretamente o erro MSE para cada possível operador. Como tem 16 operadores na restrição \mathbf{Q} (e em $L_1^{D_1}$), computamos o erro dos 16 operadores $\psi \in \mathbf{Q}$ e os 16 operadores associados $\phi_\psi \in L_1^{D_1}$. A tabela 4.4 mostra os valores do MSE, onde cada linha corresponde a um operador (e seu associado), numerados de 1 a 16.

O operador restrito ótimo é o operador ψ_{16} , definido por $\psi_{16}(\mathbf{x}) = 2$ para todo $\mathbf{x} \in D_0$. Este operador induz o operador $\phi_{\psi_{16}} \in L_1^{D_1}$ definido por $\phi_{\psi_{16}}(\mathbf{z}) = 1$ para todo $\mathbf{z} \in D_1$. Na tabela podemos ver que $MSE(\psi_{16}) = 1.4$ e $MSE(\phi_{\psi_{16}}) = 0.46$. Na tabela podemos ver também que o melhor operador sobre $L_1^{D_1}$ é o operador 14. $\phi_{\psi_{14}}$ está definido por $\phi_{\psi_{14}}(00) = 1$, $\phi_{\psi_{14}}(01) = 1$, $\phi_{\psi_{14}}(10) = 0$ e $\phi_{\psi_{14}}(11) = 1$. O operador restrito associado é ψ_{14} , definido por $\psi_{14}(\mathbf{x}) = 0$ se $\mathbf{x} \in C[10]$, e $\psi_{14}(\mathbf{x}) = 2$ para as outras configurações em D_0 . Neste caso temos $MSE(\phi_{14}) = 0.41$ e $MSE(\psi_{\phi_{14}}) = 1.68$.

Portanto, podemos ver que o operador ótimo em \mathbf{Q} é ψ_{16} , e o operador ótimo em $L_1^{D_1}$ está associado a ψ_{14} . Portanto, otimalidade em $L_1^{D_1}$ não implica otimalidade em \mathbf{Q} .

X	Y=0	Y=1	Y=2	Y = 3
00	0.01	0.02	0.01	0.01
01	0.01	0.00	0.02	0.01
02	0.02	0.02	0.03	0.01
03	0.01	0.01	0.01	0.02
10	0.02	0.01	0.02	0.02
11	0.01	0.01	0.02	0.02
12	0.01	0.03	0.03	0.01
13	0.02	0.00	0.02	0.03
20	0.03	0.02	0.01	0.02
21	0.01	0.01	0.02	0.01
22	0.00	0.02	0.01	0.01
23	0.01	0.02	0.03	0.02
30	0.02	0.01	0.01	0.01
31	0.03	0.02	0.00	0.02
32	0.01	0.01	0.03	0.01
33	0.01	0.02	0.02	0.02

Tabela 4.2: Distribuição sobre $L_0 \times D_0$

X	Y=0	Y=1
00	0.09	0.13
01	0.12	0.16
10	0.15	0.10
11	0.10	0.15

Tabela 4.3: Distribuição sobre $L_1 \times D_1$

Operador	$MSE(\psi)$	$MSE(\phi_\psi)$
1	3.6400	0.5400
2	2.9200	0.4900
3	3.3600	0.5900
4	2.6400	0.5400
5	2.9600	0.5000
6	2.2400	0.4500
7	2.6800	0.5500
8	1.9600	0.5000
9	3.0800	0.5000
10	2.3600	0.4500
11	2.8000	0.5500
12	2.0800	0.5000
13	2.4000	0.4600
14	1.6800	0.4100
15	2.1200	0.5100
16	1.4000	0.4600

Tabela 4.4: MSE para os operadores na restrição \mathbf{Q} e os operadores associados em $L_1^{D_1}$

4.3.4 Análise do erro para restrição de resolução

Nesta seção vamos analisar o erro da restrição, e dar uma representação deste erro em função das varianzas das probabilidades condicionais dentro de cada classe de equivalência. Também rodamos algumas simulações para mostrar o comportamento do erro com e sem restrição.

Sejam $D_0 = L_0^{W_0}$ e $D_1 = L_1^{W_1}$ os espaços de configurações original e restrito por resolução respectivamente, ρ o mapeamento de resolução, e sejam ψ_{opt} e ψ_{opt-c} o operador ótimo sem restrição, sobre D_0 e o operador restrito ótimo, sobre D_1 , respectivamente. O operador ψ_{opt} pode estar dentro o fora da restrição \mathbf{Q}_ρ . Se $\psi_{opt} \in \mathbf{Q}_\rho$ então ele é ótimo em \mathbf{Q}_ρ e, portanto, $\psi_{opt-c} = \psi_{opt}$, e neste caso não existe custo em utilizar a restrição. No segundo caso, se $\psi_{opt} \notin \mathbf{Q}_\rho$, então $\psi_{opt-c} \neq \psi_{opt}$ e existe um custo $\Delta(\psi_1, \psi_0)$ da restrição

O objetivo da restrição é diminuir o custo de estimação, e a sua qualidade depende da relação entre o custo da restrição e o custo de estimação com e sem restrição, dentro de um modelo determinado de imagens. O último ponto é importante ser notado, pois nenhuma restrição pode ser eficiente para todos os possíveis modelos de imagens.

Para examinar esta relação no caso específico de restrição por resolução, vamos supor que temos N pares de exemplos para projetar estatisticamente o operador ótimo, e vamos chamar ψ_N e ψ_{N-c} o estimador, a partir dos N exemplos, do operador ótimo sem restrição ψ_{opt} e do operador restrito ótimo ψ_{opt-c} , respectivamente. Pela equação 2.10, $E[\text{MSE}(\psi_{N-c})] \leq E[\text{MSE}(\psi_N)]$ se e somente se

$$E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{N-c}, \psi_{opt})] \geq \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}). \quad (4.8)$$

e neste caso a restrição é benéfica, pois a esperança do erro do operador estimado na restrição é menor que a esperança do erro do operador estimado sem restrição, onde a esperança da equação 4.8 é sobre todas as possíveis amostras de tamanho N , e depende também da técnica de estimação usada.

O seguinte teorema apresenta uma representação do custo da restrição.

Teorema 4.10 *O custo da restrição tem a seguinte representação:*

$$\Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) = E \left[\text{Var} \left[E[Y|\mathbf{X}] \middle| \mathbf{Z} \right] \right] \quad (4.9)$$

Dem.:

$$\begin{aligned} \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) &= \sum_{\mathbf{x} \in D_0} (\psi_{opt-c}(\mathbf{x}) - E[Y|\mathbf{x}])^2 P(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} (\psi_{opt-c}(\mathbf{z}) - E[Y|\mathbf{x}])^2 P(\mathbf{x}|\mathbf{z}) P(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} E \left[(\psi_{opt-c}(\mathbf{z}) - E[Y|\mathbf{X}])^2 \middle| \mathbf{z} \right] P(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \left(\text{Var} \left[(\psi_{opt-c}(\mathbf{z}) - E[Y|\mathbf{X}]) \middle| \mathbf{z} \right] + E^2 \left[\psi_{opt-c}(\mathbf{z}) - E[Y|\mathbf{X}] \middle| \mathbf{z} \right] \right) P(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \left(\text{Var} \left[E[Y|\mathbf{X}] \middle| \mathbf{z} \right] + \left(\psi_{opt-c}(\mathbf{z}) - E \left[E[Y|\mathbf{X}] \middle| \mathbf{z} \right] \right)^2 \right) P(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \left(\text{Var} \left[E[Y|\mathbf{X}] \middle| \mathbf{z} \right] + (\psi_1(\mathbf{z}) - E[Y|\mathbf{z}])^2 \right) P(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \text{Var} \left[E[Y|\mathbf{X}] \middle| \mathbf{z} \right] P(\mathbf{z}) \\ &= E \left[\text{Var} \left[E[Y|\mathbf{X}] \middle| \mathbf{Z} \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$



Para entender o significado desta expressão, vamos a analisar o caso onde $\mathbf{x} \in C[\mathbf{x}'] \Rightarrow E[Y|\mathbf{x}] = E[Y|\mathbf{x}']$. Neste caso, $\text{Var}[E[Y|\mathbf{X}]|\mathbf{z}] = 0$ para todo $\mathbf{z} \in D_1$ e, portanto, o custo da restrição é zero. Este exemplo representa o caso quando as classes de equivalência agrupam configurações as quais o operador ótimo não restrito associa o mesmo valor. A medida que o valor associado pelo operador ótimo é mais diferente para as configurações de uma mesma classe, maior é a variância dentro dessa classe e, portanto, maior o custo da restrição.

Para analisar e comparar os custos de estimação e restrição foram feitas algumas simulações sobre dois modelos (ou distribuições) Π_1 e Π_2 , projetados para ter custo de restrição ($\Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) = 0$) para dois mapeamentos ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. Para o espaço de observações D_0 usamos 5 variáveis ($n_0 = 5$) e para o espaço restrito D_1 usamos 3 variáveis ($n_1 = 3$), e o modelo é considerado binário ($L_0 = L_1 = L = \{0, 1\}$).

As probabilidades condicionais $P_1(Y = 1|\mathbf{x})$ para a distribuição Π_1 foram definidas a partir das probabilidades condicionais $P_1(Y = 1|\mathbf{z})$ que estão na tabela 4.5 por $P_1(Y = 1|\mathbf{x}) = P_1(Y = 1|\mathbf{z})$ para \mathbf{z} tal que $\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]$, onde as classes de equivalência $C[\mathbf{z}] = \{\mathbf{x} : \rho(\mathbf{x}) = \mathbf{z}\}$ são definidas pelo mapeamento de resolução

$$\rho_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4)$$

. As probabilidades das configurações $P_1(\mathbf{x})$ foram definidas iguais para cada configuração $\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]$, fazendo $P_1(\mathbf{x}) = P_1(C[\mathbf{x}])/4$, onde $P_1(C[\mathbf{x}])$ é dado também na tabela 4.5.

Portanto, as configurações $\mathbf{x} \in D_0$ herdam as probabilidades condicionais das classes de equivalência \mathbf{z} a que elas pertencem. Desta maneira, dentro de cada classe de equivalência todas as configurações têm associado o mesmo valor pelo operador ótimo e, portanto, o custo da restrição é zero, para o mapeamento ρ_1 . Por exemplo, $C[(0, 1, 0)] = \{(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1)\}$ e, portanto, pela tabela 4.5, $P_1(Y = 1|(0, 0, 1, 0, 0)) = P_1(Y = 1|(0, 0, 1, 0, 1)) = P_1(Y = 1|(1, 0, 1, 0, 0)) = P_1(Y = 1|(1, 0, 1, 0, 1)) = 0.0421$, e $P_1(0, 0, 1, 0, 0) = P_1(0, 1, 0)/4 = 0.0164$. A distribuição Π_2 foi definida da mesma maneira, usando a tabela 4.6, e o mapeamento

$$\rho_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_3, x_5)$$

Finalmente, foi definida uma terceira distribuição Π_3 como combinação linear de Π_1 e Π_2 , $P_3(y, \mathbf{x}) = 0.4P_1(y, \mathbf{x}) + 0.6P_2(y, \mathbf{x})$, com as normalizações necessárias para que Π_3 seja uma distribuição de probabilidades. Esta distribuição Π_3 não está particularmente bem definida para nenhum dos dois mapeamentos de resolução ρ_1 ou ρ_2 .

Para cada distribuição simulamos amostras para treinar os operadores ótimos. Para analisar o comportamento para diferentes quantidades de amostras, foram utilizados os valores $N = 10, 20, \dots, 100$ para estas quantidades. Para cada valor de N foram treinados os operadores restrito ótimo, ψ_{N-c} e ótimo sem restrição ψ_N . O operador ótimo sem restrição foi projetado utilizando o estimador da esperança $\hat{E}[Y|\mathbf{x}]$ para as configurações observadas e o estimador da esperança $\hat{E}[Y]$ para as configurações não observadas. O operador ótimo restrito foi projetado utilizando a mesma técnica depois de aplicar o mapeamento de resolução ρ_1 aos exemplos. É importante notar que como foi utilizada o mapeamento de resolução ρ_1 , a distribuição Π_1 vai ter melhor desempenho que Π_2 e Π_3 .

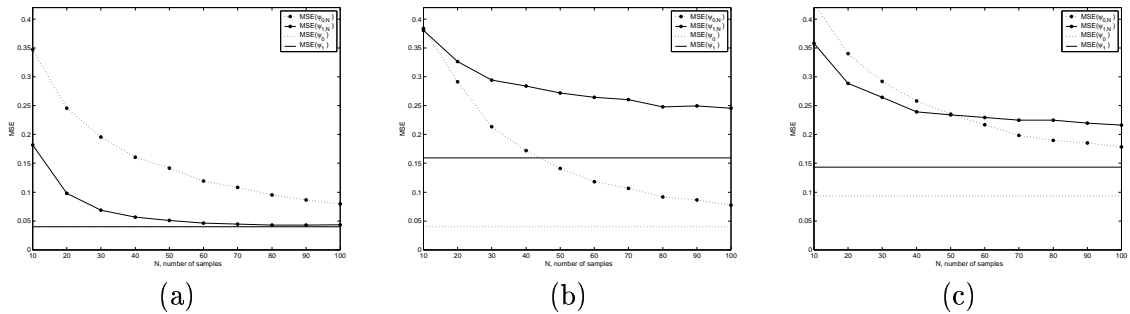
\mathbf{z}	$P(0 \mathbf{z})$	$P(1 \mathbf{z})$	$P(\mathbf{z})$
000	0.9579	0.0421	0.0779
001	0.0421	0.9579	0.2315
010	0.9579	0.0421	0.0657
011	0.0421	0.9579	0.0747
100	0.9579	0.0421	0.1604
101	0.9579	0.0421	0.1681
110	0.0421	0.9579	0.0636
111	0.9579	0.0421	0.1582

Tabela 4.5: Distribuição Π_1 sobre $\{0, 1\} \times D_1$

\mathbf{z}	$P(0 \mathbf{z})$	$P(1 \mathbf{z})$	$P(\mathbf{z})$
000	0.4198	0.5802	0.1376
001	0.4963	0.5037	0.1420
010	0.4643	0.5357	0.1113
011	0.7088	0.2912	0.1565
100	0.9579	0.0421	0.1663
101	0.3544	0.6456	0.0490
110	0.3472	0.6528	0.1029
111	0.3280	0.6720	0.1345

Tabela 4.6: Distribuição Π_2 sobre $\{0, 1\} \times D_1$

As Figuras 4.9(a), 4.9(b) e 4.9(c) mostram o MSE médio, para Π_1 , Π_2 e Π_3 respectivamente, dos operadores ψ_N e ψ_{N-c} , medido sobre 200 repetições do experimentos (isto é, 200 diferentes amostras de tamanho N , para $N = 10, 20, \dots, 100$) Também são mostrados os erros dos operadores ótimos restrito e sem restrição, ψ_{opt} e ψ_{opt-c} , respectivamente, como linhas horizontais, pois eles não dependem da quantidade N de amostras. Na Figura 4.9(a) não é visível o erro de ψ_{opt} pois ele é igual ao erro de ψ_{opt-c} .

Figura 4.9: MSE para a) Π_1 , b) Π_2 e c) Π_3 .

Na Figura 4.9(a), correspondente a Π_1 , o operador restrito tem melhor desempenho que o operador não restrito, pois mesmo sendo o operador ótimo o mesmo nos dois casos, o espaço de operadores restritos \mathbf{Q}_{ρ_1} é menor que o espaço não restrito L^{D_0} e, portanto, a estimação é, neste caso, simplificada e o erro de estimação diminui. Neste caso podemos perceber que se a distribuição é compatível com a restrição, o uso de mais variáveis (neste caso 5 em vez de 3) pode até piorar a estimação do operador ótimo.

Na Figura 4.9(b), correspondente a Ψ_2 , podemos ver que o erro do operador restrito ótimo é muito maior que o erro do operador ótimo não restrito, e mesmo sendo para N pequenos o erro de estimação maior para o projeto sem restrição, o desempenho é melhor que para o projeto restrito. Neste caso é importante notar que, mesmo sendo Π_2 uma distribuição onde a restrição definida por

ρ_2 pode ser benéfica (como no caso de Π_1 com ρ_1), a estimação pode ser muito ruim se é utilizada uma restrição definida por um mapeamento diferente.

A Figura 4.9(c), correspondente a Π_3 , mostra um caso intermédio, onde o erro do operador ótimo é um pouco maior, e onde nem o mapeamento ρ_1 nem o mapeamento ρ_2 são bons mapeamentos para a distribuição (ou seja, onde o custo da restrição é alto para ambos). Neste caso podemos ver que para N pequeno é melhor estimar o operador restrito ótimo, enquanto para N grande é melhor estimar o operador ótimo sem restrição.

Finalmente, a Figura 4.10 mostra um gráfico comparativo do erro dos operadores projetados automaticamente para distintas combinações lineares de Π_1 e Π_2 , obtidos por $P^h(y, \mathbf{x}) = h\dot{P}_1(y, \mathbf{x}) + (1 - h)\dot{P}_2(y, \mathbf{x})$ e a normalização necessária para ser uma distribuição. São mostrados os valores de MSE para $h = 0, 0.1, \dots, 1$ é para $N = 10, 20, \dots, 100$. Aqui podemos ver quanto mais parecida a distribuição Π^h é de Π_1 , maior é a vantagem de usar a restrição.

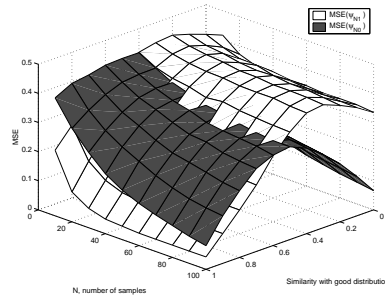


Figura 4.10: MSE para operadores restritos e não restritos

As Figuras 4.11(a), 4.11(b) e 4.11(c) mostram o custo da restrição $\Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt})$ e a diferença média do erro de estimação (estimado sobre as 200 realizações) $E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{N-c}, \psi_{opt-c})]$, para as distribuições Π_1 , Π_2 e Π_3 , respectivamente. Na Figura 4.11(a),

$$\Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt}) = 0$$

, pois o operador ótimo sem restrição está na restrição ($\psi_{opt-c} = \psi_{opt}$) e, portanto, não é visualizada a linha para esse valor.

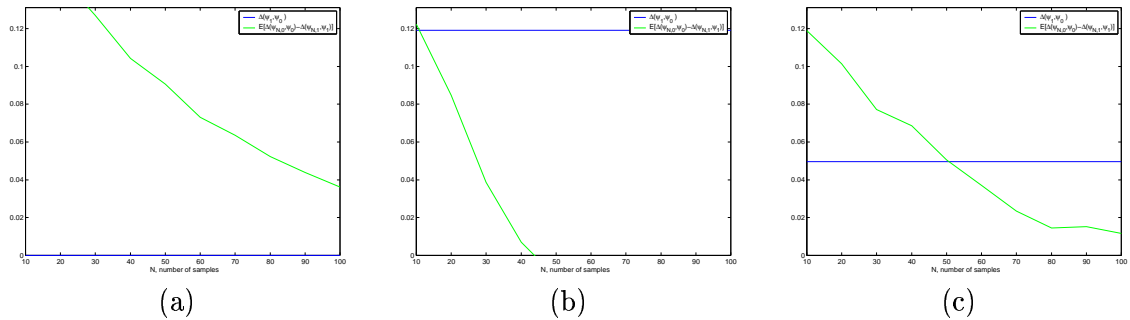


Figura 4.11: Comparação entre $\Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt})$ e $E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{N-c}, \psi_{opt-c})]$ para a) Π_1 , b) Π_2 e c) Π_3 .

A análise dessas curvas, pela equação 4.9 mostra a partir de que valor de N é melhor usar a restrição para cada distribuição. No primeiro caso, de Π_1 , vemos que $E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{N-c}, \psi_{opt-c})] >$

$\Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt})$ para todo N , isto é, que o custo adicional por estimar no espaço sem restrição é maior que o custo da restrição (neste caso zero) e, portanto, a restrição é recomendável. No segundo caso, de Π_2 , vemos que $E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{N-c}, \psi_{opt-c})] \leq \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt})$ para todo N e, portanto, o ganho no custo de estimação não chega a contrarrestar o incremento dado pelo custo da restrição, e é recomendável não usar a restrição. No terceiro caso, de Π_3 , para $N \leq 50$ temos que $E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{N-c}, \psi_{opt-c})] \geq \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt})$ e, portanto, é recomendável a restrição, enquanto que para $N \geq 50$ temos que $E[\Delta(\psi_N, \psi_{opt}) - \Delta(\psi_{N-c}, \psi_{opt-c})] \leq \Delta(\psi_{opt-c}, \psi_{opt})$ e, portanto, a restrição não é recomendável.

Nestes exemplos podemos conferir que o uso da restrição depende de dois fatores principais, a) de quanto é bom o mapeamento de restrição ρ para a distribuição; b) de qual é a quantidade N de amostras a utilizar.

4.3.5 Análise do erro para W -operadores binários

No caso particular dos W -operadores binários, a equação 4.8 pode ser analisada em mais profundidade [78]. Sejam W a janela de observação, $L = \{0, 1\}$ a escala de cinza das imagens, $D_0 = L^W$, D_0 pode ser identificado com o conjunto de partes de W , $\mathcal{P}(W)$. Um W -operador binário está definido por uma função característica $\psi : D_0 \rightarrow L$. Neste caso o incremento de erro de um operador binário ψ pode ser computado em função do operador binário ótimo $\psi_0(\mathbf{x}) = \text{round}(E[Y|\mathbf{x}])$ em lugar de $\psi_0(\mathbf{x}) = E[Y|\mathbf{x}]$. Seja $p_{\mathbf{x}} = P[Y = 1|\mathbf{x}]$, o incremento de erro de ψ comparado com o erro do W -operador binário ótimo ψ_0 sobre D_0 é dado por

$$\Delta(\psi, \psi_{opt}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi] \Delta \mathcal{K}[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} \quad (4.11)$$

onde

$$\delta_{\mathbf{x}} = |2p_{\mathbf{x}} - 1|P(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

é o incremento de erro associado á configuração $\mathbf{x} \in D_0$, e onde $\mathcal{K}[\psi] \Delta \mathcal{K}[\psi_0]$ é o conjunto de configurações onde diferem o operador ψ é o operador ψ_0 .

Se $\psi_{0,N}$ é o operador estimado sobre D_0 com uma amostra de N pares da forma (y, \mathbf{x}) , então $\Delta(\psi_{0,N}, \psi_0)$ é o **custo de estimação**. No caso binário existe uma representação da **precisão** $E[\Delta(\psi_{0,N}, \psi_0)]$ em função das probabilidades condicionais $p_{\mathbf{x}} = P[Y = 1|\mathbf{x}]$ e as probabilidades das configurações $P(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned} E[\Delta(\psi_{0,N}, \psi_0)] &= E\left[\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_{0,N}] \Delta \mathcal{K}[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}}\right] \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \delta_{\mathbf{x}} P[\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_{0,N}] \Delta \mathcal{K}[\psi_0]] \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in D_0} \delta_{\mathbf{x}} P[\psi_{0,N}(\mathbf{x}) \neq \psi_0(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Seja D_1 uma partição de D_0 e seja $\rho : D_0 \rightarrow D_1$ o mapeamento de resolução. A partição D_1 pode ser obtida por exemplo por uma sub-janela $W_1 \subset W$ sendo $\mathbf{x}R\mathbf{x}'$ se e somente se $\mathbf{x}|_{W_1} = \mathbf{x}'|_{W_1}$, e neste caso o mapeamento de resolução é definido por $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x}|_{W_1}$. Vamos supor que ψ_1 é o operador binário sobre D_0 associado ao operador binário ótimo sobre D_1 , e que $\psi_{1,N}$ é o operador binário sobre D_0 associado ao operador projetado sobre D_1 . Nosso interesse é analisar a equação 4.8, que com a nova notação, e rearranjando os termos, pode ser escrita como

$$E[\Delta(\psi_{0,N}, \psi_0)] - E[\Delta(\psi_{1,N}, \psi_1)] \geq \Delta(\psi_1, \psi_0). \quad (4.14)$$

A restrição por resolução definida por D_1 é considerada vantajosa se a equação 4.14 é válida. O termo direito desta equação, chamado de *custo da restrição*, não depende dos dados de treinamento, somente do modelo de imagem e da partição D_1 . Como ψ_1 é associado ao operador ótimo sobre D_1 , e pelo teorema de preservação de erro, o segundo termo pode ser escrito como:

$$E[\Delta(\psi_{1,N}, \psi_1)] = \sum_{\mathbf{z} \in D_1} \delta_{\mathbf{z}} P[\psi_{1,N}(\mathbf{z}) \neq \psi_1(\mathbf{z})] \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{z}} &= |2p_{\mathbf{z}} - 1| P(\mathbf{z}) \\ &= |2P(Y = 1, \mathbf{z}) - P(\mathbf{z})| \\ &= \left| 2 \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} P(Y = 1, \mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} P(\mathbf{x}) \right| \\ &= \left| 2 \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]} 2(p_{\mathbf{x}} - 0.5) P(\mathbf{x}) \right| \\ &= \left| \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] \cap K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} - \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] - K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} \right| \end{aligned} \quad (4.16)$$

Considerando que $2p_{\mathbf{z}} - 1 \geq 0$ se e somente se $\mathbf{z} \in K[\psi_1]$, então

$$\delta_{\mathbf{z}} = \begin{cases} \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] \cap K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} - \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] - K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} & \text{se } \mathbf{z} \in K[\psi_1] \\ - \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] \cap K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} + \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] - K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} & \text{se } \mathbf{z} \notin K[\psi_1] \end{cases} \quad (4.17)$$

e, portanto, se definimos, para $\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]$, $P_1(\mathbf{x}) = P_1(\mathbf{z}) = P[\psi_{1,N}(\mathbf{z}) \neq \psi_1(\mathbf{z})] = P[\psi_{1,N}(\mathbf{x}) \neq \psi_1(\mathbf{x})]$, podemos escrever a equação 4.15 como

$$\begin{aligned} E[\Delta(\psi_{1,N}, \psi_1)] &= \sum_{\mathbf{z} \in K[\psi_1]} \left[\sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] \cap K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} - \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] - K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} \right] P_1(\mathbf{z}) \\ &+ \sum_{\mathbf{z} \notin K[\psi_1]} \left[- \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] \cap K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} + \sum_{\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}] - K[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} \right] P_1(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_1] \cap \mathcal{K}[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} P_1(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_1] \cap \mathcal{K}[\psi_0]^c} \delta_{\mathbf{x}} P_1(\mathbf{x}) \\ &- \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_1]^c \cap \mathcal{K}[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} P_1(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_1]^c \cap \mathcal{K}[\psi_0]^c} \delta_{\mathbf{x}} P_1(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \notin \mathcal{K}[\psi_1] \Delta \mathcal{K}[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} P_1(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_1] \Delta \mathcal{K}[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} P_1(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

É importante notar nesta equação que as configurações que estão no switching set, isto é, $\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_1] \Delta \mathcal{K}[\psi_0]$ contribuem de forma negativa para o erro de estimação do operador projetado sobre D_1 . Este resultado pode induzir a pensar que incrementar o switching set é uma via para melhorar o resultado da restrição, mas, pela equação 4.11, isto vai incrementar também o custo $\Delta(\psi_1, \psi_0)$ da restrição, o que não é desejável. O caminho correto para melhorar a estimação é em função das probabilidades $P_1(\mathbf{x}) = P[\psi_{1,N}(\mathbf{x}) \neq \psi_1(\mathbf{x})]$, que tendem a ser menores que $P_0(\mathbf{x}) = P[\psi_{0,N}(\mathbf{x}) \neq \psi_0(\mathbf{x})]$,

pela quantidade adicional de exemplos disponíveis para estimar ψ_1 com respeito a ψ_0 . Para ver este caso, vamos analisar o caso em que $\psi_1 = \psi_0$. Neste caso $\mathcal{K}[\psi_1]\Delta\mathcal{K}[\psi_0] = \emptyset$, e

$$E[\Delta(\psi_{1,N}, \psi_1)] = \sum_{\mathbf{x} \notin \mathcal{K}[\psi_1]\Delta\mathcal{K}[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} P_1(\mathbf{x}) \quad (4.19)$$

e a restrição é vantajosa se, pelas equações 4.9, 4.13 e 4.18,

$$\sum_{\mathbf{x} \notin \mathcal{K}[\psi_1]\Delta\mathcal{K}[\psi_0]} \delta_{\mathbf{x}} (P_0(\mathbf{x}) - P_1(\mathbf{x})) \geq 0 \quad (4.20)$$

Nesta última equação é visível a vantagem de usar a restrição, pois é de esperar que a estimação seja melhor para ψ_1 que para ψ_0 e, portanto, é de esperarse que $P_0(\mathbf{x})$ seja maior que $P_1(\mathbf{x})$ e, portanto, a restrição vantajosa.

4.4 Projeto Multiresolução

Nesta seção mostramos como podemos concatenar restrições por resolução espacial e algumas conseqüências desta técnica. Sejam as janelas $W_2 \subset W_1 \subset W_0$, onde as configurações sobre W_0 são obtidas por observação na imagem, e as configurações sobre W_1 e W_2 por amostragem espacial sobre W_0 e W_1 , respectivamente. Sejam os espaços de observações definidos por $D_0 = L^{W_0}$, $D_1 = L^{W_1}$ e $D_2 = L^{W_2}$. Neste caso vamos supor que a escala de cinzas L das configurações é similar à escala de cinza da imagem ideal.

O mapeamento entre as configurações em D_0 e D_1 está definido por $\rho_1 : D_0 \rightarrow D_1$, e entre D_1 e D_2 está definido por $\rho_2 : D_1 \rightarrow D_2$. Os mapeamentos ρ_1 e ρ_2 definem um mapeamento de resolução $\rho_{12} : D_0 \rightarrow D_2$, por $\rho_{12} = \rho_2 \circ \rho_1$, isto é, $\rho_{12} : D_0 \xrightarrow{\rho_1} D_1 \xrightarrow{\rho_2} D_2$

Isto pode ser analisado de forma mais geral, não somente para restrições espaciais. Sejam D_0 , D_1 e D_2 espaços de configuração relacionados pelos mapeamentos de resolução $\rho_1 : D_0 \rightarrow D_1$ e $\rho_2 : D_1 \rightarrow D_2$, onde D_1 é uma partição sobre D_0 e D_2 é uma partição sobre D_1 , e as classes de equivalência estão definidas por $\mathbf{x}R\mathbf{x}'$ se e somente se $\rho_1(\mathbf{x}) = \rho_1(\mathbf{x}')$, para $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in D_0$, e $\mathbf{z}S\mathbf{z}'$ se e somente se $\rho_2(\mathbf{z}) = \rho_2(\mathbf{z}')$, para $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in D_1$. A partição D_2 sobre D_1 pode ser considerada também uma partição (ou relação de equivalência) sobre D_0 , por $\mathbf{x}R'\mathbf{x}'$ se e somente se $\rho_{12}(\mathbf{x}) = \rho_{12}(\mathbf{x}')$, para $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in D_0$, identificando cada classe $C_{12}[\mathbf{x}] \subset D_0$ com a classe $C_2[\mathbf{z}] \subset D_1$ para quaisquer $\mathbf{z} = \rho_1(\mathbf{x})$.

A partição definida por D_2 sobre D_0 é menor que a definida por D_1 , no sentido que tem menos elementos, mas também tem a propriedade que as partições são encaixadas, no sentido de que se $\mathbf{x}R\mathbf{x}'$ então $\mathbf{x}R'\mathbf{x}'$, pois se $\rho_1(\mathbf{x}) = \rho_1(\mathbf{x}')$ então $\rho_{12}(\mathbf{x}) = \rho_{12}(\mathbf{x}')$.

A comparação dos custos de restrição para diferentes níveis de resolução requer subtração de equações da forma dada na equação 4.9. Para analisar o problema em forma mais geral (mais de 2 níveis de resolução), podemos definir uma seqüência de partições D_1, D_2, D_3, \dots sobre o espaço D_0 , e dos respectivos mapeamentos de resolução $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$, onde $\rho_k : D_{k-1} \rightarrow D_k$. Para o espaço D_k , chamamos de ψ_k o operador ótimo nesse espaço, isto é, ψ_0 é o operador ótimo sem restrições, ψ_1 é o operador ótimo sobre a restrição \mathbf{Q}_{ρ_1} definida por D_1 e ρ_1 , e assim por diante.

Pela equação 4.8, a restrição multiresolução é benéfica para a restrição \mathbf{Q}_{ρ_k} , definida pela partição D_k através da composição de mapeamentos $(\rho_k \circ \rho_{k-1} \circ \dots \circ \rho_1)$ se

$$E[\Delta(\psi_{0,N}, \psi_0) - \Delta(\psi_{k,N}, \psi_0)] \geq \Delta(\psi_k, \psi_0) \quad (4.21)$$

Quando a análise multiresolução é realizada por partições sucessivas, os filtros ótimos ψ_{k-1} e ψ_k estão relacionados por

$$\Delta(\psi_k, \psi_{k-1}) = E \left[\text{Var} \left[E[Y|\mathbf{Z}] \middle| \mathbf{W} \right] \right] \quad (4.22)$$

onde \mathbf{W} toma valores em D_k com a distribuição de probabilidades associada, e para cada $\mathbf{w} \in D_k$, \mathbf{Z} toma valores em $C[\mathbf{w}] = \{\mathbf{z} \in D_{k-1} : \rho_k(\mathbf{z}) = \mathbf{w}\} \subset D_{k-1}$. Podemos definir os mapeamentos $\rho'_k = \rho_k \circ \rho_{k-1} \circ \dots \circ \rho_1$, com $\rho'_k : D_0 \rightarrow D_k$ sendo mapeamentos de resolução diretamente de D_0 para cada D_k . Com esse mapeamento, os filtros ótimos ψ_0 e ψ_k estão relacionados por

$$\Delta(\psi_k, \psi_0) = E \left[\text{Var} \left[E[Y|\mathbf{X}] \middle| \mathbf{W} \right] \right] \quad (4.23)$$

onde \mathbf{W} toma valores em D_k , e para cada $w \in D_k$ $\mathbf{X} \in C[\mathbf{w}] = \{\mathbf{x} \in D_0 : \rho(\mathbf{x}) = \mathbf{w}\} \subset D_0$. As equações 4.22 e 4.23 mostram duas formas de calcular o incremento de erro para o operador ótimo ψ_k sobre o espaço restrito \mathbf{Q}_{ρ_k} , primeiro como soma dos incrementos de erro para cada mapeamento individual, e segundo como função da classe de equivalência induzida sobre D_0 pelo mapeamento composto $\rho'_k = \rho_k \circ \rho_{k-1} \circ \dots \circ \rho_1$.

Como exemplo de esquema multiresolução, a Figura 4.12 mostra um esquema de pirâmide com duas etapas, onde a restrição de resolução é espacial nos dois casos.

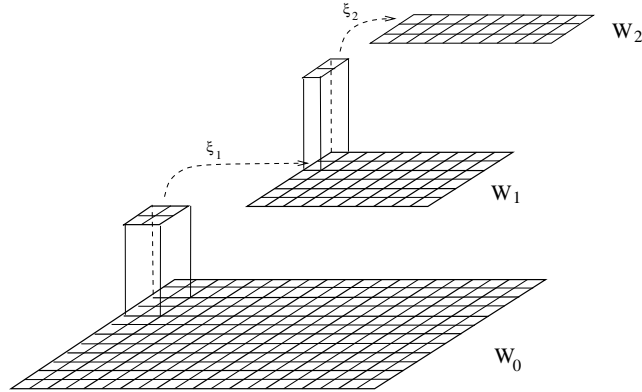


Figura 4.12: Estrutura de pirâmide

4.4.1 Projeto piramidal de operadores restritos por resolução

A metodologia de projeto de operadores restritos por resolução, como apresentado aqui, consiste em obter um estimador $\psi_{N,k}$ do operador ótimo restrito à resolução k , sobre o espaço de configurações D_k , e aplica-lo as configurações observadas em D_0 , fazendo $\psi'_k(\mathbf{x}) = \psi_k(\rho_k(\mathbf{x}))$. Pela identificação entre ψ'_k e ψ_k , a partir de agora vamos chamar os dois ψ_k quando não haja dúvida sobre o domínio (D_0 ou D_k).

Esta metodologia de projeto de operadores permite usar uma resolução menor quando suspeitamos que a estimação vai ser ruim na resolução maior. Mas às vezes para algumas configurações $\mathbf{x} \in D_0$ a estimação de $E[Y|\mathbf{x}]$ é boa, e ela não é utilizada, pois somente é estimado $E[Y|\rho_k(\mathbf{x})]$.

Os erros de estimação do operador ótimo sobre D_0 se devem a dois fatores, ao erro de estimação de $E[Y|\mathbf{x}]$ para as configurações $\mathbf{x} \in D_0$ observadas nos pares de treinamento, e ao erro de estimação

$E[Y|\mathbf{x}]$ para as configurações $\mathbf{x} \in D_0$ não observadas nos pares de treinamento. O primeiro caso é justamente o problema de estimar uma esperança a partir de uma amostra. No segundo caso, o erro depende da metodologia adotada para generalizar a estimação para observações não observadas, entre elas podemos listar:

- Associar um valor aleatório para as configurações não observadas
- Associar $\psi_N(\mathbf{x}) = \text{round}(E[Y])$ para todas as configurações não observadas
- Aplicar o algoritmo ISI [74, 79, 80] para realizar a generalização
- Associar $\psi_N(\mathbf{x}) = \psi_N(\mathbf{x}')$ para a configuração \mathbf{x}' observada mais próxima a \mathbf{x}

Cada uma destas técnicas induz um erro diferente para as configurações não observadas. O primeiro caso foi estudado no caso binário dentro do problema da correção do erro do operador projetado [81].

Uma via alternativa para o projeto de operadores é de somente resolver o segundo caso pela restrição de resolução, utilizando a estimação sobre D_0 quando tiver dados nos exemplos para estimar $E[Y|\mathbf{x}]$, e usando o mapeamento de resolução ρ_k para estimar $E[Y|\rho_k(\mathbf{x})]$ quando \mathbf{x} não foi observado nos exemplos. Isto é, se temos uma boa estimativa de $E[Y|\mathbf{x}]$ e $\psi_{0,N}(\mathbf{x}) \neq \psi_{k,N}(\mathbf{x})$, então parece prudente usar $\psi_{0,N}(\mathbf{x})$ em lugar de $\psi_{k,N}(\mathbf{x})$. Por outro lado, se temos uma estimação muito ruim de $E[Y|\mathbf{x}]$, ou não podemos estima-lo, então pode ser benéfico utilizar $\psi_{k,N}(\mathbf{x})$.

Definição 4.11 *Sejam D_0, D_1, \dots, D_m os espaços de configurações, com os mapeamentos de resolução $\rho_k : D_0 \rightarrow D_k$, sejam $\psi_{k,N}$ os operadores restritos por resolução sobre D_k treinados a partir de N amostras, e seja $N(\mathbf{x})$ a quantidade de vezes que a configuração \mathbf{x} foi observada nos exemplos, um **Operador híbrido multiresolução** é definido por*

$$\psi_{(0,\dots,m),N}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi_{0,N}(\mathbf{x}), & \text{if } N(\mathbf{x}) > 0 \\ \psi_{1,N}(\mathbf{x}), & \text{if } N(\mathbf{x}) = 0, N(\rho_1(\mathbf{x})) > 0 \\ \vdots & \\ \psi_{m-1,N}(\mathbf{x}), & \text{if } N(\mathbf{x}) = 0, \dots, N(\rho_{m-2}(\mathbf{x})) = 0, N(\rho_{m-1}(\mathbf{x})) > 0 \\ \psi_{m,N}(\mathbf{x}), & \text{if } N(\mathbf{x}) = 0, \dots, N(\rho_{m-1}(\mathbf{x})) = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Uma pequena mudança desta definição pode requerer $N(\mathbf{x}) > \tau$ para um limiar τ , para evitar uma estimação ruim de $E[Y|\mathbf{x}]$.

O projeto de operadores híbridos multiresolução pode ser visto como uma técnica de generalização [82], onde a generalização para as configurações não observadas num nível da pirâmide é dada pelos seguintes níveis.

O seguinte exemplo mostra uma comparação entre o projeto piramidal e o projeto não piramidal, onde pode ser conferida a principal vantagem desta técnica, que é de evitar o incremento de erro para janelas grandes. Neste exemplo usamos uma seqüência de janelas quadradas W_0, W_1, W_2, W_3 e W_4 de tamanho $9 \times 9, 7 \times 7, 5 \times 5, 3 \times 3$ e 1×1 respectivamente, para eliminar ruído de diferentes tamanhos (Fig. 4.13 a) de uma imagem obtida a partir de um modelo Booleano de discos (Fig. 4.13 b) A Figura 4.14 mostra o erro do operador morfológico binário projetado estatisticamente, em função do tamanho máximo da janela. Podemos ver que, como é de esperar, o erro do projeto clássico diminui a principio, mas logo começa crescer. Inicialmente o erro é devido ao pequeno tamanho

da janela (só um ponto) e depois o incremento de erro é devido ao erro de estimação para janelas grandes. O melhor compromisso entre os dois erros é atingido com a janela 3×3 . No caso do projeto piramidal, o erro continua decrescendo para as janelas grandes, pois a boa estimação da janela 3×3 é aproveitada quando necessária.

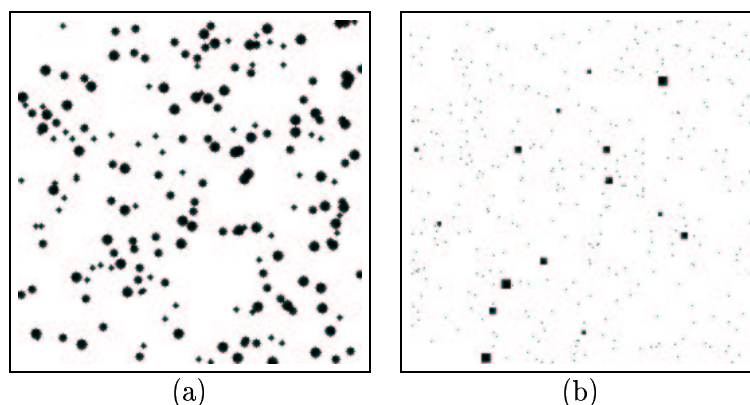


Figura 4.13: (a) Imagem ideal (b) exemplo de ruído adicionado

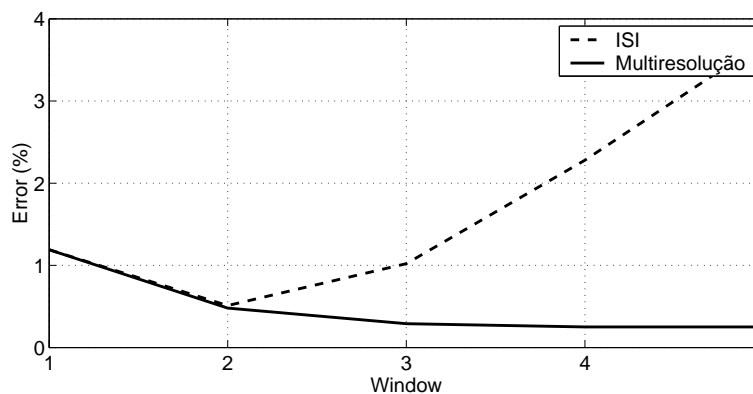


Figura 4.14: Erro em função do tamanho da janela

4.5 Exemplos de aplicação

Nesta seção vamos a mostrar alguns exemplos de aplicação da técnica de projeto multiresolução, comparando os resultados com outras técnicas. No primeiro caso vamos aplicar a técnica em imagens sintéticas em níveis de cinza com poucos níveis de cinza (16), com o objetivo de corrigir borramento, o segundo exemplo vai ser similar, mas com imagens com 64 níveis de cinza. Nos dois exemplos vão ser utilizadas diferentes pirâmides para comparação dos resultados.

4.5.1 Correção de borramento em imagens 2D com 16 níveis de cinza

Neste exemplo foram projetados operadores para a correção do borramento em imagens geradas por um modelo Booleano [76], com uma função primária em forma de pirâmide, com no máximo 16 níveis de cinza. O borramento foi gerado por uma janela de convolução 3×3 (Fig. 4.15).

1	2	1
2	3	2
1	2	1

Figura 4.15: Janela de convolução

Para os experimentos geramos 20 imagens do modelo Booleano de 256×256 pixels de tamanho, e aplicamos o borramento nelas. A Figura 4.16 mostra uma parte de uma destas imagens, antes e depois do borramento.

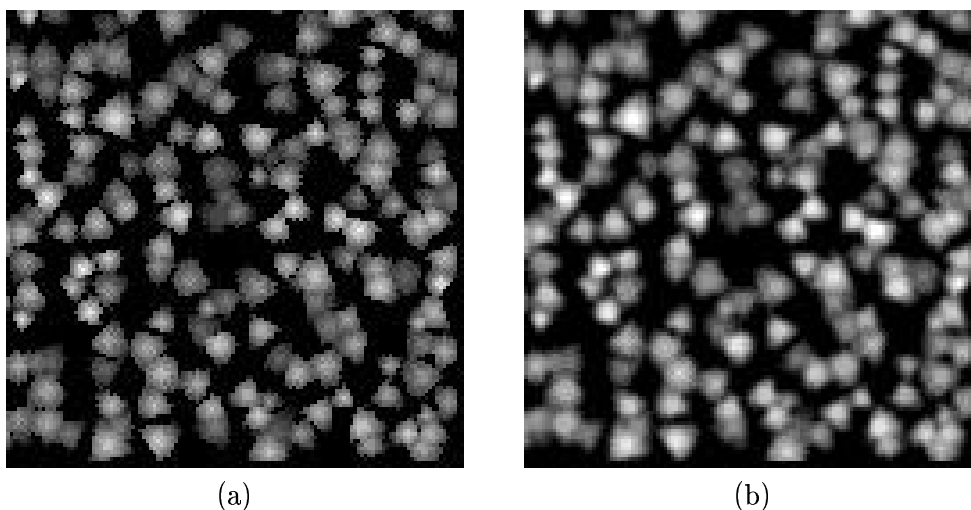


Figura 4.16: Imagens Booleanas: (a) Parte de uma imagem (b) depois do borramento

Das 20 imagens, 10 imagens foram usadas para treinar os operadores e as outras 10 imagens foram usadas para estimar o erro destes operadores. Os operadores multiresolução foram treinados com diferentes esquemas de pirâmides, e todos eles foram aplicados nas imagens de teste para computar o erro MSE. Os resultados foram comparados com resultados prévios apresentados em trabalhos anteriores [35] onde foram analisados os desempenhos de operadores lineares e Aperture. Para evitar diferenças, foram usadas as mesmas imagens de treinamento e teste para projetar os operadores multiresolução. A Figura 4.17 mostra o gráfico de erro MSE comparado para alguns dos melhores operadores. Cada curva representa um operador diferente, que pode ser linear, Aperture, ou multiresolução com diferentes esquemas de pirâmides. O eixo X representa a quantidade de dados de treinamento e o eixo Y representa o erro quadrático médio (MSE) estimado sobre as 10 imagens de teste.

A linha horizontal rotulada como “blured!” representa o erro da imagem borrada, ou seja a

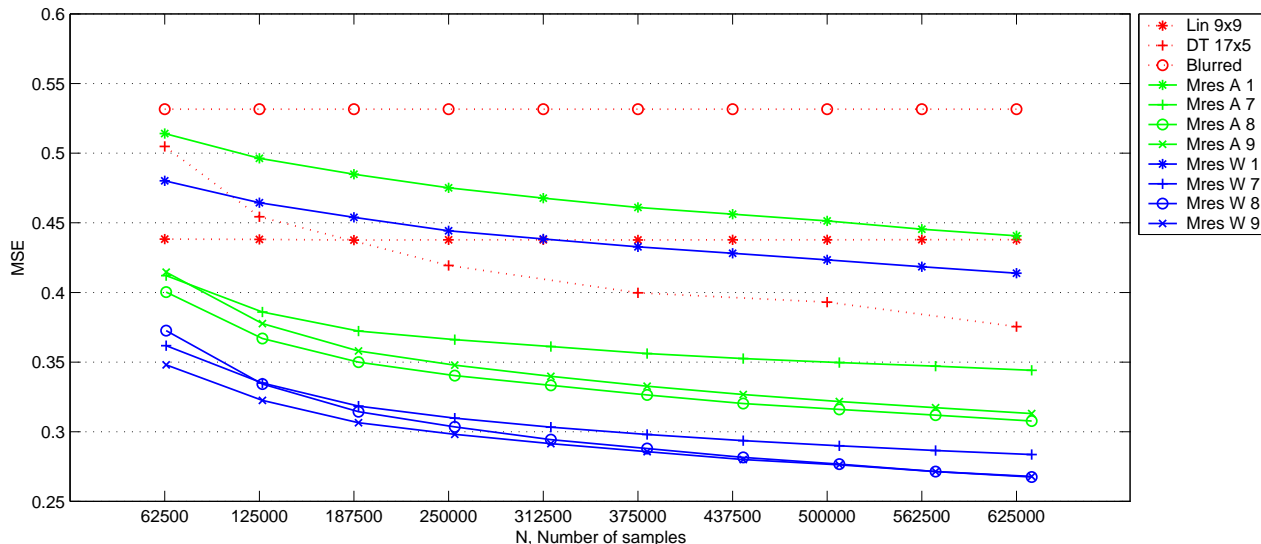


Figura 4.17: MSE para 16 níveis de cinza

diferença entre esta e a imagem ideal. A curva rotulada como *Lin* 9×9 mostra o resultado do operador linear projetado estatisticamente sobre uma janela 9×9 . As Figuras 4.18 (a) e 4.18 (b) mostram as pirâmides usadas para projetar os *W*-operadores multiresolução rotulados como *MresW*1 e *MresW*7, respectivamente.

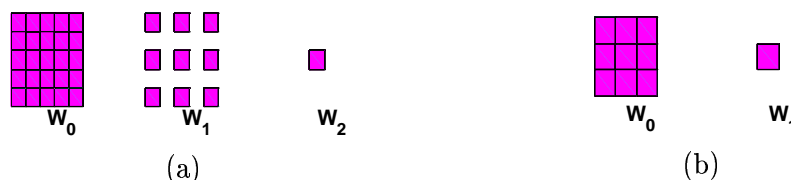


Figura 4.18: Pirâmides para os operadores “Mres W 1” e “Mres W 7”

As Figuras 4.19 (a) e 4.19 (b) mostram as pirâmides usadas para projetar os *W*-operadores multiresolução rotulados como *MresW*8 e *MresW*9, respectivamente. A curva rotulada como *DT* 17×5 é um operador Aperture projetado sobre uma janela de 17 pontos dentro de uma janela 5×5 , chamada W_0 na pirâmide da Figura 4.19. As curvas rotuladas como *MresA*1, *MresA*7, *MresA*8 e *MresA*9 mostram o erro de Apertures multiresolução usando as mesmas pirâmides que os *W*-operadores multiresolução *MresW*1, *MresW*7, *MresW*8 e *MresW*9, respectivamente, com uma janela de níveis de cinza K , com $k = 5$.

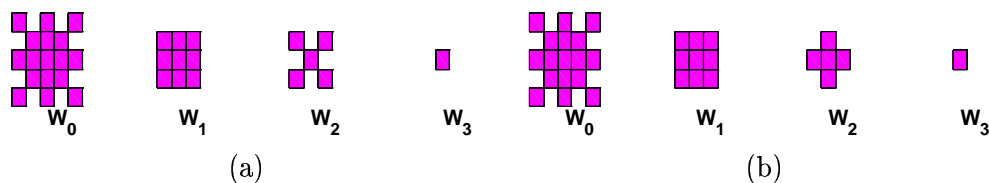


Figura 4.19: Pirâmides para os operadores “Mres W 8” e “Mres W 9”

No gráfico podemos ver que a maior parte dos operadores não lineares tem melhor desempenho que o operador linear, o qual estabiliza em um $MSE=0.438$, mesmo que ele seja projetado numa janela muito maior (testes com janelas menores não melhoraram o resultado). Nestes exemplos os operadores multiresolução $MresA1$ e $MresW1$ não tem um desempenho tão bom como o Aperture não multiresolução (17×5). Os melhores resultados podem ser observados, em seqüência, nos operadores $MresW8$, $MresW9$, $MresW7$, $MresA9$, $MresA8$ e $MresA7$. O melhor desempenho dos W -operadores multiresolução sobre os Aperture multiresolução pode ser justificado pelo fato das imagens terem somente 16 níveis de cinza e, portanto, o custo de estimação dos W -operadores não é maior que o custo da restrição dos Apertures. Mas nos dois casos eles tem melhor desempenho que os operadores lineares ou Aperture.

4.5.2 Correção de borrimento em imagens 2D com 64 níveis de cinza

Este exemplo é similar ao anterior, mas com uma mudança no modelo das imagens para analisar um caso onde esperamos que os operadores Aperture tem melhor desempenho que os W -operadores. Este novo modelo vai ter um fundo variável, com certa suavidade.

O novo modelo de imagens foi criado adicionando uma superfície suave as imagens do modelo Booleano de 16 níveis de cinza. Foram geradas 20 imagens definidas por funções suaves. Cada uma delas foi gerada selecionando 4 níveis de cinza aleatoriamente com distribuição uniforme no intervalo $[0,50]$, um valor para cada canto da imagem, e gerando uma superfície de interpolação conectando os 4 pontos. A imagem final é obtida somando as superfícies com as imagens das pirâmides do exemplo anterior. A Figura 4.20 mostra uma imagem original de 16 níveis de cinza com a superfície (ou fundo) adicionado, em uma vista 3D. O borrimento foi gerado com a mesma janela de convolução da Figura 4.15. A Figura 4.21a) mostra parte de uma imagem resultante da adição do fundo variável, e a Figura 4.21c) mostra o resultado do borrimento. .

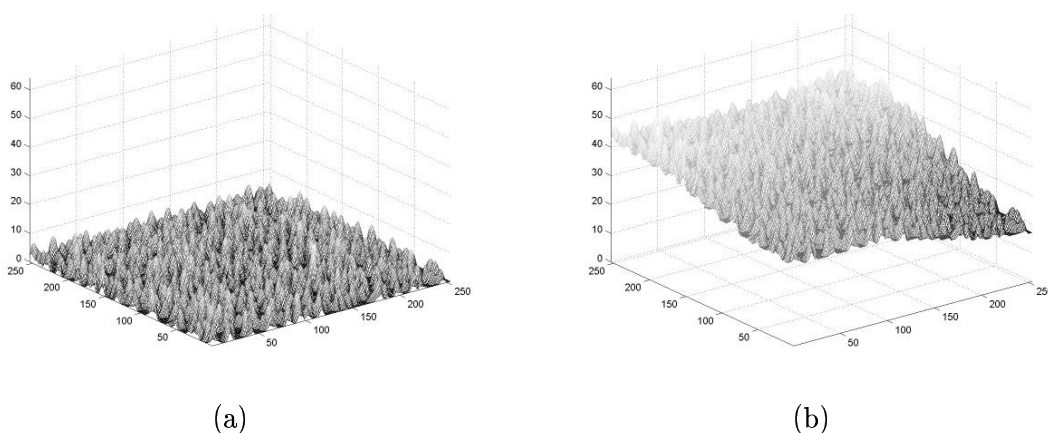


Figura 4.20: Modelo de imagem: a) original, b) combinado com o fundo variável

Como no exemplo anterior, foram usadas 10 imagens para treinamento e 10 imagens para teste. Isto é, 10 imagens foram usadas para estimar os operadores ótimos, linear, Aperture, Aperture multiresolução e W -operador multiresolução. Outras 10 imagens foram usadas para estimar o erro desses operadores.

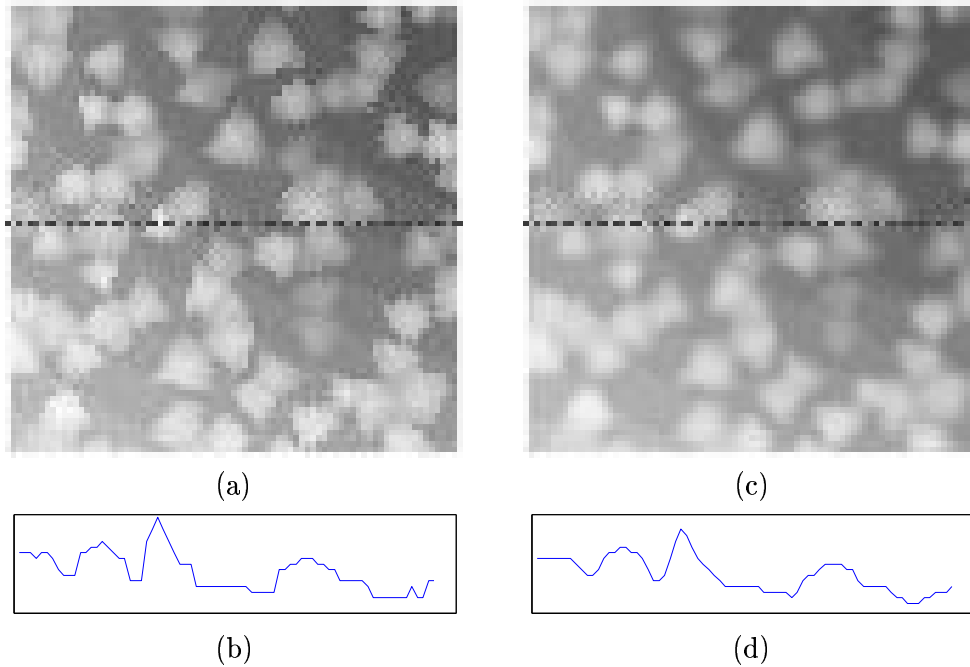


Figura 4.21: Modelo de imagem:(a) Imagem combinada (b) seção. (c) Imagem borrada, (d) seção

A Figura 4.22 mostra o erro MSE para alguns dos melhores operadores de cada classe. A linha horizontal rotulada como “blured!” representa o erro da imagem borrada, ou seja, a diferença entre esta e a imagem ideal. A curva rotulada como *Lin9 × 9* mostra o resultado do operador linear projetado estatisticamente sobre uma janela 9×9 . As curvas rotuladas como *MresA6*, *MresA8*, *MresA9* e *MresW8* mostram o erro para os operadores Aperture com as pirâmides 6,8 e 9, e o *W*-operador 8, usando as pirâmides das Figuras 4.23a),4.23b), 4.24a) e 4.23b) respectivamente.

Os operadores Aperture foram treinados com a mesma janela na escala de cinzas K , com $k = 5$. As curvas rotuladas *DT6* e *DT15* mostram o erro MSE para o operador Aperture projetado usando uma janela quadrada 3×3 e uma janela de 17 pontos, respectivamente.

O *W*-operador multiresolução de melhor desempenho é o *MresW8*, e mesmo assim o desempenho não é bom, com certeza devido à maior quantidade de níveis de cinza, fazendo o espaço de configurações e, portanto, o custo de estimação muito grande. O operador Aperture (não multiresolução) *DT15* tem melhor desempenho que *MresW8*, mas pelo tamanho da janela, ainda o custo de estimação é muito alto. Já o operador Aperture não multiresolução *DT6* tem melhor desempenho, por usar uma janela menor.

Pode se ver que o operador Aperture multiresolução *MresA6* tem um desempenho ainda melhor que *DT6* para N pequeno, mas para N grande eles tem quase o mesmo desempenho, com uma leve vantagem para *DT6*. Um ponto importante é que aqui os operadores Aperture multiresolução *MresA8* e *MresA9* tem melhor desempenho que os *W*-operadores multiresolução e mesmo os operadores Aperture não multiresolução. A única diferença entre *MresA8* e *MresA9* é a janela W_2 da pirâmide, o que permite conferir como o projeto da pirâmide pode influir diretamente no resultado, pois mesmo sendo as duas janelas de 5 pontos, a cruz diagonal funciona melhor que a cruz horizontal-vertical. No gráfico podemos ver também que os três operadores Aperture multiresolução têm melhor desempenho que o operador linear (*Lin9 × 9*).

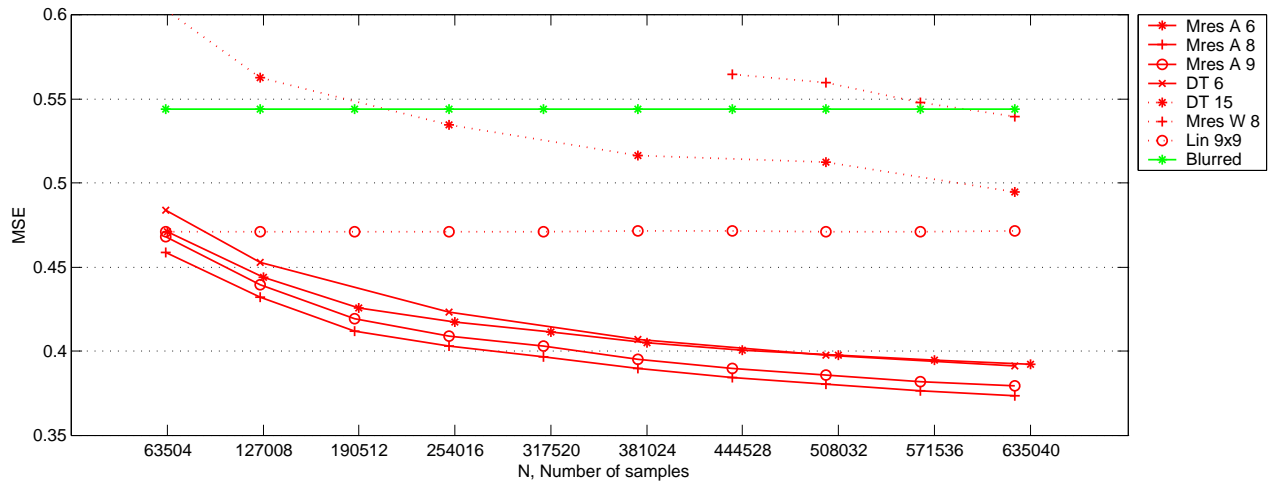


Figura 4.22: MSE para 64 níveis de cinza

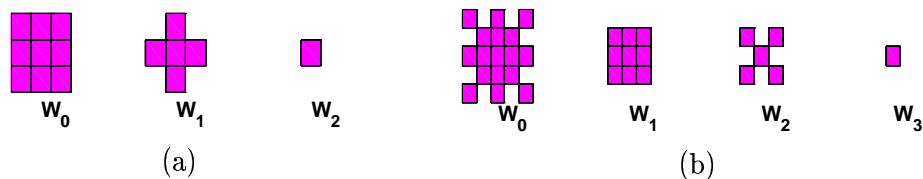


Figura 4.23: Pirâmides para operadores “6” e “8”

A Figura 4.25 mostra como o projeto piramidal melhora a estimação para janelas grandes. As duas curvas representam o erro dos operadores em função do tamanho da janela, no caso do operador Aperture, e em função do tamanho da última janela da pirâmide, no caso do operador Aperture multiresolução. Em ambos os casos para a mesma quantidade de exemplos N . A Figura 4.26 mostra as pirâmides utilizadas para projetar os operadores Aperture multiresolução e as janelas utilizadas para projetar os operadores Aperture.

A curva de erro para o operador Aperture mostra o problema clássico em projeto de operadores: o erro diminui com uma janela maior, mas quando continua crescendo a janela ele volta a crescer, pelo erro de estimação. Neste caso o melhor resultado é obtido para a janela W_2 , e depois o erro cresce muito rapidamente para as janelas W_1 e W_0 .

A diferença do operador Aperture, a curva do operador Aperture multiresolução mostra uma das grandes vantagens do projeto piramidal: o erro tem tendência a diminuir quando a janela cresce.

As Figuras 4.27 a 4.32 mostram o resultado dos operadores testados sobre uma pequena região

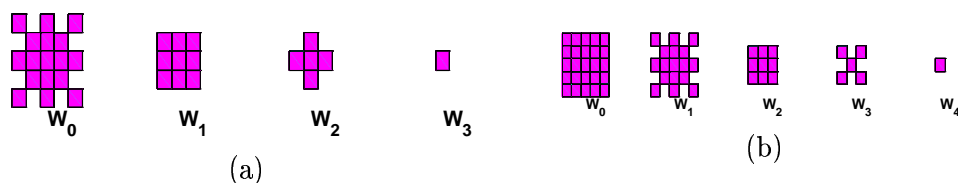


Figura 4.24: Pirâmides para operadores “9” e “11”

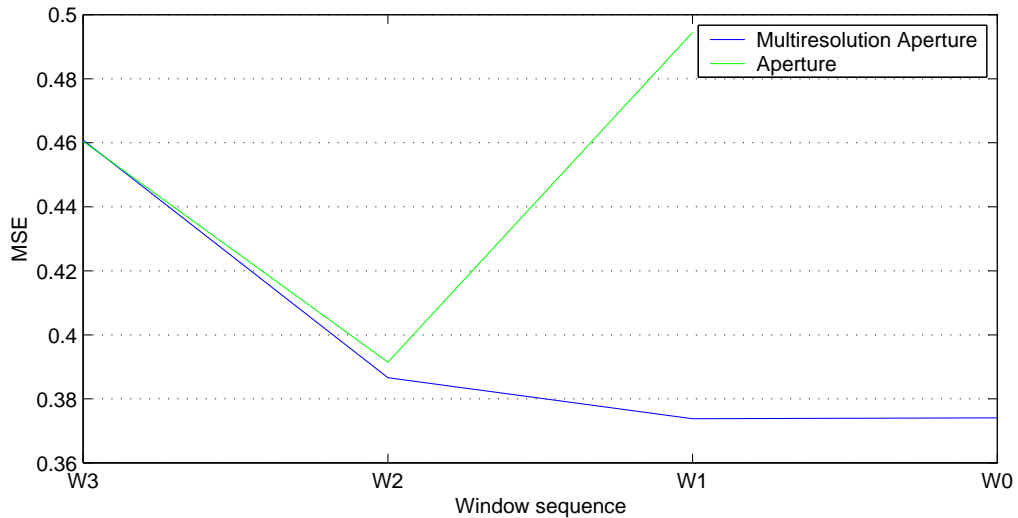


Figura 4.25: MSE erro: multiresolução × não-multiresolução

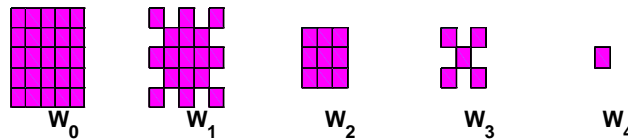


Figura 4.26: Pirâmides: $\{W_3, W_4\}$, $\{W_2, W_3, W_4\}$, \dots , $\{W_0, W_1, W_2, W_3, W_4\}$

de uma imagem de teste. As imagens correspondem à imagem original, o seu borramento, e à aplicação dos operadores linear, W -operador multiresolução, Aperture não multiresolução e Aperture multiresolução.

As Figuras 4.27 e 4.28 mostram uma região de 500 pontos da imagem original e a imagem borrada. Na imagem borrada tem 161 pontos (marcados com as bordas pretas) com valores diferentes da imagem ideal. A maior parte desses pontos tem diferença de um nível de cinza (129 pontos) ou dois níveis de cinza (30 pontos). O MSE estimado para essa região é de 0.524.

A Figura 4.29 mostra o resultado do filtro linear ótimo sobre uma janela 9×9 . O erro MSE cai a 0.434, mas a quantidade de pontos com erro não diminui. A diminuição do MSE se deve somente a pontos que tinham diferença maior que um, e que agora tem diferença um.

A Figura 4.30 mostra o resultado do melhor W -operador multiresolução. Neste caso o MSE aumenta a 0.552, mas a quantidade de pontos com erro cai para 130. Isto se deve a um incremento nas diferenças de níveis de cinza em alguns desses pontos.

A Figura 4.31 mostra o resultado do melhor operador Aperture não multiresolução, sobre uma janela de 17 pontos. Neste caso diminuem tanto o MSE para 0.3420 como a quantidade de pontos com erro para 89, e podemos conferir visualmente a melhora nas bordas das pirâmides.

Finalmente, a Figura 4.32 mostra o resultado do operador Aperture multiresolução, sobre uma janela de 17 pontos, obtendo o menor erro MSE de 0.222 e somente 73 pontos com diferente nível de cinza. Na figura podemos ver como o resultado nas bordas é ainda melhor que no Aperture não multiresolução.

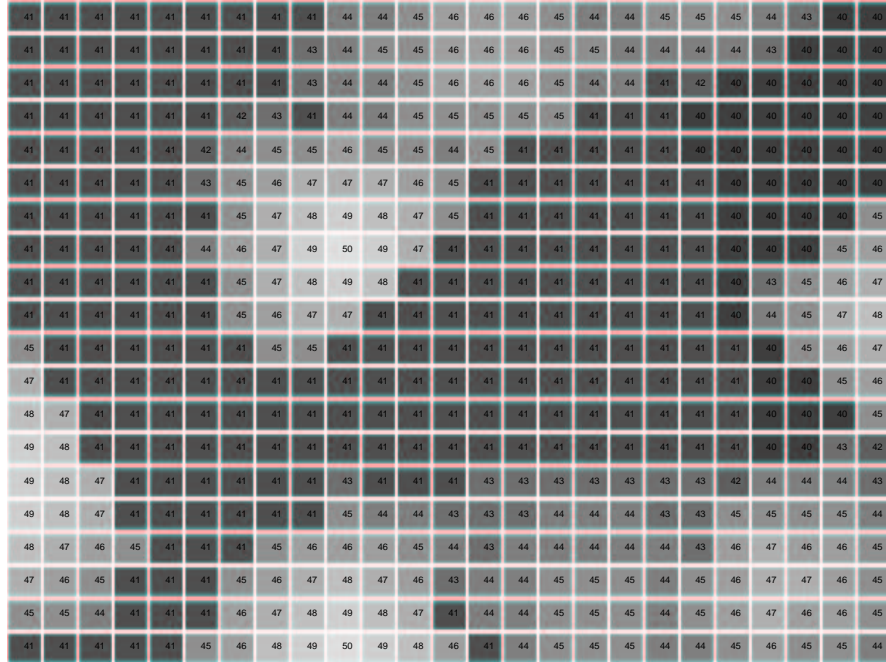


Figura 4.27: Imagem original

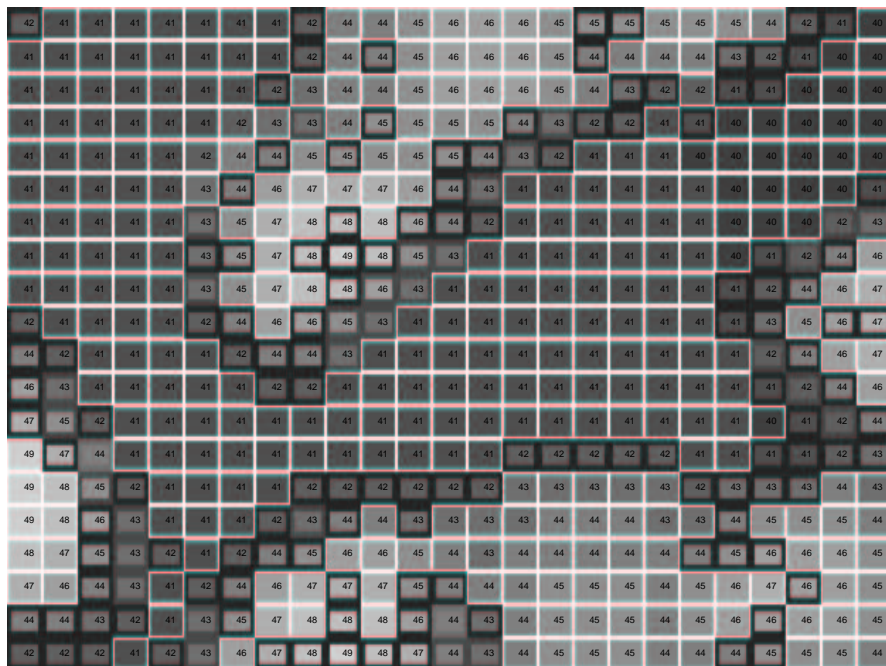


Figura 4.28: Imagem borrada

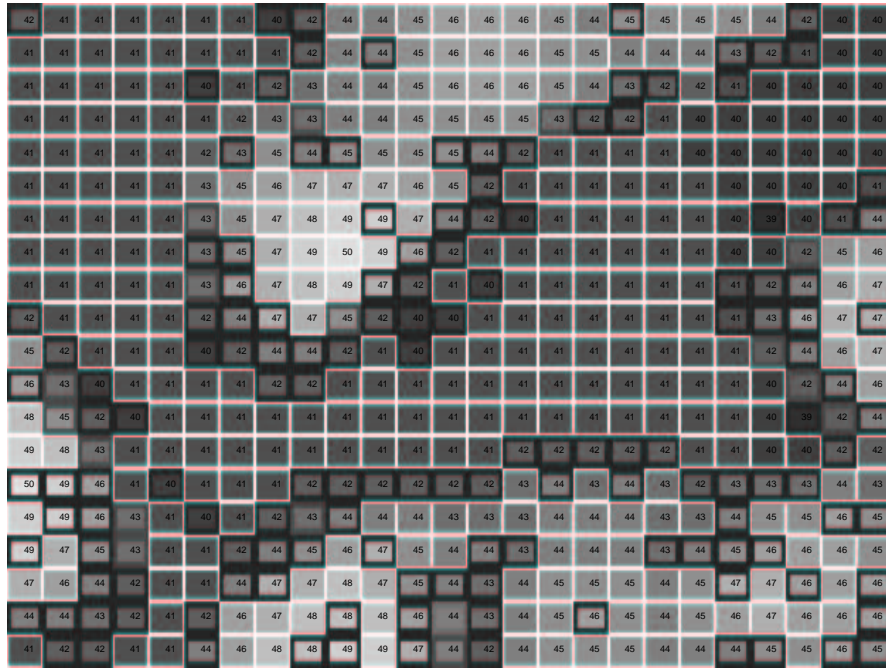


Figura 4.29: Operador linear

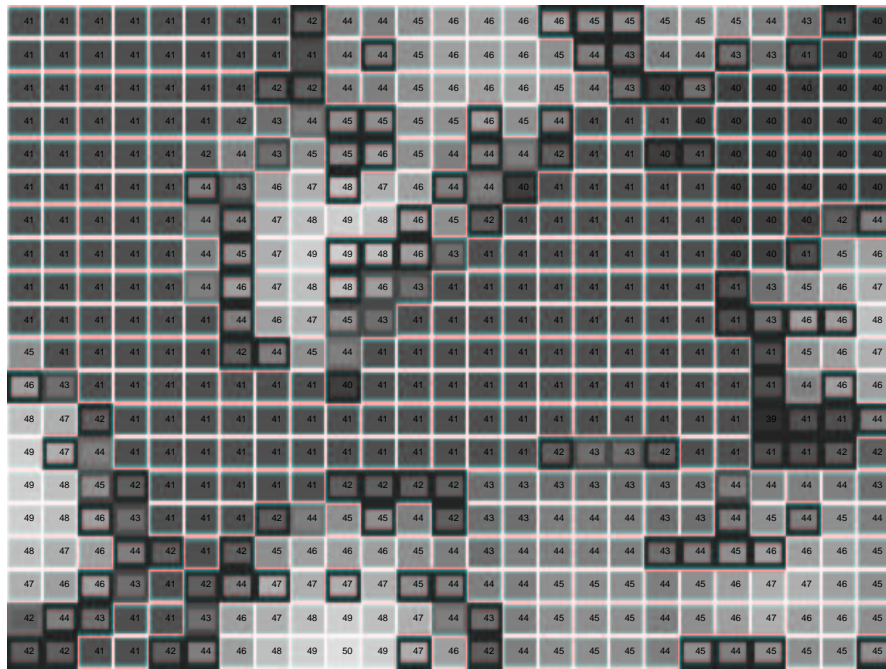


Figura 4.30: W -operador multiresolução

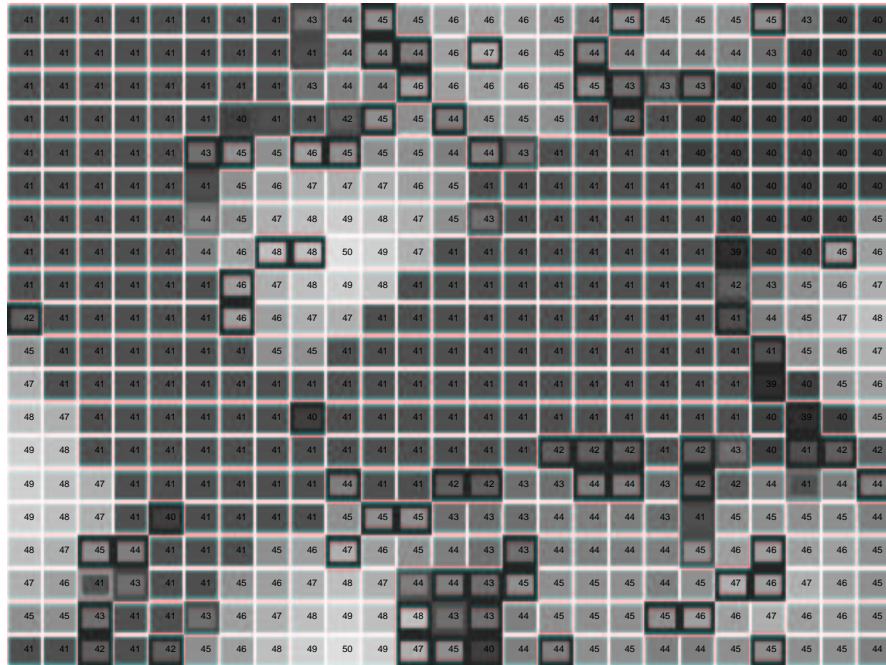


Figura 4.31: Aperture não multiresolução

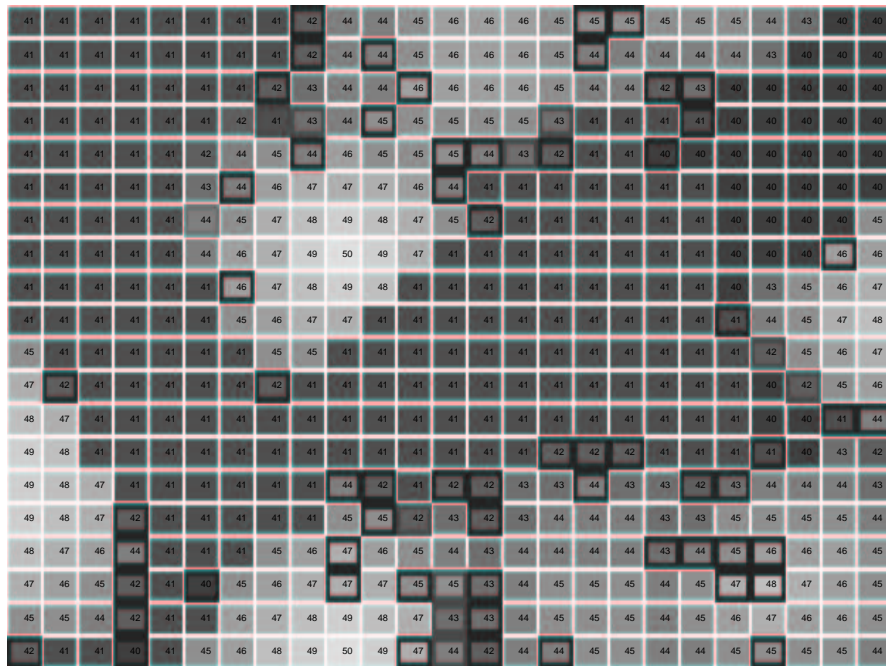


Figura 4.32: Aperture multiresolução

Capítulo 5

Envelope Multi-resolução

5.1 Introdução

Nos dois capítulos anteriores apresentamos as restrições de *envelope* e *resolução*, e a técnica de projeto *multi-resolução* para o projeto estatístico de operadores morfológicos (W -operadores e Apertures). As duas restrições definidas melhoram o desempenho dos operadores treinados com poucas amostras, utilizando o conhecimento do pesquisador, tanto em projetar o envelope como para projetar a restrição de resolução. Mas, nos dois casos, o incremento da quantidade de amostras no projeto dos operadores vai produzir um detrimento do resultado do projeto restrito, em comparação com o projeto sem restrições. Isto se deve a que o projeto é consistente, tanto com como sem restrição e, portanto, quando o número de amostras cresce, o erro do operador projetado se aproxima do erro do operador ótimo. O problema é que o erro do operador ótimo na restrição é não menor que o erro do operador ótimo sem restrições e, portanto, a qualidade do projeto restrito é assintoticamente inferior que a do projeto sem restrições.

No caso da restrição por resolução, a solução para o comportamento assintótico do erro está no projeto piramidal, ou multi-resolução. Nesse caso as resoluções mais baixas, ou restritas, são só usadas se o treinamento nas resoluções superiores não foi suficiente. Se o número de amostras é suficientemente grande, a maior parte das configurações observadas vão ser resolvidas sobre o primeiro espaço de configurações (não restrito) e, portanto, a restrição não vai tomar parte da aplicação do operador. A restrição é usada como uma forma de generalização, e não como uma correção do operador treinado em alta resolução. No caso do envelope a situação é diferente, pois a restrição é utilizada para corrigir o operador treinado, o qual já deve ter passado pelo processo de generalização.

Neste capítulo apresentamos uma nova técnica de projeto de operadores, chamada de *envelope multi-resolução* que combina as vantagens do projeto multi-resolução com as do envelope, mas com a vantagem de ser assintoticamente ótima.

5.2 Envelope Multi-resolução

O envelope multi-resolução é obtido como combinação do projeto de operadores com envelope 3 e o projeto híbrido multi-resolução de operadores 4. Portanto, vamos lembrar primeiro essas duas definições, com a restrição de ser $L = \{0, 1\}$.

Definição 5.1 *Sejam $D = L^W$ o espaço de configurações e L^D o espaço de operadores morfológicos munido da estrutura de reticulado com a desigualdade \leq , o par (α, β) , com $\alpha, \beta \in L^D$ e $\alpha \leq \beta$, gera uma **restrição por Envelope** $\mathbf{Q}_{\alpha, \beta} \subseteq L^D$ definida por*

$$\mathbf{Q}_{\alpha, \beta} = [\alpha, \beta] = \{\psi : \alpha \leq \psi \leq \beta\}$$

Os elementos de $\mathbf{Q}_{\alpha, \beta} \subseteq L^D$ são chamados de **operadores restritos por Envelope**

Definição 5.2 *Sejam D_0 o espaço de configurações observadas e ρ um mapeamento de resolução sobre uma partição D_1 . A restrição $\mathbf{Q}_\rho = \{\psi \in L^{D_0} : \rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}') \Rightarrow \psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}')\}$ é chamada de **restrição de resolução**.*

Uma primeira forma intuitiva de combinar restrição por resolução e restrição por envelope consiste em aplicar a restrição por envelope no espaço de configurações D_1 .

Definição 5.3 *Seja $\rho : D_0 \rightarrow D_1$ um mapeamento de resolução, e α, β dois operadores morfológicos definidos sobre D_1 com escala de cinzas L tais que $\alpha \leq \beta$, a restrição $\mathbf{Q}_{(\rho, \alpha, \beta)} = \{\psi \in L^{D_0} : \alpha\rho \leq \psi \leq \beta\rho\}$ é chamada de **restrição por ρ -envelope**.*

Nesta definição, os operadores α e β sobre D_1 operam também sobre D_0 através do mapeamento de resolução ρ . Sejam $\alpha' = \alpha\rho$ e $\beta' = \beta\rho$ os operadores sobre D_0 associados a α e β respectivamente. Então a restrição pode ser definida, em forma equivalente, como $\mathbf{Q}_{(\rho, \alpha, \beta)} = \{\psi \in L^{D_0} : \alpha' \leq \psi \leq \beta'\}$. A Figura 5.1 mostra como é definido o operador α' como composição de α e ρ .

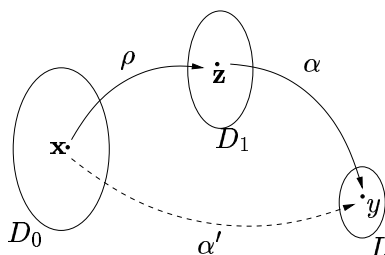


Figura 5.1: Ação de α sobre D_0 através de ρ

Para qualquer restrição por ρ -envelope $\mathbf{Q}_{(\rho, \alpha, \beta)}$ existe uma restrição por envelope $\mathbf{Q}_{(\alpha', \beta')}$ tal que $\mathbf{Q}_{(\rho, \alpha, \beta)} = \mathbf{Q}_{(\alpha', \beta')}$, com $\alpha' = \alpha\rho$ e $\beta' = \beta\rho$. Este resultado mostra que a restrição por ρ -envelope forma uma sub-família das restrições por envelope. O primeiro resultado útil desta propriedade é a da possibilidade de projetar operadores dentro da restrição.

Definição 5.4 *Seja $\mathbf{Q}_{(\rho, \alpha, \beta)}$ uma restrição por ρ -envelope, e seja ψ um operador sobre D_0 , então definimos a **projeção** ψ_ρ de ψ na restrição por $\psi_\rho = (\psi \wedge \beta') \vee \alpha'$. Também dizemos que ψ_ρ é o resultado de **aplicar** o envelope à ψ .*

A última definição de projeção é a mesma definida para envelopes (Capítulo 3) e, portanto, ψ_ρ é restrita por resolução ($\psi_\rho \in \mathbf{Q}_{(\rho, \alpha, \beta)}$), e pode ser definida também por:

$$\psi_\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & : \rho(\mathbf{x}) \in K(\alpha) \\ 0 & : \rho(\mathbf{x}) \notin K(\beta) \\ \psi(\mathbf{x}) & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.1)$$

O operador α' é um operador restrito por resolução, pois se $\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}')$ então $\alpha'(\mathbf{x}) = \alpha(\rho(\mathbf{x})) = \alpha(\rho(\mathbf{x}')) = \alpha'(\mathbf{x}')$. Resultado similar vale para o operador β' . A restrições por resolução são fechadas sob ínfimo e supremo, i.e., se ψ e ψ' são dois operadores restritos por resolução, então $\psi \wedge \psi'$ e $\psi \vee \psi'$ são restritos por resolução e, portanto, a seguinte proposição é válida

Proposição 5.5 *Se ψ é um operador restrito por resolução, então a projeção $\psi_\rho = (\psi \wedge \beta') \vee \alpha'$ é também um operador restrito por resolução.*

Se ψ é um operador sobre D_0 restrito por resolução, então a projeção ψ_ρ também é restrita por resolução (Proposição 5.5) e eles têm associados os operadores ϕ_ψ e ϕ_{ψ_ρ} , sobre D_1 , respectivamente. O seguinte teorema mostra que no caso dos operadores restritos por resolução, o seguinte diagrama comuta (Figura 5.2), onde da esquerda para direita a relação está dada pelo operador associado, e de cima para baixo corresponde à projeção dentro do envelope:

$$\begin{array}{ccc} \psi & \longrightarrow & \phi_\psi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi_\rho & \longrightarrow & \phi_{\psi_\rho} \end{array}$$

Figura 5.2: Diagrama comutativo

Teorema 5.6 *Sejam $\rho : D_0 \rightarrow D_1$ um mapeamento de resolução, $\psi : D_0 \rightarrow L$ um operador restrito por resolução, $\phi_\psi : D_1 \rightarrow L$ o operador associado a ψ ($\phi_\psi(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{x})$ para qualquer $\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]$), e $\psi_\rho = (\psi \wedge \beta') \vee \alpha'$ a projeção de ψ sobre a restrição $\mathbf{Q}_{(\rho, \alpha, \beta)}$. Então o operador ϕ_{ψ_ρ} associado a ψ_ρ satisfaz $\phi_{\psi_\rho} = (\phi_\psi \wedge \beta) \vee \alpha$.*

Dem.: *Seja $\mathbf{z} \in D_1$, e $\mathbf{x} \in D_0$ tal que $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$ ($\mathbf{x} \in C[\mathbf{z}]$),*

1. *Se $\mathbf{z} \in K[\alpha]$, então $\alpha(\mathbf{z}) = 1$ e, portanto, $[(\phi_\psi \wedge \beta) \vee \alpha](\mathbf{z}) = 1$. Por outro lado, $\alpha(\rho(\mathbf{x})) = \alpha(\mathbf{z}) = 1$ e, portanto, $\mathbf{x} \in K[\alpha']$ e $\psi_\rho(\mathbf{x}) = 1$ e, portanto, o operador associado ϕ_{ψ_ρ} satisfaz $\phi_{\psi_\rho}(\mathbf{z}) = 1 = [(\phi_\psi \wedge \beta) \vee \alpha](\mathbf{z})$.*
2. *Se $\mathbf{z} \notin K[\beta]$, então $\beta(\mathbf{z}) = 0$ e, portanto, $[(\phi_\psi \wedge \beta) \vee \alpha](\mathbf{z}) = 0$. Por outro lado, $\beta(\rho(\mathbf{x})) = \beta(\mathbf{z}) = 0$ e, portanto, $\mathbf{x} \notin K[\beta']$ e $\psi_\rho(\mathbf{x}) = 0$ e, portanto, o operador associado ϕ_{ψ_ρ} satisfaz $\phi_{\psi_\rho}(\mathbf{z}) = 0 = [(\phi_\psi \wedge \beta) \vee \alpha](\mathbf{z})$.*

3. Se $\mathbf{z} \in K[\beta] - K[\alpha]$ então $[(\phi_\psi \wedge \beta) \vee \alpha](\mathbf{z}) = \phi_\psi(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{x})$. Também $\alpha'(\mathbf{x}) = \alpha(\rho(\mathbf{x})) = \alpha(\mathbf{z}) = 0$ e $\beta'(\mathbf{x}) = \beta(\rho(\mathbf{x})) = \beta(\mathbf{z}) = 1$ e, portanto, $\mathbf{x} \in K[\beta'] - K[\alpha']$, e $\psi_\rho(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$. Logo, $\phi_{\psi_\rho}(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{x}) = [(\phi_\psi \wedge \beta) \vee \alpha](\mathbf{z})$.

Portanto, para qualquer $\mathbf{z} \in D_1$ temos que $\phi_{\psi_\rho}(\mathbf{z}) = [(\phi_\psi \wedge \beta) \vee \alpha](\mathbf{z})$. ■

5.3 Análise do erro

Até agora apresentamos a parte algébrica da restrição por ρ -envelope sobre L^{D_0} , definindo ele em função de dois operadores $\alpha, \beta \in L^{D_1}$. O envelope é aplicado sobre D_0 através dos operadores α' e β' e, portanto, é um envelope, e todas as propriedades destas restrições se aplicam. Contudo, pela natureza da definição do ρ -envelope, existem algumas propriedades adicionais aplicáveis aos operadores restritos por resolução.

Um dos resultados mais importantes das restrições por envelope (Proposição 3.6) diz que se o operador ótimo está dentro do envelope, então aplicar o envelope é sempre benéfico. No caso de ρ -envelope, este resultado ainda se aplica, mas também a seguinte propriedade.

Proposição 5.7 *Se ψ é um operador restrito por resolução e $\alpha \leq \psi_1 \leq \beta$, onde ψ_1 é o operador ótimo sobre D_1 , então $MSE[\psi_\rho] \leq MSE[\psi]$*

Dem.: *Vamos provar ele em três partes:*

1. Como ψ é restrito por resolução, existe um operador ϕ_ψ sobre D_1 tal que $\psi = \phi_\psi \rho$, chamado de operador associado a ψ . Pelo teorema de preservação de erro (Teorema 4.8), $MSE[\psi] = MSE[\phi_\psi]$.
2. Seja $\phi_{\psi,c} = (\phi_\psi \wedge \beta) \vee \alpha$ a projeção de ϕ_ψ no envelope (α, β) , Como o operador ótimo ψ_1 sobre D_1 pertence ao envelope (i.e., $\alpha \leq \psi_1 \leq \beta$), então, pela proposição 3.10, temos que $MSE[\phi_{\psi,c}] \leq MSE[\phi_\psi]$
3. Como ψ é restrito por resolução então, pela proposição 5.5, a projeção ψ_ρ também é restrita por resolução, e pelo teorema de preservação de erro (Teorema 4.8), $MSE[\psi_\rho] = MSE[\phi_{\psi_\rho}]$, onde ϕ_{ψ_ρ} é o operador sobre D_1 associado a ψ_ρ , e pelo teorema 5.6, $\phi_{\psi_\rho} = \phi_{\psi,c}$, portanto $MSE[\psi_\rho] = MSE[\phi_{\psi,c}]$

Finalmente, contando os itens anteriores, temos $MSE[\psi_\rho] = MSE[\phi_{\psi,c}] \leq MSE[\phi_\psi] = MSE[\psi]$, ou $MSE[\psi_\rho] \leq MSE[\psi]$, ■

5.4 Projeto consistente de operadores sob ρ -envelope

Como as restrições por ρ -envelope formam uma sub-família das restrições por envelope, elas sofrem do mesmo problema: de não ser consistente a menos que o operador ótimo esteja dentro da restrição, pois neste caso o custo da restrição é zero. Mesmo com muito conhecimento do problema, usualmente o envelope é construído sem essa propriedade, mas o ganho em estimação supera o custo da restrição, pois usualmente esta técnica é usada para quantidades pequenas de amostras.

Definição 5.8 *Sejam D_0, D_1, \dots, D_m os espaços de configurações, com os mapeamentos de resolução $\rho_k : D_0 \rightarrow D_k$, sejam $\psi_{k,N}$ os operadores restritos por resolução sobre D_k treinados a partir N amostras, seja (α, β) um ρ_1 -envelope, e seja $N(\mathbf{x})$ a quantidade de vezes que a configuração \mathbf{x} foi observada nos exemplos, um **Operador híbrido multi-resolução restrito por envelope no nível 1** é definido por*

$$\psi_{env-mul}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi_{0,N}(\mathbf{x}), & \text{se } N(\mathbf{x}) > 0 \\ \psi_{1,N}^*(\mathbf{x}), & \text{se } N(\mathbf{x}) = 0, N(\rho_1(\mathbf{x})) > 0 \\ \vdots & \\ \psi_{m-1,N}^*(\mathbf{x}), & \text{se } N(\mathbf{x}) = 0, \dots, N(\rho_{m-2}(\mathbf{x})) = 0, N(\rho_{m-1}(\mathbf{x})) > 0 \\ \psi_{m,N}^*(\mathbf{x}), & \text{se } N(\mathbf{x}) = 0, \dots, N(\rho_{m-1}(\mathbf{x})) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $\psi_{i,N}^* = (\psi_{i,N} \vee \beta') \wedge \alpha'$ é projetado no ρ_1 -envelope (α, β) , pois os operadores $\psi_{i,N}$ podem ser considerados operadores restritos, sobre D_1 .

Esta equação pode escrever-se também como

$$\psi_{env-mul}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi_{0,N}(\mathbf{x}), & \text{if } N(\mathbf{x}) > 0 \\ \psi_{1,N}^c(\mathbf{x}), & \text{if } N(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

com

$$\psi_{1,N}^c(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } N(\mathbf{x}) > 0 \\ \psi_{1,N}^*(\mathbf{x}), & \text{if } N(\mathbf{x}) = 0, N(\rho_1(\mathbf{x})) > 0 \\ \vdots & \\ \psi_{m-1,N}^*(\mathbf{x}), & \text{if } N(\mathbf{x}) = 0, \dots, N(\rho_{m-2}(\mathbf{x})) = 0, N(\rho_{m-1}(\mathbf{x})) > 0 \\ \psi_{m,N}^*(\mathbf{x}), & \text{if } N(\mathbf{x}) = 0, \dots, N(\rho_{m-1}(\mathbf{x})) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

O resultado mais importante deste operador é a consistência, ou seja, que o operador projetado pode aproximar o operador ótimo indefinidamente, para uma quantidade suficiente de exemplos de treinamento.

Teorema 5.9 $\psi_{env-mul}^*$ é um estimador consistente de ψ_{opt}

Dem.: Para mostrar consistência temos que mostrar que $E[\Delta(\psi_{env-mul}^*, \psi_{opt})] \rightarrow 0_{N \rightarrow \infty}$. Seja $p_{\mathbf{x}} = P(Y = 1|\mathbf{x})$ a probabilidade condicional da imagem ideal ter valor 1 quando é observada a configuração $\mathbf{x} \in D_0$, e seja $N(\mathbf{x})$ a quantidade de vezes que foi observada a configuração \mathbf{x} nos exemplos de treinamento.

$$\begin{aligned} E[\Delta(\psi_{env-mul}^*, \psi_{opt})] &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_{opt}] \\ P(\mathbf{x}) > 0}} \delta_{\mathbf{x}} P[\psi_{env-mul}^*(\mathbf{x}) \neq \psi_{opt}(\mathbf{x})] \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_{opt}] \\ P(\mathbf{x}) > 0}} \delta_{\mathbf{x}} P[\psi_{0,N}(\mathbf{x}) \neq \psi_{opt}(\mathbf{x}) | N(\mathbf{x}) > 0] P[N(\mathbf{x}) > 0] \\ &+ \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_{opt}] \\ P(\mathbf{x}) > 0}} \delta_{\mathbf{x}} P[\psi_{1,N}^c(\mathbf{x}) \neq \psi_{opt}(\mathbf{x}) | N(\mathbf{x}) = 0] P[N(\mathbf{x}) = 0] \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde a soma pode ser definida somente para configurações \mathbf{x} tais que $P(\mathbf{x}) > 0$ pois $\delta_{\mathbf{x}} = 0$ quando $P(\mathbf{x}) = 0$. Como $P[N(\mathbf{x}) > 0]$ e $P[\psi_{1,N}^c(\mathbf{x}) \neq \psi_{opt}(\mathbf{x}) | N(\mathbf{x}) = 0]$ estão limitados por 1, temos

$$\begin{aligned} E[\Delta(\psi_{env-mul}^*, \psi_{opt})] &\leq \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_{opt}] \\ P(\mathbf{x}) > 0}} \delta_{\mathbf{x}} P[\psi_{0,N}(\mathbf{x}) \neq \psi_{opt}(\mathbf{x}) | N(\mathbf{x}) > 0] \\ &+ \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_{opt}] \\ P(\mathbf{x}) > 0}} \delta_{\mathbf{x}} P[N(\mathbf{x}) = 0] \end{aligned} \quad (5.6)$$

se aplicamos limite para $n \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\Delta(\psi_{env-mul}^*, \psi_{opt})] &\leq \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_{opt}] \\ P(\mathbf{x}) > 0}} \delta_{\mathbf{x}} \lim_{n \rightarrow \infty} P[\psi_{0,N}(\mathbf{x}) \neq \psi_{opt}(\mathbf{x}) | N(\mathbf{x}) > 0] \\ &+ \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{K}[\psi_{opt}] \\ P(\mathbf{x}) > 0}} \delta_{\mathbf{x}} \lim_{n \rightarrow \infty} P[N(\mathbf{x}) = 0] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

pois os dois limites convergem para zero. O primeiro por ser $\psi_{0,N}$ um estimador consistente de ψ_{opt} , e o segundo por ser $P(\mathbf{x}) > 0$ para as configurações consideradas na soma. ■

5.4.1 Exemplo

Aqui apresentamos um exemplo da aplicação do ρ -envelope num problema com janelas pequenas. O modelo estatístico utilizado foi o do exemplo de aplicação que vai ser apresentado na próxima seção, mas por enquanto vamos analisar o problema quando as janelas são pequenas (mesmo que não seja um caso que ocorra na prática), como o projeto multi-resolução restrito por envelope no nível 1 atua especificamente sobre algumas configurações.

Sejam W_0 , W_1 e W_2 janelas horizontais de tamanho 5×1 , 3×1 e 1×1 , respectivamente, com origem no centro da janela, e sejam os mapeamentos de resolução definidos por $(z_1, z_2, z_3) = \rho_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4)$ e $w = \rho_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_3$. Vamos supor que temos 112 exemplos de treinamento, obtidos a partir de um par de imagens, uma ideal e a outra observada, onde a imagem observada é resultante de aplicar ruído na imagem ideal. Os exemplos de treinamento para a janela W_0 podem ser observadas na tabela 5.1, já com as frequências computadas para cada configuração, e com o valor decidido para cada configuração observada, o que define o operador $\psi_{0,N}$. Depois de aplicar o mapeamento de resolução ρ_1 , obtemos a tabela 5.2, para estimar o operador $\psi_{1,N}$ e, finalmente, a tabela 5.3 mostra as frequências e o operador $\psi_{2,N}$, obtidos depois de aplicar o mapeamento ρ_2 .

Nas tabelas 5.1 e 5.2 podemos ver que algumas configurações não foram observadas, tanto para W_0 como para W_1 . Na quarta coluna da tabela 5.4 podemos ver como é resolvido o operador piramidal ψ_N , como dado pela Equação 5.2. Na linha correspondente á configuração $\mathbf{x} = (11011)$ podemos ver que, pela baixa quantidade de exemplos, não teve observações nem de \mathbf{x} , nem de $\mathbf{z} = \rho_1(\mathbf{x}) = (101)$. Pelo projeto piramidal, o valor associado á \mathbf{x} é $\psi_N(\mathbf{x}) = \psi_{2,N}(\mathbf{x}) = 0$.

\mathbf{x}	f_0	f_1	$\psi_{0,N}(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	f_0	f_1	$\psi_{0,N}(\mathbf{x})$
00000	12	0	1	10000	4	0	0
00001	7	0	0	10001	0	0	-
00010	4	0	0	10010	0	0	-
00011	4	0	0	10011	0	0	-
00100	4	0	0	10100	0	0	-
00101	0	0	-	10101	0	0	-
00110	0	0	-	10110	0	0	-
00111	4	1	0	10111	0	0	-
01000	4	0	0	11000	3	0	0
01001	0	0	-	11001	0	0	-
01010	0	0	-	11010	0	0	-
01011	0	0	-	11011	0	0	-
01100	0	0	-	11100	4	1	0
01101	0	0	-	11101	0	0	-
01110	3	0	0	11110	1	8	1
01111	1	2	1	11111	1	44	1

Tabela 5.1: Exemplo de freqüências observadas: nível 0 da pirâmide

\mathbf{z}	f_0	f_1	$\psi_{1,N}(\mathbf{z})$
000	23	0	0
001	8	0	0
010	4	0	0
011	4	1	0
100	7	0	0
101	0	0	-
110	4	1	0
111	6	54	1

Tabela 5.2: Exemplo de freqüências observadas: nível 1 da pirâmide

\mathbf{w}	f_0	f_1	$\psi_{2,N}(\mathbf{w})$
0	38	0	0
1	18	56	1

Tabela 5.3: Exemplo de freqüências observadas: nível 2 da pirâmide

Neste problema particular, a existência de 4 pontos com valor 1 no vetor \mathbf{x} leva a pensar que ele devia ser classificado como '1' e não como '0'. Para resolver o problema, podemos usar um envelope simples, definido por $\mathcal{K}[\alpha'] = \{[00110, 11111], [01010, 11111], [01100, 11111]\}$ e $\mathcal{K}[\beta'] = [00000, 11111]$. (Pela proposição 3.4, a restrição por envelope equivale a uma restrição independente, definida pelos núcleos $\mathcal{K}[\alpha']$ e $\mathcal{K}[\beta']$) Como $\mathcal{K}[\beta'] = [00000, 11111] = \{0, 1\}^5$, só mostramos o núcleo de α' . O reticulado da Figura 5.3 mostra o núcleo do operador α' . Cada ponto representa uma configuração $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Os pontos preto representam configurações em $\mathcal{K}[\alpha']$ e os pontos em branco representam configurações fora de $\mathcal{K}[\alpha']$. O envelope (α', β') sobre D_0 está associado a um envelope (α, β) sobre D_1 por $\alpha'(\mathbf{x}) = \alpha(\rho(\mathbf{x}))$ e $\beta'(\mathbf{x}) = \beta(\rho(\mathbf{x}))$, sendo $\mathcal{K}[\alpha] = \{[011, 111], [101, 111], [110, 111]\}$ e $\mathcal{K}[\beta] = [000, 111]$, isto é, (α', β') formam uma restrição por ρ -envelope. A Figura 5.4 mostra o núcleo do operador α associado a α' .

Esta escolha do envelope consegue resolver alguns problemas como, por exemplo, para a configuração $\mathbf{x} = (11101)$. Esta configuração não foi observada nos exemplos e, portanto, tem que ser resolvido no segundo nível da pirâmide, sendo $\psi_N(\mathbf{x}) = \psi_{1,N}(\mathbf{z})$ com $\mathbf{z} = \rho(\mathbf{x}) = \rho(11101) = (110)$. Neste caso vai ser $\psi_N(\mathbf{x}) = 0$, mas a configuração (11101) tem todo o aspecto de representar ruído e, portanto, ele devia ter por saída o valor 1 e não 0. Neste caso, o envelope resolve o problema, pois $(11101) \in \mathcal{K}(\alpha')$, e se definimos $\psi_{\text{env}} = (\psi_N \vee \beta) \wedge \alpha$, então $\psi_{\text{env}}(\mathbf{x}) = 1$.

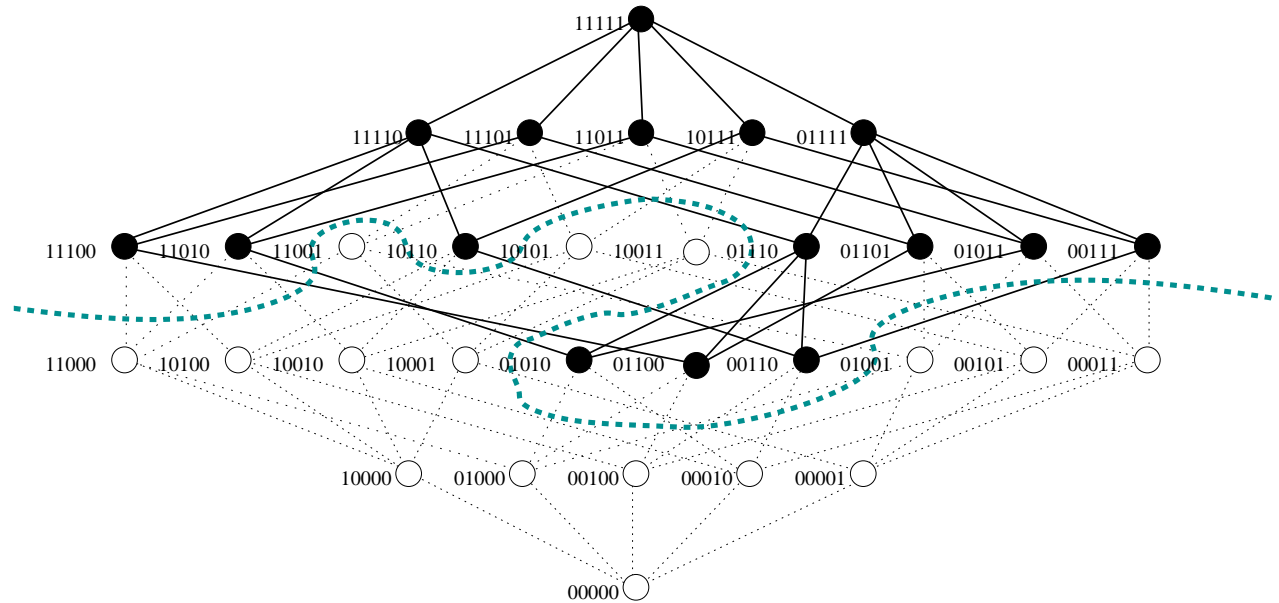


Figura 5.3: Núcleo do operador α' .

Na quinta coluna da tabela 5.4 podemos ver o resultado de $\psi_N(\mathbf{x})$ para todas as configurações $\mathbf{x} \in D_0$. A sexta coluna mostra o resultado de $\alpha'(\mathbf{x})$, e a sétima coluna mostra $\psi_{\text{env}}(\mathbf{x})$, onde podemos ver que foi corrigido o problema para a configuração $\mathbf{x} = (11101)$, mas neste caso o envelope é muito forte, atribuindo valor 1 a muitas configurações. Por exemplo, a configuração $\mathbf{x} = (00111)$ devia ter atribuído o valor 0, o qual é mesmo o resultado do treinamento (neste caso existiram exemplos para $\mathbf{x} = (00111)$), pois temos $\psi_N(00111) = 0$, mas $\psi_{\text{env}}(00111) = 1$. Uma possível solução é de procurar outro envelope mais exato, o que pode levar um bom tempo. Neste caso é quando aparecem as vantagens do projeto consistente, aplicando o envelope somente nos níveis 1 e 2 da pirâmide.

A oitava coluna da tabela 5.4 mostra o resultado $\psi_{\text{env-mul}}$ como definido na equação 5.2. Aqui

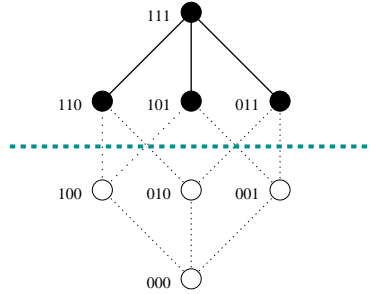


Figura 5.4: Núcleo do operador α associado a α' .

podemos ver que o envelope aplicado somente nos níveis 1 e 2, realizou correções em algumas configurações, como (11101) as quais não foram observadas no nível 0, e foram erroneamente classificadas no nível 1 (pois o classificador com uma janela 1×3 tem menos qualidade que o da janela 1×5), mas não mudou a classificação de outras configurações que foram observadas nos exemplos, como (00111) ou (01110).

Finalmente, a nona coluna mostra o resultado de $\psi_{\text{env-mul},M}(\mathbf{x})$, projetado com $M = 1259720$ exemplos de treinamento, sendo $N = 112$ uma quantidade muito menor. Neste caso a quantidade de amostras é suficiente, e $\psi_{\text{env-mul},M}(\mathbf{x}) = \psi_{0,M}(\mathbf{x})$, ou seja, o projeto é resolvido no primeiro nível da pirâmide e, portanto, o envelope não atua para nenhuma configuração. Devido á quantidade de amostras de treinamento, podemos supor que este operador é muito próximo do operador ótimo, tendo mais de 400 exemplos para a configuração menos observada ((01111)). A primeira vista pode parecer pouco natural atribuir o valor 0 à configuração $\mathbf{x} = (00111)$, mas esta é justamente uma configuração conflituante, pois com M amostras, a quantidade correspondente a esta configuração são $N(\mathbf{x}) = 29060$ e delas 13262 foram classificadas como 1, e 15798 foram classificadas como 0, correspondendo a 46% e a 54%, respectivamente. Sendo portanto 0.46 a probabilidade de erro dessa configuração.

5.5 Exemplos de aplicação

5.5.1 Filtragem de ruído em diferentes escalas

O objetivo dos exemplos foi comparar o desempenho do projeto combinado com as outras técnicas, para conferir os resultados teóricos sobre problemas práticos. O caso selecionado é o da filtragem de ruído, onde o ruído apresenta diferentes tamanhos, pois já foi visto que os operadores multi-resolução tem bom desempenho nestes casos [78].

No exemplo foram utilizadas quatro imagens com figuras geométricas de tamanho relativamente grande. A Figura 5.5 mostra as quatro imagens utilizadas. A primeira imagem é utilizada para treinar os operadores morfológicos, e as outras três imagens são usadas para estimar o erro da filtragem.

O ruído foi criado como união de três modelos Booleanos: o primeiro formado por pontos, sobre o 2% da imagem, o segundo formado por uma cruz de tamanho 3×3 (Figura 5.6 (a), sobre 1.5% da imagem, e o terceiro formado pela cruz anterior por ela mesma mesma (Figura 5.6 (b), sobre 1% da imagem).

\mathbf{x}	$\psi_{0,N}(\mathbf{x})$	$\psi_{1,N}(\mathbf{x})$	$\psi_{2,N}(\mathbf{x})$	$\psi(\mathbf{x})$	$\alpha'(\mathbf{x})$	$\psi_{\text{env},N}(\mathbf{x})$	$\psi_{\text{env-mul},N}(\mathbf{x})$	$\psi_{\text{env-mul},M}(\mathbf{x})$
00000	0	0	0	0	0	0	0	0
00001	0	0	0	0	0	0	0	0
00010	0	0	0	0	0	0	0	0
00011	0	0	0	0	0	0	0	0
00100	0	0	1	0	0	0	0	0
00101	-	0	1	0	0	0	0	0
00110	-	0	1	0	1	1	1	1
00111	0	0	1	0	1	1	0	0
01000	0	0	0	0	0	0	0	0
01001	-	0	0	0	0	0	0	0
01010	-	-	0	0	1	1	1	0
01011	-	-	0	0	1	1	1	0
01100	-	0	1	0	1	1	1	1
01101	-	0	1	0	1	1	1	1
01110	0	1	1	0	1	1	0	0
01111	1	1	1	1	1	1	1	1
10000	0	0	0	0	0	0	0	0
10001	-	0	0	0	0	0	0	1
10010	-	0	0	0	0	0	0	0
10011	-	0	0	0	0	0	0	0
10100	-	0	1	0	0	0	0	0
10101	-	0	1	0	0	0	0	1
10110	-	0	1	0	1	1	1	1
10111	-	0	1	0	1	1	1	1
11000	0	0	0	0	0	0	0	0
11001	-	0	0	0	0	0	0	0
11010	-	-	0	0	1	1	1	1
11011	-	-	0	0	1	1	1	1
11100	0	0	1	0	1	1	0	0
11101	-	0	1	0	1	1	1	1
11110	1	1	1	1	1	1	1	1
11111	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 5.4: Operadores projetados a partir da tabelas de frequências.

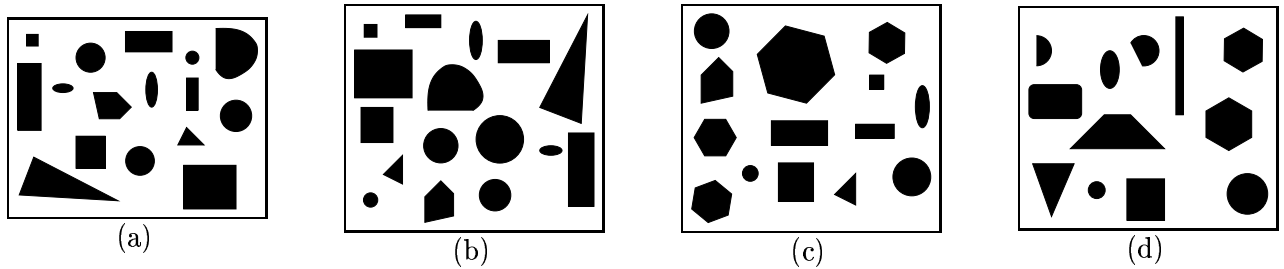


Figura 5.5: Imagens originais utilizadas para os testes

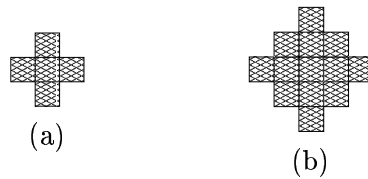


Figura 5.6: Elementos estruturantes usados no envelope

No total foram geradas 330 imagens a partir deste modelo. 250 realizações do ruído foram utilizadas para corromper a imagem de treinamento (primeira imagem). Desta maneira teremos 250 imagens de treinamento, para poder estudar o erro dos filtros em função da quantidade de exemplos. As outras 80 realizações das imagens de ruído foram utilizadas para corromper as 4 imagens, 20 realizações por imagem, para obter as imagens de teste. Para corromper as imagens, as realizações do ruído foram aplicadas sobre as imagens através da operação XOR, invertendo o valor das imagens originais nos pontos onde existe ruído. A Figura 5.7 mostra a primeira imagem corrompida por uma realização de ruído.

Para efeito de comparação foram utilizadas três técnicas de projeto de operadores. Nos três casos a base do projeto é o esquema multi-resolução. A primeira técnica usada é o projeto multi-resolução puro, como está apresentado no capítulo 4, usando uma pirâmide de 4 janelas, como pode ser visto na Figura 5.8. O operador treinado a partir desta técnica será chamado de ψ_{mul} .

A segunda técnica aplicada é o projeto usando envelope sobre o operador multi-resolução, como está apresentado no capítulo 3. Os operadores (α, β) definindo o envelope são formados, por composição de uma erosão e de uma dilatação, respectivamente, com um filtro alternado seqüencial. Mais especificamente, $\alpha = \epsilon_B(\phi_E\theta_E\phi_E)$ e $\beta = \delta_B(\theta_E\phi_E\phi_E)$, onde ϵ_B , δ_B , ϕ_E e θ_E representam erosão por B , dilatação por B , abertura por E e fechamento por E , respectivamente, sendo B e E os elementos estruturantes das Figura 5.6b) e 5.6a) respectivamente. O operador treinado a partir desta técnica será chamado de ψ_{env} .

Finalmente, a terceira técnica utilizada é a de envelope multi-resolução aqui apresentada, onde o mesmo envelope (α, β) é aplicado no segundo nível da pirâmide (Janela 7×7). O operador treinado a partir desta técnica será chamado de $\psi_{env-mul}$.

A Figura 5.9 mostra o erro, em quantidade de pixels classificados incorretamente, dos operadores projetados, em função da quantidade de exemplos de treinamento (em quantidades de realizações de ruído), para os três operadores ψ_{mul} , ψ_{env} e $\psi_{env-mul}$, estimado sobre a imagem de treinamento (Imagem 5.5a). O erro foi estimado aplicando o operador sobre 20 realizações da imagem corrompida com ruído, e contando a quantidade de pixels em que a imagem original difere da imagem resultante da filtragem.

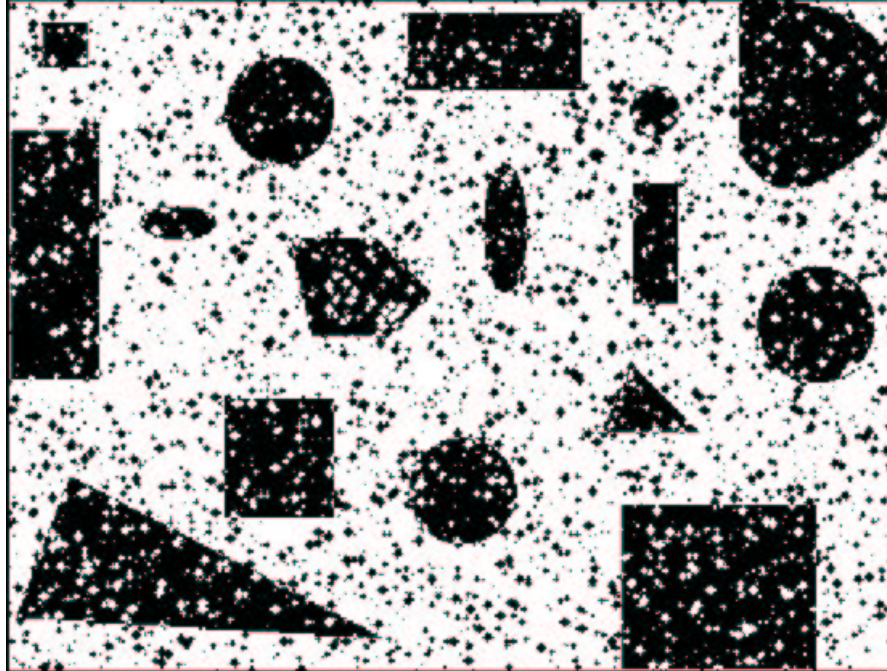


Figura 5.7: Primeira imagem corrompida com ruído

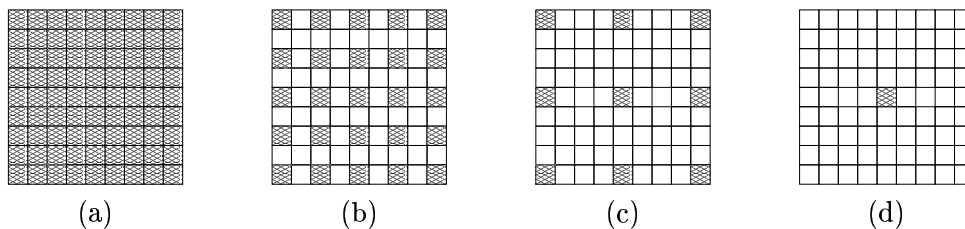


Figura 5.8: Janelas usadas na pirâmide

No gráfico podemos ver como, da mesma maneira que o envelope, o envelope multi-resolução melhora o resultado, comparado com o projeto multi-resolução puro, quando são utilizadas poucos exemplos de treinamento (50 ou 100 imagens). Ainda mais, o envelope multi-resolução já mostra nesses casos um desempenho ainda melhor que o envelope. Para quantidades maiores de exemplos (150, 200 e 250 imagens), o desempenho do envelope melhora, mas não tanto como o do envelope puro e, em vez de melhorar o resultado, o piora. Isto é de esperar se o envelope não contem o operador ótimo, o que deve acontecer neste caso. Mas mesmo assim, o envelope multi-resolução tem um erro menor do que o operador multi-resolução, sem sofrer o mesmo problema do envelope.

As Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 mostram o erro estimado sobre realizações de ruído aplicadas às imagens 2, 3 e 4 respectivamente. Cada um destes gráficos mostra um comportamento diferente do erro, em função da quantidade de exemplos de treinamento. O gráfico da Figura 5.10 é similar ao gráfico da Figura 5.9. A Figura 5.10 pode parecer diferente, mas a diferença está somente no fato que o erro de ψ_{env} vai superar o erro de ψ_{mul} só após as 250 imagens de treinamento. Já a Figura 5.12 mostra uma situação onde, para a geometria da imagem, o envelope usado não é bom mesmo, situação que pode acontecer às vezes, mas mesmo assim o erro de $\psi_{env-mul}$ é muito menor que o erro de ψ_{env} .

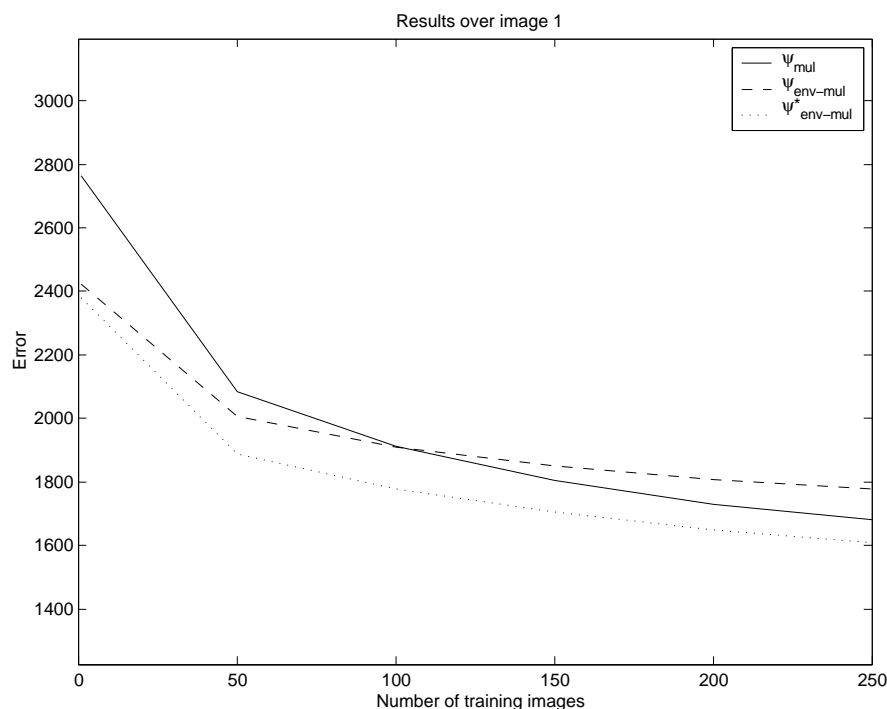


Figura 5.9: Gráfico do erro estimado sobre a Figura 1

Se computamos a média dos erros das três imagens de teste, o resultado é o da Figura 5.13, e podemos ver que o comportamento do erro é muito similar ao do gráfico da Figura 5.9. Neste caso podemos conferir que, mesmo sendo as 3 imagens de teste de uma geometria ligeiramente diferente da imagem 1, o envelope multi-resolução é satisfatório.

A Figura 5.14 mostra a quarta imagem (Figura 5.5d) corrompida por uma realização de ruído. A Figura 5.15 mostra o resultado do operador ψ_{mul} , treinado com 250 imagens, aplicado sobre a Figura 5.14. A Figura 5.16 mostra o resultado do operador ψ_{env} , treinado com 250 imagens, aplicado sobre a Figura 5.14. Finalmente, a Figura 5.17 mostra o resultado do operador $\psi_{env-mul}$, treinado com 250 imagens, aplicado sobre a Figura 5.14.

Analisando as Figuras 5.14 a 5.17, podemos ver que a aplicação do envelope sobre o resultado do operador ψ_{mul} piora o resultado, devido a que com grande quantidade de exemplos, neste caso 250, o projeto multi-resolução consegue fazer uma boa filtragem, mas o envelope, projetado heurísticamente, além de corrigir algumas partes, corrompe outras partes, como a barra vertical. Isto é um típico resultado da não consistência do projeto restrito por envelope. Mas o resultado do projeto conjunto $\psi_{env-mul}$ anula este problema, pois devido a grande quantidade de dados de treinamento, existem mais configurações sobre D_0 observadas no tre e, portanto, o envelope atua em menor quantidade de pontos da imagem.

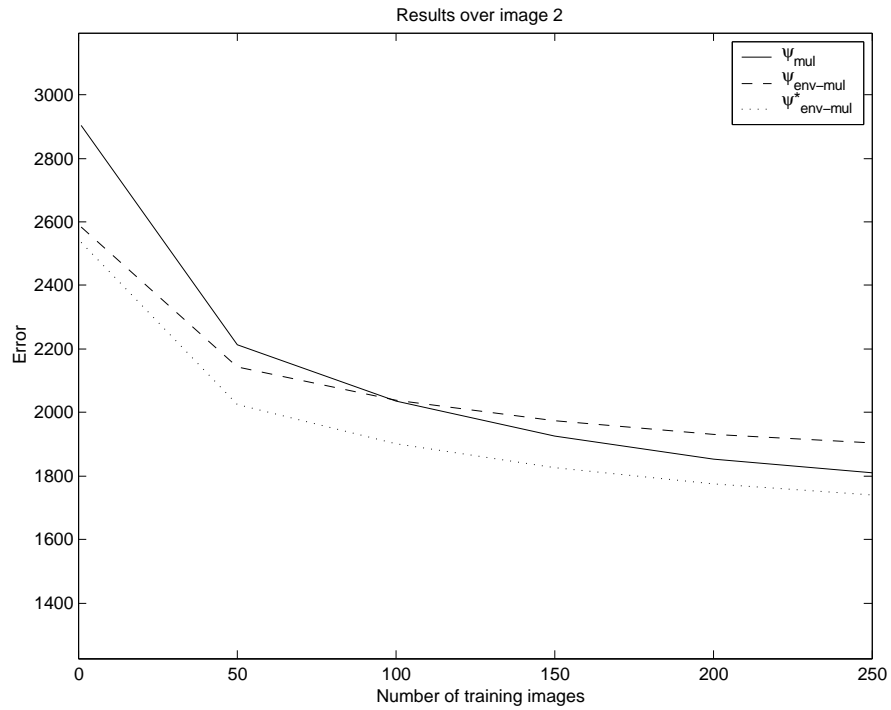


Figura 5.10: Gráfico do erro estimado sobre a Figura 2

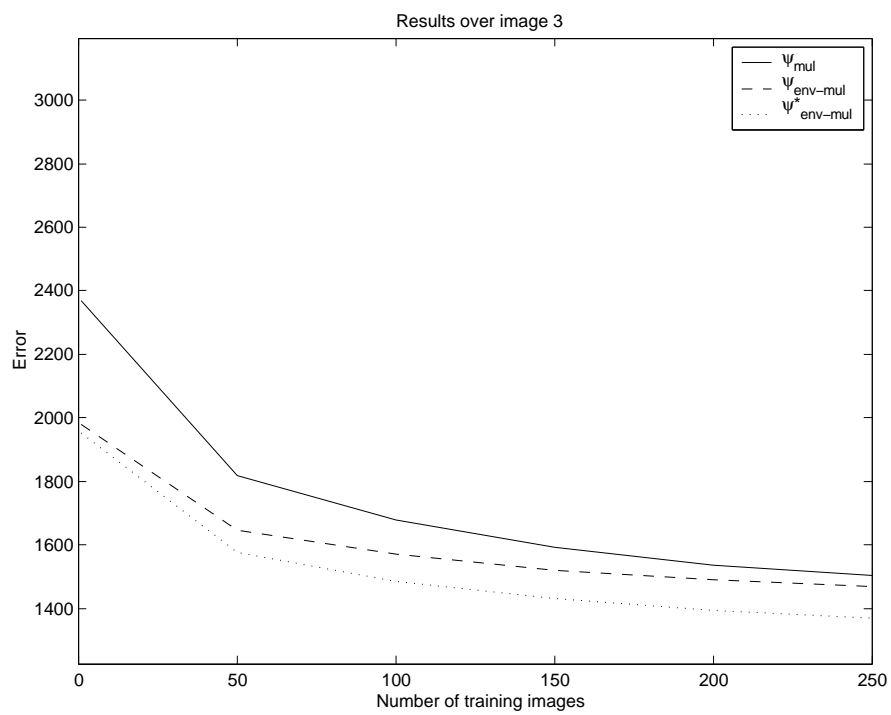


Figura 5.11: Gráfico do erro estimado sobre a Figura 3

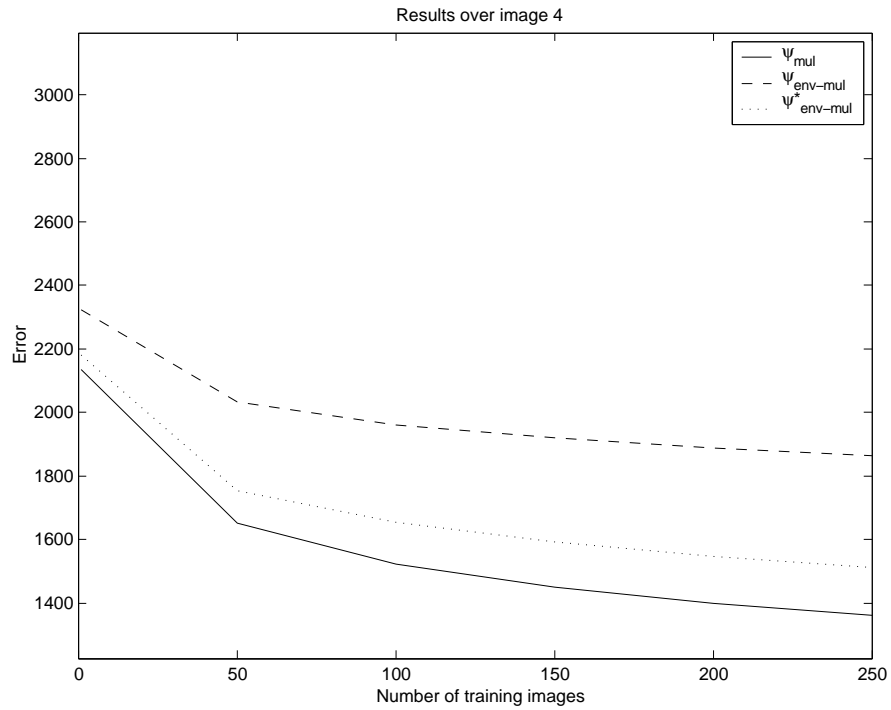


Figura 5.12: Gráfico do erro estimado sobre a Figura 4

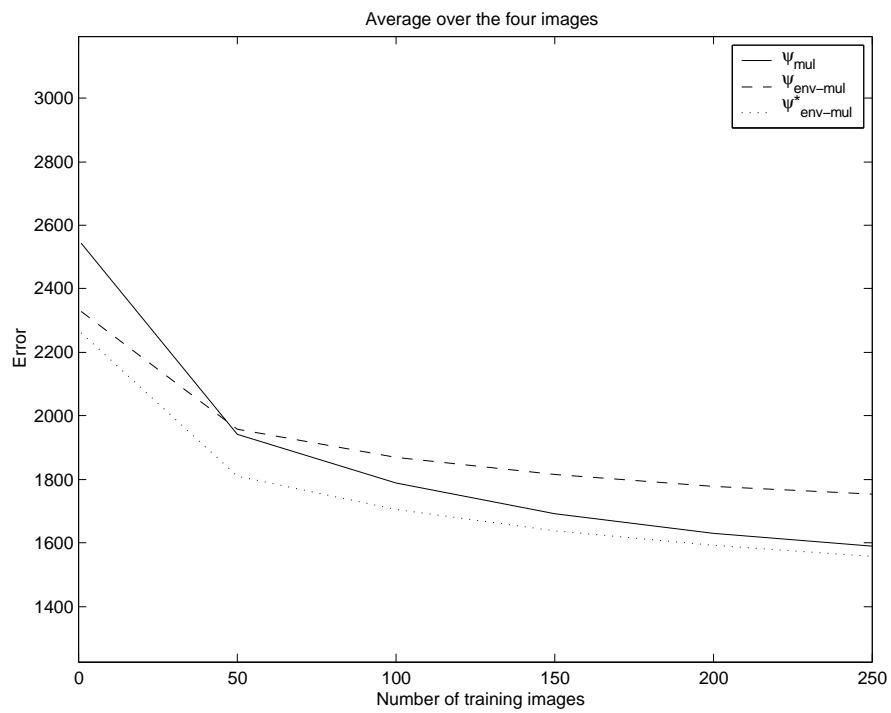


Figura 5.13: Gráfico do erro médio estimado sobre as Figuras 2, 3 e 4

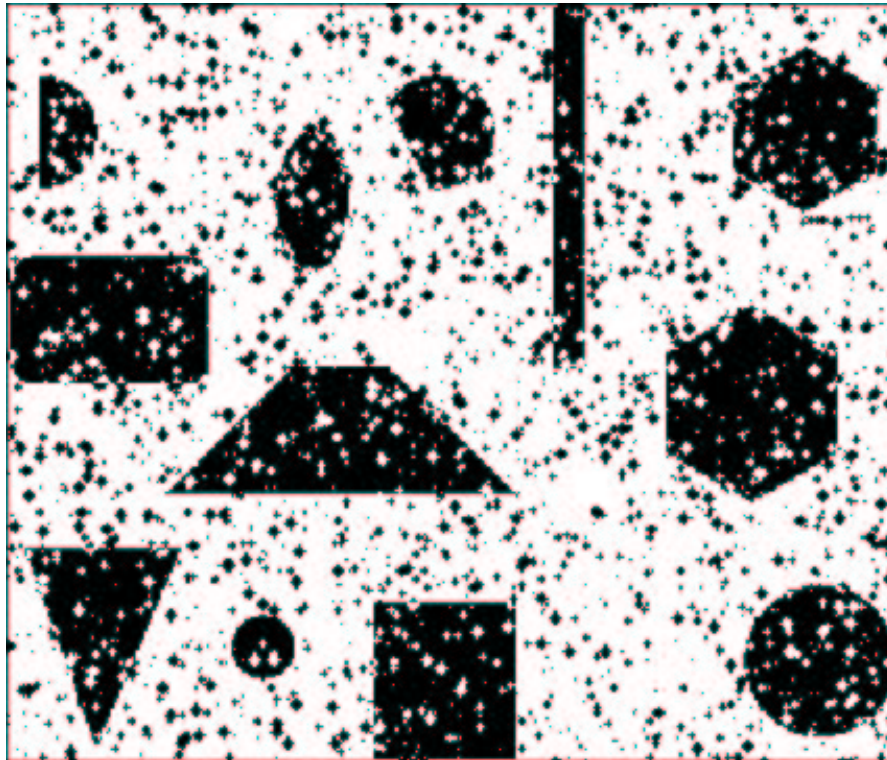


Figura 5.14: Figura corrompida com ruído

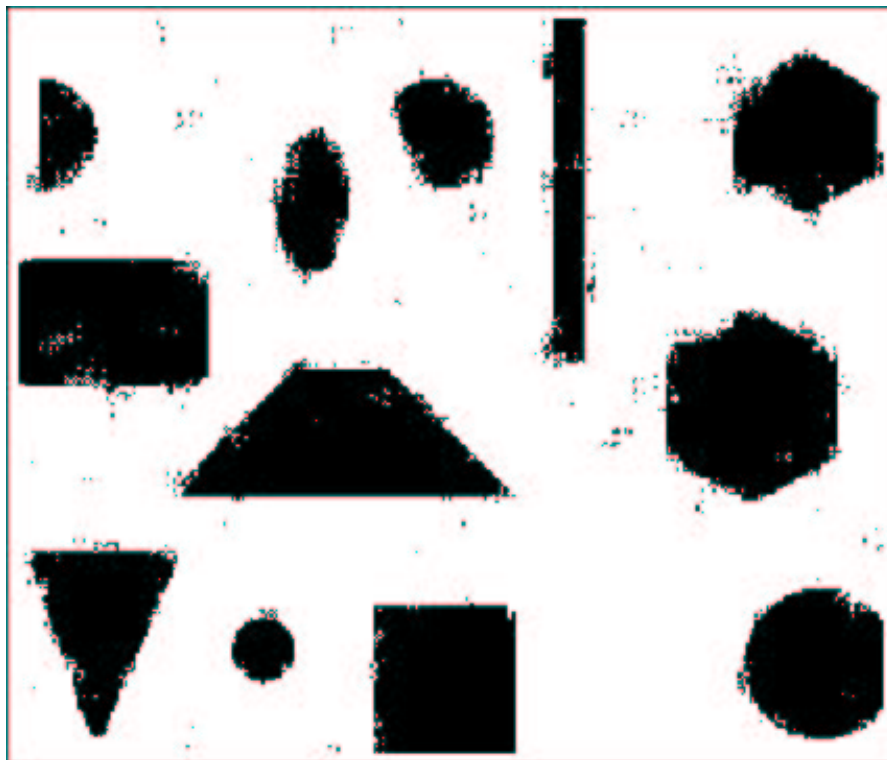


Figura 5.15: Resultado da aplicação de ψ_{mul}



Figura 5.16: Resultado da aplicação de ψ_{env}



Figura 5.17: Resultado da aplicação de $\psi_{env-mul}$

Capítulo 6

Conclusão

Neste capítulo vamos analisar os principais resultados da tese e discussões sobre possíveis desenvolvimentos futuros.

6.1 Envelope

O projeto estatístico de operadores morfológicos sofre do problema de dimensionalidade do espaço de características. Como o erro do operador projetado depende da soma dos erros do operador ótimo e do erro de estimação, impor restrições no espaço de operadores permite reduzir o segundo erro, e se bem definidas, esta redução no erro de estimação pode compensar o incremento do erro do operador ótimo devido à restrição.

Neste trabalho apresentamos a restrição de Envelope, na forma de dois operadores definidos pelo pesquisador. Mostramos que o Envelope é uma generalização da restrição independente para operadores para imagens em níveis de cinza, como depende o resultado da eleição dos operadores que definem o envelope, e como projetar o operador ótimo na restrição, a partir do operador ótimo sem restrições.

Os três requisitos esperados de uma restrição foram satisfeitos, e observações visuais nos exemplos e análise dos erros mostraram as vantagens de aplicar o Envelope quando a quantidade de amostras é pequena, comparado com as técnicas tradicionais de projeto automático.

6.2 Multi-resolução

Depois apresentamos a restrição por resolução, que permite selecionar uma resolução onde a diminuição no erro de estimação é mais importante que o incremento no erro do operador ótimo. Mostramos a forma geral da restrição, exemplos de como definir restrições simples, analisamos a diferença entre o operador ótimo na restrição e o operador ótimo não restrito, e mostramos como projetar o operador ótimo na restrição, a partir de observações na resolução menor.

Outra vez foram satisfeitos os requisitos esperados de uma restrição, e a partir de simulações e exemplos conferimos a vantagem de aplicar a restrição quando ela é bem definida.

A restrição por resolução serviu também para definir a técnica de projeto multi-escala, que toma vantagem das estatísticas em diferentes níveis de resolução, evitando a necessidade de generalizar a decisão para vetores não observados na etapa de treinamento.

Simulações e experimentos em problemas reais mostraram as vantagens desta metodologia, como técnica de aprendizado computacional, comparado com outras técnicas, mesmo quando utilizada compressão na escala de cinzas, como no caso de apertures.

6.3 Envelope Multi-resolução

A vantagem da restrição por Envelope é mais notável quando a quantidade de exemplos de treinamento é pequena, mas pode ser prejudicial quando se dispõe de grande quantidade de exemplos. Neste trabalho combinamos Envelope com projeto multi-escala, para projetar operadores binários. Mostramos como ela aproveita as vantagens do envelope quando a quantidade de amostras é pequena, e como os seus efeitos negativos, para quantidades grandes de amostras, são anulados pelo projeto piramidal.

6.4 Desenvolvimentos futuros

Algumas fontes de pesquisa futura são:

- O análise teórico do erro da restrição por resolução pode ser estendido à obtenção de uma expressão para erro do projeto multi-escala, para dotar essa técnica de um fundamento teórico mais forte.
- A restrição por resolução utiliza a informação do pesquisador na criação do mapeamento de resolução, e, portanto, determina a estrutura da pirâmide no projeto multi-escala. Esta estrutura é de grande importância na qualidade do operador projetado e, como foi mostrado, depende do modelo ao que vai ser aplicado. Uma futura pesquisa pode ser a determinação automática desta estrutura a partir de uma especificação do problema ao qual vai ser aplicado, ou o seu aprendizado a partir de exemplos.
- O projeto de operadores sob Envelope Multi-resolução foi definido somente para operadores para imagens binárias. Um futuro trabalho deveria generalizar esta definição para o projeto de operadores para imagens em níveis de cinza.

O crescimento do poder de processamento e armazenamento dos computadores permite aplicar as técnicas do projeto estatístico de operadores em problemas mais complexos. Este avanço tem que estar acompanhado de avanços teóricos, que simplifiquem o problema, para acelerar mais a abrangência de aplicação destas técnicas. O estudo de restrições e do projeto piramidal é uma linha de pesquisa orientada a este objetivo, e a pesar dos grandes avanços já obtidos, há ainda muito a ser feito.

Apêndice A

Publicações relacionadas ao tema da tese

Listamos aqui os artigos publicados ou submetidos durante o período do doutorado, junto com o abstract deles.

A.1 Artigos de revista

1. Ref. [78] **Multiresolution Analysis for Optimal Binary Filters**

O desempenho de um operador morfológico, projetado estatisticamente, é medido pela soma do erro do operador ótimo e do erro de estimação. Observar uma imagem em alta resolução, resulta em operadores ótimos com menor erro que em baixa resolução, mas altas resoluções trazem um incremento no erro de estimação. Portanto é importante escolher a resolução adequada para projetar o operador morfológico. Este paper apresenta expressões para o erro do operador morfológico ótimo e o erro de estimação, num contexto de multiresolução piramidal. O análise é facilitado pela caracterização geral de mapeamentos de resolução, encadenados em forma aceitável. As expressões de erro são geradas de resolução em resolução, em forma telescópica. É apresentado um projeto híbrido, para aproveitar todas as resoluções. No projeto híbrido, é projetada uma sequência de operadores, utilizando dados a resoluções crescentes, e cada operador serve como informação prévia para o seguinte. No projeto híbrido multiresolução, o valor do operador projetado, para uma configuração dada, é baseado na maior resolução em que teve observações significantes.

2. Ref. [83] **Hybrid human-machine binary morphological operator design. An independent constraint approach**

Um paradigma básico em morfologia matemática é a construção de operadores sobre conjuntos, por meio de concatenações de dilatações e erosões, através das operações de composição, união, interseção e complemento. Desde sua introdução, nos anos 60, por Matheron e Serra, este paradigma foi aplicado, em análise de imagens, para projetar operadores sobre conjuntos, chamados de operadores morfológicos. Usualmente, os operadores morfológicos são projetados

em base á experiencia e a intuição do projetista. Recentemente foi proposto uma metodologia de projeto automático de operadores morfológicos, baseado em otimização estatística, a partir de observações em famílias de pares de imagens. As duas metodologías tem desvantagens: usualmente, a primeira metodologia é demorada, e depende fortemente de um experto em morfologia matemática, enquanto que a segunda metodologia requer quantidades grandes de dados observados. Este artigo propõe uma simbiose entre as metodologías baseadas em heurística e em estatística. A ideia é definir um projeto composto de formas simplificadas de ambas metodologías e, portanto, evitando algumas das dificuldades que aparecem quando é utilizada somente uma delas. A estratégia adotada, para atingir este objetivo, consiste em restringir o espaço dos operadores, através de um envelope projetado heurísticamente.

3. Ref. [84] **Multiresolution Design of Aperture Operators**

O projeto de um operador Aperture está baseado na restrição adequada, do dominio espacial e dos níveis de cinza, para diminuir o espaço de operadores e, portanto, o erro de estimação. O projeto de um operador restrito por resolução está baseado em combinar, adequadamente, a informação de dois o mais níveis de resolução, e tem a mesma motivação, esta é, diminuir o espaço de operadores para simplificar o projeto. Este artigo junta estas metodologías, e estuda o projeto multiresolução de operadores Aperture, para imagens em níveis de cinza. São caracterizados a restrição de resolução espacial, no range, e a combinação delas, e é analisado o incremento de erro devido ao uso do operador restrito. O projeto piramidal implica aplicar a restrição por resolução em forma hierarquica, desde a maior á menor resolução. Esta metodologia é caracterizada, e seu erro analisado. Também é descrito o sistema implementado para projetar operadores piramidais, e é analisada a sua complexidade (memoria e tempo). São apresentadas simulações e aplicações, e comparadas com operadores lineis ótimos. Os resultados confirmam a utilidade desta metodologia.

4. Ref. [85] **Nonlinear Filter Design Using Envelopes**

O projeto de um operador morfológico, sobre sinais o imagens, implica a estimação do operador ótimo, através de dados de exemplo. Em principio, em função da medida de erro usada, o operador ótimo é o melhor, mas, devido ao erro de estimação, o operador projetado pode não ter um bom desempenho. Ele é geralmente sub-ótimo. A restrição por envelope está baseado no uso de dois operadores, projetados heurísticamente, que formam um limitante superior e inferior para o operador projetado. Este artigo apresenta o projeto restrito por envelope, para operadores em níveis de cinza, em particular operadores Aperture. São apresentadas algumas propriedades teóricas básicas, incluindo a otimalidade do método de projeto, relativa á restrição definida pelo envelope. São dados exemplos para redução de ruido e desembaçamento.

5. Ref. [68] **Design of Optimal Binary Filters Under Joint Multiresolution-Envelope Constraint**

Este artigo examina o projeto de operadores morfológicos binarios, aplicando conjuntamente projeto multiresolução e restrição por envelope. No projeto multiresolução, o valor do operador projetado, para uma configuração, é definido a uma resolução suficientemente baixa, na qual foi observada a configuração. As resoluções altas tem preferencia, mas tendo em conta a quantidade de configurações de treinamento. No projeto restrito por envelope, o operador projetado é restrito a uma região formada pelo envelope entre dois operadores projetados heurísticamente.

Quando a quantidade de amostras é pequena, o operador restrito por envelope se beneficia do conhecimento esperto, enquanto que para amostras grandes, o projeto estatístico permite uma maior confiança. Aplicando as duas metodologias em combinação podemos aproveitar as suas vantagens. Isto pode ser feito em diferentes formas. Este paper analisa o projeto conjunto de envelope-multiresolução, extendendo os resultados básicos do projeto sob envelope ao entorno multiresolução, considera consistência do projeto, e apresenta resultados experimentais para suportar a nova metodologia.

A.2 Artigos em conferência.

1. Ref. [86] **Multiresolution Filter Design**

Observar uma imagem em alta resolução, resulta em operadores ótimos com menor erro que em baixa resolução, mas altas resoluções trazem um incremento no erro de estimação. Este paper apresenta expressões para o erro do operador morfológico ótimo e o erro de estimação, num contexto de multiresolução piramidal. No projeto híbrido, é projetada uma sequência de operadores, utilizando dados a resoluções crescentes, e cada operador serve como informação prévia para o seguinte.

2. Ref. [87] **Hybrid human-machine binary morphological operator design**

Usualmente, os operadores morfológicos são projetados em base à experiência e a intuição do projetista. Recentemente foi proposto uma metodologia de projeto automático de operadores morfológicos, baseado em otimização estatística, a partir de observações em famílias de pares de imagens. Este artigo propõe uma simbiose entre as metodologias baseadas em heurística e em estatística. A estratégia adotada, para atingir este objetivo, consiste em restringir o espaço dos operadores, através de um envelope projetado heurísticamente, aproveitando, desta forma, as vantagens das duas metodologias.

3. Ref. [88] **Image Restoration by Multiresolution Aperture Filters**

Este artigo estuda o projeto multiresolução de operadores Aperture, para imagens em níveis de cinza. O projeto piramidal implica aplicar a restrição por resolução em forma hierárquica, desde a maior à menor resolução. É descrito o sistema implementado para projetar operadores piramidais, e é analisada a sua complexidade (memória e tempo). São apresentadas simulações e aplicações, e comparadas com operadores lineares ótimos.

4. Ref. [89] **Hybrid Human-machine Non-linear Filter Design Using Envelopes**

O projeto de um operador morfológico, sobre sinais e imagens, implica a estimação do operador ótimo, através de dados de exemplo. A restrição por envelope está baseado no uso de dois operadores, projetados heurísticamente, que formam um limitante superior e inferior para o operador projetado. Este artigo apresenta o projeto restrito por envelope, para operadores em níveis de cinza, em particular operadores Aperture.

Apêndice B

Lista complementar de atividades e publicações

Neste capítulo apresentamos outras atividades desenvolvidas dentro do período do doutorado, e um listado de outros artigos publicados ou submetidos, junto com um abstract deles.

B.1 Atividades desenvolvidas

Dentro da participação no projeto CAGE, foi desenvolvida uma biblioteca de funções, em linguagem C e Matlab, para agrupamento não supervisionado e visualização de dados de expressão genética. Esta biblioteca está sendo utilizada nestes momentos no laboratório Bioinfo da USP, no laboratório CAMDI, da universidade de Texas A&M, na universidade de Tampere, em Finlândia, e no NIH (National Institute of Health) em Washington.

Para realizar simulações foi desenvolvida uma biblioteca de funções, em linguagem Matlab, com ferramentas para simular diferentes modelos estatísticos de imagens e iteração genética, junto com ferramentas de aprendizado e análise. Esta biblioteca está sendo utilizada no laboratório CAMDI, da Universidade de Texas A&M e na Universidad Nacional de Mar del Plata, na Argentina.

B.2 Artigos de revista

1. Ref. [90] **Inference from Clustering with Application to Gene-expression Microarrays**

Existe uma grande quantidade de algoritmos diferentes para agrupar dados, baseados em proximidade ou medidas de similaridade. Usualmente é suposto que pontos em diferentes agrupamentos pertencem a diferentes classes, enquanto os pontos nos mesmos agrupamentos pertencem à mesma classe. Stocasticamente, as classes representam diferentes processos aleatórios. A inferência é que os agrupamentos representam uma partição dos pontos, de acordo com a classe a que eles pertencem. Este artigo discute uma ferramenta de clustering, baseada em modelo, que avalia a exactitude dos agrupamentos. A ferramenta é aplicada a agrupamento de expressão de genes, baseado em microarrays de cDNA, utilizando dados reais.

2. Ref. [81] **Corrected Small-Sample Estimation for the error of the Optimal Binary Filter**

Um problema importante em ambos, filtragem não-linear e reconhecimento de padrões, é a estimação do erro de um operador projetado estatisticamente, quando a quantidade de dados de treinamento é pequena. Um método usual de estimar o erro do operador ótimo, é estimar este operador com um conjunto de exemplos, e depois estimar seu erro sobre outro conjunto de exemplos. Como o operador projetado é sub-ótimo, seu erro médio é maior que o erro do operador ótimo. Este artigo apresenta uma correção, subtraindo um valor obtido da representação do erro estimado. Para reduzir a quantidade de parâmetros, foi introduzida uma metodologia baseada num modelo, obtendo uma correção conservativa, o que é um ponto muito importante. A correção foi adaptada para ser aplicada no coeficiente de determinação, o qual é usado para medir a relação entre um conjunto de variáveis preditoras e uma variável predecida. Foi dada uma aplicação dele na área de regulação genética, onde o coeficiente de determinação é usado para medir a interação entre genes.

3. Ref. [91] **Efficient Selection of Feature Sets Possessing High Coefficients of Determination Based on Incremental Determinations**

A seleção de características é problemática quando a quantidade de candidatos é muito grande. Sem conhecimento da distribuição, a seleção do melhor conjunto de características precisa do análise de todas as possíveis combinações. Este artigo considera o problema no contexto de seleção de variáveis para predição, baseado no coeficiente de determinação. A hipótese de trabalho é desconsiderar conjuntos de características, se os subconjuntos tem coeficiente de determinação pequeno, considerado dentro de um contexto Bayesiano, analisando a probabilidade de omitir conjuntos de características com boa predição, e considerando também as diferenças de custo computacional. O método é testado num modelo simulado, e aplicado no contexto do análise de coeficiente de determinação de genes, baseado em microarray.

B.3 Artigos em conferência.

1. Ref. [92] **Translation Invariant Transformation of Discrete Random Sets**

A modelagem aleatória é uma técnica importante para resolver problemas difíceis em codificação, descrição quantitativa e restauração de imagens. Nos anos 60, Matheron introduz a teoria de conjuntos aleatórios fechados (RACS), que permitem a criação de modelos a partir de transformações morfológicas de processos primitivos. Uma limitação desta teoria é que não todas as transformações de um RAC produzem um RAC. Recentemente, Goutsias propôs uma versão discreta da teoria de Matheron, a qual não tem esta limitação. Mas esta teoria discreta possui o problema da ausência de fórmulas gerais para calcular a distribuição de um conjunto aleatório discreto (DRS) a partir da distribuição do DRS primitivo. Neste paper apresentamos algumas fórmulas gerais para caracterizar um DRS gerado por um operador invariante por translações, e introduzimos uma nova funcional para DRS: a funcional de distribuição de intervalos.

2. Ref. [93] **Boosting OCR classifier by optimal edge noise filtering**

O problema de reconhecimento óptico de caracteres (OCR) pode ser resolvido por operadores de conjunto, implementados como programas para uma máquina morfológica (MMach). Neste paper apresentamos duas técnicas para potenciar estes programas: (1) âncora e (2) filtrado de ruído de bordas por carimbo. A potencia destas técnicas é mostrada por resultados experimentais.

3. Ref. [94] **Time series inference from clustering**

Este artigo discute uma ferramenta de clustering, baseada em modelo, que avalia a exactitude dos agrupamentos. Usualmente é suposto que pontos em diferentes agrupamentos pertencem a diferentes classes, enquanto os pontos nos mesmos agrupamentos pertencem á mesma classe. Estocasticamente, as classes representam diferentes processos aleatório. Cada vetor aleatório é modelado a partir de sua media e um ruído independente, depois é aplicado o agrupamento, e o erro é estimado a partir da quantidade de pontos classificados erroneamente. Os algoritmos são avaliados em função da variância das classes, e na diminuição do erro quando são realizadas replicações. A ferramenta é aplicada a agrupamento de expressão de genes, baseado em microarrays de cDNA, utilizando dados reais.

4. Ref. [95] **Multi-resolution Classification Trees in OCR Design**

Este artigo recupera a ideia de árvores de classificação em sistemas de OCR (reconhecimento óptico de caracteres), e propõe uma técnica para o projeto automático da estrutura dos árvores de classificação. O projeto de ambos, as árvores e os classificadores, está baseado em treinamento a partir de pares de exemplos, de imagenes observadas e ideais, permitindo o desenvolvimento de OCR personalizaveis.

5. Ref. [96] **Clustering granulometric features**

Momentos granulométricos tem sido usadas amplamente para classificação, segmentação e estimação de parâmetros em modelos de formas. Neste artigo estudamos a inferencia do agrupamento, baseado em momentos granulométricos, para uma familia de elementos estruturantes, no contexto do modelo aleatório. Inferencia baseada em agrupamentos permite analisar a consistencia destes momentos, e dos algoritmos de agrupamento.

Referências Bibliográficas

- [1] G. A. Baxes. *Digital Image Processing - Principles and Applications*. John Wiley and Sons, Inc., 1994.
- [2] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley Publishing Company, second edition, 2002.
- [3] N. D. A. Mascarenhas and F. R. D. Velasco. *Processamento Digital de Imagens*. Escola de Computação, IME-USP, 1984.
- [4] Pratt. *Digital Image Processing*, chapter 18. Image Segmentation, pages 597–627. Wiley, 1991.
- [5] E. R. Dougherty. *Random Processes for Image and Signal Processing*. SPIE and IEEE Presses, Bellingham, 1999.
- [6] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley, 1975.
- [7] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
- [8] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, 1988.
- [9] E. R. Dougherty, editor. *Mathematical Morphology in Image Processing*. Marcel Dekker, 1993.
- [10] Henk J. A. M. Heijmans. Mathematical morphology: A modern approach in image processing based on algebra and geometry. *SIAM Review*, 37(1):1–36, 1995.
- [11] Henk J. A. M. Heijmans. Morphological filters. *Proceedings of Summer School on Morphological Image and Signal Processing . Zakopane, Poland,, (18)*, 1995.
- [12] Goutsias J. and Heijmans H.J. Fundamenta morphologicae mathematicae. *Fundamenta Informaticae*, 41(1-2):1–31, 2000.
- [13] J. Barrera and G. P. Salas. Set Operations on Collections of Closed Intervals and their Applications to the Automatic Programming of Morphological Machines. Technical Report RT-MAC-9413, Departamento de Ciência da Computação, IME-USP, August 1995.
- [14] E. R. Dougherty and D. Sinha. Computational Gray-Scale Mathematical Morphology on Lattices (A Comparator-based Image Algebra) Part I: Architecture. *Real-Time Imaging*, 1:69–85, 1995.
- [15] E. R. Dougherty and D. Sinha. Computational Gray-Scale Mathematical Morphology on Lattices (A Comparator-based Image Algebra) Part II: Image Operators. *Real-Time Imaging*, 1:283–295, 1995.

- [16] H. J. A. M. Heijmans and C. Ronse. The Algebraic Basis of Mathematical Morphology – Part I: Dilations and Erosions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 50:245–295, 1990.
- [17] C. Ronse and H. J. A. M. Heijmans. The Algebraic Basis of Mathematical Morphology – Part II: Openings and Closings. *Computer Vision, Graphics and Image Processing: Image Understanding*, 54:74–97, 1991.
- [18] G. J. F. Banon and J. Barrera. Minimal Representations for Translation-Invariant Set Mappings by Mathematical Morphology. *SIAM J. Applied Mathematics*, 51(6):1782–1798, December 1991.
- [19] G. J. F. Banon and J. Barrera. Decomposition of Mappings between Complete Lattices by Mathematical Morphology, Part I. General Lattices. *Signal Processing*, 30:299–327, 1993.
- [20] Roberto A. Lotufo, Francisco de Assis Zampiroli, R. Hirata Jr., and Junior Barrera. *MMachLib functions and MMach operators*. Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC, Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial - DCA, CP 6101, Cidade Universitária Zeferino Vaz, 13083-970, Campinas, SP, february 97 edition, February 1997. This work has been supported by ProTeM-CC/CNPq through the AnIMoMat project, contract 680067/94-9. This manual has been used during the Brazilian Workshop’97 on Mathematical Morphology.
- [21] J. Barrera, G. J. F. Banon, R. A. Lotufo, and R. Hirata Jr. MMach: a Mathematical Morphology Toolbox for the Khoros System. *Electronic Imaging*, 7(1):174–210, 1998.
- [22] B. K. Jenkins K. S. Huang and A. A. Sawchuk. Binary Image Algebra and Optimal Cellular Logic Processor Design. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 45:295–345, 1989.
- [23] Klein J. C. and Serra J. The texture analyser. *Journal of microscopy*, 95(2):343–356, 1972.
- [24] F. Meyer. Skeletons and Perceptual Graphs. *Signal Processing*, 16:335–363, 1989.
- [25] L. Ji and J. Piper. Fast Homotopy-Preserving Skeletons Using Mathematical Morphology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(6):653–664, June 1992.
- [26] S. Beucher. Watersheds of Functions and Picture Segmentation. In *ICASSP 82, Proc. IEEE Intern. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 1928–1931, Paris, May 1982.
- [27] S. Beucher and F. Meyer. *Mathematical Morphology in Image Processing*, chapter 12. The Morphological Approach to Segmentation: The Watershed Transformation, pages 433–481. Marcel Dekker, 1992.
- [28] M. Anthony and N. Biggs. *Computational Learning Theory - An Introduction*. Cambridge University Press, 1992.
- [29] E. R. Dougherty, R. M. Haralick, Y. Chen, C. Agerskov, U. Jacobi, and H. Sloth. Estimation of Optimal Morphological τ -opening Parameters based on Independent Observation of Signal and Noise Pattern Spectra. *Signal Processing*, 29:265–281, 1992.
- [30] R. P. Loce and E. R. Dougherty. Optimal Morphological Restoration: The Morphological Filter Mean-Absolute-Error Theorem. *Visual Communication and Image Representation*, 3(4):412–432, December 1992.

- [31] R. P. Loce. *Morphological Filter Mean-Absolute-Error Representation Theorems and Their Application to Optimal Morphological Filter Design*. PhD thesis, Center of Image Processing - Rochester Institute of Technology, 1993.
- [32] R. P. Loce and E. R. Dougherty. Mean-Absolute-Error representation and Optimization of Computational-Morphological Filters. *Graphical Models and Image Processing*, 57(1):27–37, 1995.
- [33] J. Barrera, E. R. Dougherty, and N. S. Tomita. Automatic Programming of Binary Morphological Machines by Design of Statistically Optimal Operators in the Context of Computational Learning Theory. Technical Report RT-MAC-9603, Instituto de Matemática e Estatística - USP, April 1996.
- [34] J. Barrera, E. R. Dougherty, and N. S. Tomita. Automatic Programming of Binary Morphological Machines by Design of Statistically Optimal Operators in the Context of Computational Learning Theory. *Electronic Imaging*, 6(1):54–67, January 1997.
- [35] R. Hirata Jr., E. R. Dougherty, and J. Barrera. Aperture Filters. *Signal Processing*, 80(4):697–721, April 2000.
- [36] R. Hirata Jr., E. R. Dougherty, and J. Barrera. Some Applications of Aperture Filters. In J. Goutsias, L. Vincent, and D. S. Bloomberg, editors, *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, volume 18, pages 119–128. Kluwer Academic Publishers, 2000. Fifth ISMM.
- [37] L. Devroye, L. Györfi, and G. Lugosi. *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*. Springer-Verlag, 1996.
- [38] R. P. Loce and E. R. Dougherty. Facilitation of Optimal Binary Morphological Filter Design Via Structuring Element Libraries and Design Constraints. *Optical Engineering*, 31(5):1008–1025, May 1992.
- [39] N. S. T. Hirata, E. R. Dougherty, and J. Barrera. A Switching Algorithm for Design of Optimal Increasing Binary Filters Over Large Windows. *Pattern Recognition*, 33(6):1059–1081, June 2000.
- [40] I. Täbuş, D. Petrescu, and M. Gabbouj. A training Framework for Stack and Boolean Filtering – Fast Optimal Design Procedures and Robustness Case Study. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(6):809–826, June 1996.
- [41] M. Gabbouj and E. J. Coyle. Minimum Mean Absolute Error Stack Filtering with Structural Constraints and Goals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38(6):955–968, June 1990.
- [42] P. Kuosmanen and J. T. Astola. Optimal stack filters under rank selection and structural constraints. *Signal Processing*, 41:309–338, 1995.
- [43] W. X. Zheng, A. Cantoni, and K. L. Teo. Robust Design of Envelope-Constrained Filters in the Presence of Input Uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(8):1872–1877, August 1996.

- [44] J. Goutsias. Morphological Analysis of Discrete Random Shapes. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2:193–215, 1992.
- [45] E. R. Dougherty. Optimal Mean-Square N-Observation Digital Morphological Filters I. Optimal Binary Filters. *CVGIP: Image Understanding*, 55(1):36–54, January 1992.
- [46] E. R. Dougherty. Optimal Mean-Square N-Observation Digital Morphological Filters II. Optimal Gray-Scale Filters. *CVGIP: Image Understanding*, 55(1):55–72, January 1992.
- [47] E. R. Dougherty and M. Haralick. Unification of Nonlinear Filtering in the Context of Binary Logical Calculus, Part I: Binary Filters. *J. Math. Imaging Vision*, 2(2):173–183, 1992.
- [48] E. R. Dougherty. Unification of Nonlinear Filtering in the Context of Binary Logical Calculus, Part II: Gray-Scale Filters. *J. Math. Imaging Vision*, 2(2):185–192, 1992.
- [49] E. R. Dougherty and R. Loce. *Mathematical Morphology in Image Processing*, chapter Efficient Design Strategies for the Optimal Binary Digital Morphological Filter. Marcel Dekker, 1993.
- [50] E. R. Dougherty and R. P. Loce. Optimal Mean-Absolute-Error Hit-or-Miss Filters: Morphological Representation and Estimation of the Binary Conditional Expectation. *Optical Engineering*, 32(4):815–827, April 1993.
- [51] E. R. Dougherty and R. P. Loce. Precision of Morphological-Representation Estimators for Translation-invariant Binary Filters: Increasing and Nonincreasing. *Signal Processing*, 40:129–154, 1994.
- [52] J. Barrera and E. R. Dougherty. Representation of Gray-Scale Windowed Operators. In Henk J.A.M. Heijmans and Jos B.T.M. Roerdink, editors, *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, volume 12 of *Computational Imaging and Vision*, pages 19–26. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, May 1998.
- [53] R. Hirata Jr., Edward R. Dougherty, and Junior Barrera. Some applications of aperture filters. In Luc Vincent, editor, *Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*. Kluwer Academic, Dordrecht. The document in this repository is the manuscript submitted to ISMM'2000.
- [54] N. S. T. Hirata, E. R. Dougherty, and J. Barrera. Efficient Switching Algorithm for Designing Increasing Binary Filters. In E. R. Dougherty and J. T. Astola, editors, *Nonlinear Image Processing X*, volume 3646 of *Proc. SPIE*, pages 185–196, San Jose, CA, January 1999.
- [55] N. S. T. Hirata, E. R. Dougherty, and J. Barrera. Bayesian Switching Algorithm for the Optimal increasing Binary Filter. In *Proceedings of EUSIPCO - 2000*, volume IV, pages 1889–1892, 2000.
- [56] E. R. Dougherty and J. Barrera. Bayesian Design of Optimal Morphological Operators Based on Prior Distributions for Conditional Probabilities. *Acta Stereologica*, 16(3):167–174, 1997.
- [57] J. Barrera, E. R. Dougherty, and N. S. T. Hirata. Design of Optimal Morphological Operators from Prior Filters. *Acta Stereologica*, 16(3):193–200, 1997.
- [58] E. R. Dougherty and R. P. Loce. Optimal Binary Differencing Filters: Design, Logic Complexity, Precision Analysis, and Application to Digital Document Processing. *Electronic Imaging*, 5(1):66–86, January 1996.

- [59] R. P. Loce and E. R. Dougherty. *Enhancement and Restoration of Digital Documents: Statistical Design of Nonlinear Algorithms*. SPIE - The International Society for Optical Engineering, Bellingham, 1997.
- [60] O. V. Sarca, E. R. Dougherty, and J. T. Astola. Specially Constrained Boolean Filters. *Signal Processing*, 71(3):247–263, December 1998.
- [61] N. S. T. Hirata, E. R. Dougherty, and J. Barrera. Design of Large-Window Binary Filters via Iteration. In *Intelligent Robots and Computer Vision XVII: Algorithms, Techniques, and Active Vision*, volume 3522 of *Proc. of SPIE*, pages 173–182, Boston, Massachusetts, November 1998.
- [62] N. S. T. Hirata, E. R. Dougherty, and J. Barrera. Iterative Design of Morphological Binary Image Operators. *Optical Engineering*, 39(12):3106–3123, December 2000.
- [63] O. V. Sarca, E. R. Dougherty, and J. T. Astola. Two-stage Binary Filters. *Electronic Imaging*, 8(3):219–232, July 1999.
- [64] E. J. Coyle, M. Gabbouj, and J. Yoo. Order Statistic-Based Nonlinear Filters: Stack Filters and Weighted Median Filters. In *IEEE Winter Workshop on Nonlinear Digital Signal Processing*, pages T_3.1–T_3.9, 1993.
- [65] J. T. Astola and P. Kuosmanen. Representation and optimization of stack filters. In E. R. Dougherty and J. T. Astola, editors, *Nonlinear Filters for Image Processing*, pages 237–279. SPIE and IEEE Press, Bellingham, 1999.
- [66] N. S. T. Hirata, J. Barrera, and E. R. Dougherty. Design of Statistically Optimal Stack Filters. In J. Stolfi and C. L. Tozzi, editors, *Proc. of Sibgrapi'99*, pages 265–274, Campinas, SP, Brazil, 1999.
- [67] Nina S. T. Hirata. *Projeto Automático de Operadores – Explorando Conhecimentos a Priori*. PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo, Brazil, October 2000.
- [68] Marcel Brun, Edward R. Dougherty, Roberto Hirata Jr, and Junior Barrera. Design of Optimal Binary Filters Under Joint Multiresolution-Envelope Constraint. *Pattern Recognition Letters*. *Accepted*.
- [69] H. J. A. M. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, Boston, 1994.
- [70] S. C. Port. *Theoretical Probability for Applications*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John-Wiley, 1994.
- [71] M. H. DeGroot. *Probability and Statistics*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1989.
- [72] E. R. Dougherty and J. Barrera. Logical Image Operators. In E. R. Dougherty and J. T. Astola, editors, *Nonlinear Filters for Image Processing*, pages 1–60. SPIE and IEEE Press, Bellingham, 1999.
- [73] N. S. Tomita. Programação Automática de Máquinas Morfológicas Binárias baseada em Aprendizado PAC. Master's thesis, Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo, São Paulo, SP - Brasil, março 1996.

- [74] J. Barrera, R. Terada, R. Hirata Jr, and N. S. T. Hirata. Automatic Programming of Morphological Machines by PAC Learning. *Fundamenta Informaticae*, 41(1-2):229–258, January 2000.
- [75] R. Hirata Jr. *Projeto de Operadores Morfológicos para Imagens e Sinais – Abordagem de Reticulados Finitos Discretos*. PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo, Brazil, December 2001.
- [76] M. Schmitt and F. Preteux. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume 2, chapter Boolean texture analysis and synthesis. Ed. J. Serra, Academic Press, New York, 1988.
- [77] N. S. T. Hirata, J. Barrera, and E. R. Dougherty. The Incremental Splitting of Intervals Algorithm for the Design of Binary Image Operators. In H. Talbot and R. Beare, editors, *Proceedings of the 6th International Symposium: ISMM 2002*, 2002.
- [78] Edward R. Dougherty, Junior Barrera, Gerard Mozelle, Seungchan Kim, and Marcel Brun. Multiresolution Analysis for Optimal Binary Filters. *Mathematical Imaging and Vision*, 14(1):53–72, 2001.
- [79] J. Barrera, R. Terada, R. Hirata Jr, and N. S. T. Hirata. Automatic Programming of Morphological Machines by PAC Learning. In J. Goutsias and H. J. A. M. Heijmans, editors, *Mathematical Morphology*, pages 229–258. IOS Press, 2000.
- [80] N. S. T. Hirata, J. Barrera, and E. R. Dougherty. Boolean Function Minimization by Incremental Splitting of Intervals. *submitted*, 2001.
- [81] Marcel Brun, David L. Sabbagh, Seungchan Kim, and Edward R. Dougherty. Corrected Small-Sample Estimation for the error of the Optimal Binary Filter. *Pattern Recognition*. *Submitted*.
- [82] T. M. Mitchell. *Machine Learning*. McGraw-Hill Series in Computer Science. McGraw-Hill, March 1997.
- [83] Junior Barrera, Edward R. Dougherty, and M. Brun. Hybrid human-machine binary morphological operator design. An independent constraint approach. *Signal Processing*, 80(8):1469–1487, August 2000.
- [84] Roberto Hirata Jr., Marcel Brun, Junior Barrera, and Edward R. Dougherty. Multiresolution Design of Aperture Operators. *Mathematical Imaging and Vision*, 16(3):199–222, 2002.
- [85] Marcel Brun, Roberto Hirata Jr., Junior Barrera, and Edward R. Dougherty. Nonlinear filter design using envelopes. *Signal Processing*. *Submitted*, 2001.
- [86] Edward R. Dougherty, Seungchan Kim, Gerard Mozelle, Junior Barrera, and Marcel Brun. Multiresolution Filter Design. In Edward R. Dougherty; Jaakko T. Astola, editor, *Nonlinear Image Processing XI*, volume 2961, pages 12–21, January 2000.
- [87] Edward R. Dougherty Junior Barrera and Marcel Brun. Hybrid human-machine binary morphological operator design. In *Nonlinear Image Processing X*, volume 3646 of *Proceedings of SPIE*, pages 162–173, January 1999.
- [88] R. Hirata Jr., Marcel Brun, Junior Barrera, and Edward R. Dougherty. Image restoration by multiresolution aperture filters. In *Nonlinear Image Processing and Pattern Analysis XII*, volume 4304 of *Proceedings of SPIE*, pages 256–264, January 2001.

- [89] Marcel Brun, Roberto Hirata Jr., Junior Barrera, and Edward R. Dougherty. Hybrid Human-machine Non-linear Filter Design Using Envelopes. In D. L. Borges and S.-T. Wu, editor, *Proceedings of Sibgrapi 2001*, pages 106–111, Florianopolis, Brasil, October 2001. IEEE.
- [90] Edward R. Dougherty, Junior Barrera, Marcel Brun, Seungchan Kim, Roberto M. Cesar J., Ydong Chen, Michael Bittner, and Jeff M. Trent. Inference from clustering with application to gene-expression microarrays. *Journal of Computational Biology*, 9(1):105–126, 2002.
- [91] Ronaldo F. Hashimoto, Edward R. Dougherty, Marcel Brun, Z. Zhou, Michael L. Bittner, and Jeff M. Trent. Efficient Selection of Feature Sets Possessing High Coefficients of Determination Based on Incremental Determinations. *Signal Processing. Submitted*.
- [92] Junior Barrera and Marcel Brun. Translation Invariant Transformation of Discrete Random Sets. In *Proceedings of Sibgrapi 1998*, pages 450–455, Rio de Janeiro, Brasil, October 1998. IEEE.
- [93] Junior Barrera, Marcel Brun, Routo Terada, and Edward R. Dougherty. Boosting OCR classifier by optimal edge noise filtering. *ISMM 2000, International Symposium on Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing V*, 2000.
- [94] Edward R. Dougherty, Junior Barrera, Marcel Brun, Seungchan Kim, Roberto M. Cesar J., Ydong Chen, Michael Bittner, and Jeff M. Trent. Time series inference from clustering. In *Microarrays: Optical Technologies and Informatics*, volume 4266 of *Proceedings of SPIE*, pages 222–227, January 2001.
- [95] Marcel Brun, Junior Barrera, Nina S. T. Hirata, Nestor W. Trepode, Daniel Dantas, and Routo Terada. Multi-resolution Classification Trees in OCR Design. In D. L. Borges and S.-T. Wu, editors, *Proceedings of Sibgrapi 2001*, pages 59–66, Florianopolis, Brasil, October 2001. IEEE.
- [96] Marcel Brun, Yoganand Balagurunathan, Junior Barrera, and Edward R. Dougherty. Clustering granulometric features. In *Image Processing: Algorithms and Systems*, volume 4667 of *Proceedings of SPIE*, January 2002.