

EXAMES PRELIMINARES PARA O DOUTORADO
IME-USP, Março, 1997
Prova de Análise de Algoritmos

Instruções:

- O candidato pode resolver todas as questões.
- A banca considerará questões cujos valores somem até 10 pontos de modo que a soma total das notas obtidas seja máxima.
- Mencionar os teoremas e propriedades usados para justificar suas afirmações.

Questão 1 (*Valor: 1 ponto*)

Prove ou disprove:

(a) $f = O(g) \implies 2^f = O(2^g)$

(b) $f = O(g) \implies f = O(f + g)$

Questão 2 (*Valor: 1 ponto*)

Quais posições de um vetor organizado como um heap de $2^n - 1$ elementos distintos poderiam ser ocupadas pelo terceiro maior elemento? E o terceiro menor elemento? Justifique. (Suponha que $n > 3$).

Questão 3 (*Valor: 1 ponto*)

Resolva a recorrência abaixo. Você pode supor que $n = 2^k$ para algum inteiro positivo k .

$$\begin{cases} T(1) = 4 \\ T(n) = 2T(n/2) + 3n + 2 \end{cases}$$

Questão 4 (*Valor: 1 ponto*)

Descreva um algoritmo que, em tempo $O(n)$, determina se um grafo com n vértices, dado por sua lista de adjacências, é uma árvore. (Nota: tempo linear no tamanho da entrada *não* é suficiente.)

Questão 5 (*Valor: 2 pontos*)

(a) Esquematize a prova de que a ordenação de n inteiros toma tempo $\Omega(n \log n)$.

(b) Descreva um algoritmo que, em tempo $O(n)$, ordena n inteiros, cada um deles em $\{1, 2, \dots, n^3\}$.

(c) O resultado em (b) contradiz (a)? Justifique.

Questão 6 (Valor: 2 pontos)

Considere o problema de se determinar se uma seqüência de n 0's e 1's tem dois 0's consecutivos. A única operação permitida sobre a seqüência é uma função $consulta(i)$, que devolve 0 se o i -ésimo elemento da seqüência é 0 e 1 caso contrário.

- (a) Mostre que se $n = 1 \pmod 3$, então existe um algoritmo que faz no máximo $n - 1$ consultas.
- (b) Mostre um algoritmo que, com no máximo n consultas, resolve o problema para qualquer n .

Questão 7 (Valor: 3 pontos)

(a) Escreva um algoritmo que recebe uma matriz M $n \times n$ de inteiros e encontra um caminho de $M_{1,n}$ a $M_{n,1}$ de forma a minimizar a soma dos valores absolutos das diferenças entre elementos consecutivos do caminho.

(b) Analise a complexidade de seu algoritmo.

Um caminho é definido por movimentos horizontais ou verticais entre elementos adjacentes da matriz. Por exemplo, para a matriz abaixo, o custo mínimo é 66.

1	17	6	46	7
4	58	15	6	10
2	8	61	18	29
9	18	6	23	9
11	6	13	41	12

Questão 8 (Valor: 3 pontos)

Considere um vetor A_1, \dots, A_n que é sabido ter um *elemento majoritário* a , isto é, mais da metade das entradas de A são iguais a a . Descreva um algoritmo que encontra esse elemento usando $O(n)$ comparações (o resultado de uma comparação $x : y$ é ou $x = y$ ou $x \neq y$). Prove que o seu algoritmo funciona.

Dica: mostre como diminuir o tamanho do problema fazendo apenas uma comparação.