Exercícios diversos

Exr 1.3 Simplifique a expressão $2^{\lg^2 n}$. Simplifique a expressão $n^{1/\lg n}$.

$$2^{\lg^2 n} = 2^{\lg n \cdot \lg n} = n^{\lg n}$$

$$n^{1/\lg n} = 2^{\lg n \cdot \frac{1}{\lg n}} = 2$$

Exr 1.4 É verdade que $2^{(n^k)} = (2^n)^k$? O que significa a expressão 2^{n^k}?

Não, $2^{n \cdot n \cdot n \ldots k \text{ vezes}} \neq 2^{n \cdot k}$

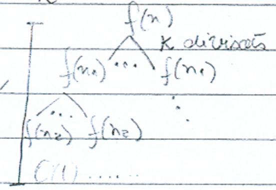
$$2^{(2^3)} = 256 \neq (2^2)^3 = 64$$

2^{n^k} significa $(2^n)^k$

outra: Supondo $2^{n^k} = 2^{n \cdot k}$ então $n^k = n \cdot k$ o que é absurdo para qualquer $n \geq 2$

Exr 1.5 Mostre que para quaisquer $n > 0$ e $k > 0$ tem-se $n^{\log k} = k^{\log n}$.

$\log n$



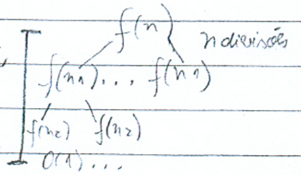
$f(n)$

$k \cdot f(n_1)$

$k^2 \cdot f(n_2)$

$k^{\log n} \cdot f(n_i)$

$\log k$



$f(n)$

$n \cdot f(n_1)$

$n^2 \cdot f(n_2)$

$n^{\log k} \cdot f(n_i)$

Em ambas as árvores existe o mesmo número de elementos.

$n-1-2+1$

Exr 1.6 Dê o valor da soma $\sum_{j=2}^{n-1} j$ e prove que sua resposta está certa.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(2 + (n-1)) \cdot (n-2)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n-2)}{2} = \frac{n^2 - 2n + n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

Prova por indução em n

base $n = 3$

$$\sum_{j=2}^{3-1} j = \sum_{j=2}^{2} j = 2 = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{3^2 - 3 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \;//$$

Passo $n > 3$ H.I: $S_{n-1} = \frac{(2 + (n-2)) \cdot (n-3)}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}$

$$S_n = S_{n-1} + n - 1$$

$$S_n = \frac{n^2 - 3n}{2} + n - 1$$

$$= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n - 2}{2} \;//$$

Exr 1.7 - Quanto vale S no fim do algoritmo?

1 $S \leftarrow 0$

2 para $i \leftarrow 2$ até $n-2$ faça

3 para $j \leftarrow i$ até n faça

4 $S \leftarrow S + 1$

Escreva um algoritmo mais eficiente que tenha o mesmo efeito.

$$\sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=i}^{n} 1 = \sum_{i=3}^{n-1} i = \frac{(3 + n - 1) \cdot (n-3)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n-3)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2n - 6}{2}$$

$$\frac{n^2 - n - 6}{2}$$

S ← 0
se $n > 3$
então
S ← $n^2/2 - n/2 - 3$

Ex 1.8 - Quanto vale S no fim do seguinte fragmento de código?

```
1 S ← 0
2 i ← n
3 enquanto i > 0 faça
4     para j ← 1 até n faça
          S ← S + 1
      i ← ⌊i/2⌋
```

S vale $n * (\lfloor \log n \rfloor + 1)$

Ex 1.10 - Seja k um número real diferente de 1. Mostre que
$k^0 + k^1 + k^2 + \ldots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$

Seja $S_n = k^0 + k^1 + k^2 + \ldots + k^n$
Temos $k \cdot S_n = k \cdot (k^0 + k^1 + \ldots + k^n)$
$k S_n = k^1 + k^2 + \ldots + k^n + k^{n+1}$

Logo, $k S_n - S_n = k^1 \ldots + k^{n+1} - k^0 + \ldots + k^n$
$k S_n - S_n = -k^0 + k^{n+1}$
$S_n (k - 1) = k^{n+1} - 1$
$S_n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$

Conclusão:
$k^0 + k^1 + \ldots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$ //

Exer 1.12 Dê uma fórmula fechada para a soma
$2^2 + 2^4 + 2^6 + \ldots + 2^{2k}$

$\sum_{i=0}^{k} k^i = \frac{k^{i+1} - 1}{k - 1}$ | $\sum_{i=1}^{k} k^i = \frac{k^{i+1} - 1}{k - 1} - 1$

$\sum_{i=1}^{k} (2^2)^i = \frac{(2^2)^{i+1} - 1}{2^2 - 1} - 1 = \frac{4^{i+1} - 1}{4 - 1} - 1 = \frac{4^{i+1} - 4}{3}$ //

Ex 1.9 Quanto vale S no fim do seguinte fragmento de código?

```
1. S ← 0
   para i ← 1 até n faça
       j ← i
       enquanto j > 0 faça
           S ← S + 1
           j ← ⌊j/2⌋
```

1 2
1
2

$n = 4$
$1 + 2 + 2 + 3 = 8$
$\lfloor \log 1 \rfloor + 1 + \lfloor \log 2 \rfloor + 1 + \lfloor \log 3 \rfloor + 1 + \lfloor \log 4 \rfloor + 1 = \sum_{i=1}^{4} \lfloor \log i \rfloor + n$

$S = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \log i \rfloor + n$

Exer 1.13 - Prove que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3$ é Θn^4

$\sum_{k=1}^{n} a \leq 1 + \int_1^n k^3 \, dk$
$\leq 1 + \frac{k^4}{4}$
$\leq \frac{k^4 + 4}{4}$
$\frac{k^4 + 4}{4} \leq \frac{1}{2} k^4$ para todo $n > 1$ o bound land

$\frac{k^4}{4} + 1 \leq \frac{k^4}{4} + \frac{k^4}{4}$
$\leq \frac{2k^4}{4}$
$\leq \frac{k^4}{2}$ //
falta

Exc 1.4 - Prove que $1+n+n^2+n^3+\dots+n^9 = \Theta(n^9)$

$$S_n = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$$

$$S_n = \frac{n^{k+1}-1}{n-1} = \frac{n^{10}-1}{n-1}$$

$$\frac{1}{2}\cdot n^9 \le \frac{n^{10}-1}{n-1} \le 10n^9 \quad \text{para } n \ge 2$$

$$\frac{1}{2}n^9 \le n^9 - 1$$

$$= \frac{1}{n-1}(n^9-1)$$

$$\le \frac{1}{n-1}(n^{10}-1) \;//$$

$$\frac{n^{10}-1}{n-1} \le 10.n^9 \quad \text{para } n \ge 2$$

$$\frac{n^{10}-1}{n-1} \le \frac{(n^9.n)-1}{n-1}$$

Não terminei

Exr 1.15 - Seja k um número real. Diga, da maneira mais precisa que puder, o que significa a expressão $\lfloor k \rfloor$.

único número inteiro i tal que

$i \le |k| < i+1$

Exr 1.34 - Seja n um inteiro positivo. Prove que $\lfloor \lfloor n/2 \rfloor / 2 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor$.

Prova

Seja $i = \lfloor n/2 \rfloor$

i e n são inteiros

$i \le n/2 < i+1 \qquad 2i \le n < 2i+2, \quad 2i \le n \le 2i+1$

Seja $j = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$

j e i são inteiros

$j \le i/2 < j+1 \qquad 2j \le i < 2j+2; \quad 2j \le i \le 2j+1$

$\times 2 \rightarrow 4j \le 2i \le 4j+2. \quad 4j \le 2i \le n \quad e \quad n-1 \le 2i \le n$

$n-1 \le 2i \le 4j+2 \qquad$ donde $4j \le n \le 4j+3$

$4j \le n < 4j+4 \quad \rightarrow \quad j \le n/4 < j+1$

$j = \lfloor n/4 \rfloor$

Outro modo

$k = \lfloor \lfloor n/2 \rfloor /2 \rfloor$. Vou mostrar que $k = \lfloor n/4 \rfloor$

$k \le \lfloor n/2 \rfloor /2 < k+1$

$2k \le \lfloor n/2 \rfloor < 2k+2$

$2k \le n/2 < 2k+2$

pois $i = \lfloor n/2 \rfloor$, $i \le n/2 < i+1$, $2k \le i \le n/2$ e $i+1 < 2k+2$

$k \le n/4 < k+1$

$k = \lfloor n/4 \rfloor$

Exr 1.27 e 1.35. Suponha que n, a e b são inteiros positivos. Mostre que $\left\lfloor \frac{\lfloor n/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$

Seja $k = \left\lfloor \frac{\lfloor n/a \rfloor}{b} \right\rfloor$. Vou provar que $k = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$

$k \le \frac{\lfloor n/a \rfloor}{b} < k+1 \qquad$ donde $\quad bk \le \lfloor n/a \rfloor < bk+b$

$bk \le n/a < bk+b \quad$ pois $\quad i \le n/a < i+1$, $bk \le i \le n/a$ e $i = \lfloor n/a \rfloor$ assim $i < bk+b$

então $abk \le n < abk+ab \quad$ donde

$k \le \frac{n}{ab} < k+1 \qquad k = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor \;//$

Exr 1.17. Sejam n, a e b números inteiros positivos. Suponha que $b > 4$. É verdade que $\lfloor n/a - 1/b \rfloor = \lfloor n/a \rfloor$?

$K = \left\lfloor \frac{n}{a} - \frac{1}{b} \right\rfloor$. Vou provar por contradição que

$K \neq \lfloor n/a \rfloor$.

$K \leq \frac{n}{a} - \frac{1}{b} < K+1$ donde $K + \frac{1}{b} \leq \frac{n}{a} < K+1+\frac{1}{b}$

$aK + \frac{a}{b} \leq n < aK + a + \frac{a}{b}$ donde

$aK \leq n - \frac{a}{b} < aK + a$ donde

$K \leq \frac{n - \frac{a}{b}}{a} < K+1$ assim $K = \left\lfloor \frac{n - \frac{a}{b}}{a} \right\rfloor$

ou seja $K \neq \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$

Exr 1.18. É verdade que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor$ para quaisquer x e y? Não é verdade

Suponha $x = 1.3$ e $y = 1.7$

$\lfloor 1.3 \rfloor + \lfloor 1.7 \rfloor = 1 + 1 = 2$ $\neq$

$\lfloor 1.3 + 1.7 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$

Exr 1. 19 É verdade que $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x+1 \rceil$ para qualquer x?

Não é verdade.

Suponha $x = 0{,}9$

Temos: $\lfloor 0{,}9 \rfloor + 1 = 1$ e $\lceil 0{,}9+1 \rceil = \lceil 1{,}9 \rceil = 2$ //

Exc 1.21 Suponha que c é um número inteiro e x um número racional. É verdade que $\lceil cx \rceil = c\lceil x \rceil$?

Não é verdade.

Suponha $c = 5$ e $x = 0{,}2$

$\lceil 5 \cdot 0{,}2 \rceil = 1{,}0$ //

$5 \cdot \lceil 0{,}2 \rceil = 5 \cdot 1 = 5{,}0$ //

Exc 1.22 Use a notação $\lfloor\ \rfloor$ para representar o resto da divisão de n por 7.

$n \bmod 7 = n - \lfloor n/7 \rfloor \cdot 7$

Exc 1.23 Simplifique a expressão $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$ supondo que m e n são números inteiros.

errado.

$\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+m}{2} + \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor$

$i \leq \frac{n+m}{2} < i+1$

$2i \leq m+n < 2i+2$

$j = \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$

$2j \leq n-m+1 < 2j+2$

$2i+2j \leq n-m+1+n+m < 2i+2+2j+2$

$2i+2j \leq 2n+1 < 2i+2+2j+2$

$2(i+j) \leq 2n+1 < 2(i+j)+4$

$i+j \leq \frac{2n+1}{2} < (i+j)+2$ ← não tinha que ser 1?

$i+j = \left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor$

Capítulo 3
Recorrências

Exr 3.1 – Considere a seguinte recorrência: $f(1) = 3$
para $n = 2^1, 2^2, 2^3$ $\quad f(n) = f(n/2) + 1$
Quanto vale $f(16)$? Mostre que $f(n) = lg(n) + 3$ para
$n = 2^0; 2^1, 2^2 \ldots$

$n = 1 \Rightarrow 3$
$n = 2 \Rightarrow 3 + 1 = 4$
$n = 4 \Rightarrow 4 + 1 = 5$
$n = 8 \Rightarrow 5 + 1 = 6$
$n = 16 \Rightarrow 6 + 1 = 7$ //

Desenrola recorrência:

$f(n) = f(n/2) + 1$
$= f(n/4) + 1 + 1$
$= f(n/8) + 1 + 1 + 1$
$= f\left(\frac{n}{2^i}\right) + i$ $\quad * \frac{n}{2^i} = 1$
$\quad n = 2^i$ assim $\boxed{\log n = i}$
$= f(1) + \log n$
$= 3 + \log n$ //

Vou provar que $F(n) = lg(n) + 3$
Prova por indução em n

base: $n = 1$
$f(1) = 3 = \log 1 + 3 = 0 + 3 = 3$ //

passo: $n \geq 2^1, 2^2, 2^3$
H.I: $F(n/2) = 3 + \log(n/2)$

$f(n) = f(n/2) + 1$
$\overset{H.I}{=} 3 + \log(n/2) + 1$
$= 3 + \log n - \log 2 + 1$
$= 3 + \log n$ //
$= F(n)$

Exr 3.2 – Considere a seguinte recorrência:
$g(1) = 3$ e $g(n) = g(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ para todo inteiro $n > 1$.
Dê uma fórmula fechada para a recorrência.
Desenrola recorrência:

$g(1) = 3$
$g(n) = g(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ para $n > 1$ $\quad$ Lema: $\left\lfloor \frac{\lfloor n/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$

$= g(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$
$= g\left(\left\lfloor \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor\right) + 1 + 1$
$= g\left(\left\lfloor \frac{\lfloor n/4 \rfloor}{2} \right\rfloor\right) + 1 + 1 + 1$
$= g\left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor\right) + i$
$= g(1) + \lfloor \log n \rfloor$
$= 3 + \lfloor \log n \rfloor$ //

como $\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor = 1$
$\lfloor n \rfloor = \lfloor 2^i \rfloor$
$\lfloor \log \lfloor n \rfloor \rfloor = \lfloor \log \lfloor 2^i \rfloor \rfloor$
$\lfloor \log n \rfloor = \lfloor \log 2^i \rfloor$
$\lfloor \log n \rfloor = \lfloor i \rfloor \rightarrow$ inteiro
$\lfloor \log n \rfloor = i$ //

Vou provar que $G(n) = 3 + \lfloor \log n \rfloor$

Prova por indução em n

base: $n = 1$

$g(1) = 3 = 3 + \lfloor \log 1 \rfloor = 3 = G(n)$

Passo: $n > 1$ H.I: $g(\lfloor n/2 \rfloor) = 3 + \lfloor \log \lfloor n/2 \rfloor \rfloor$

$g(n) = g(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$

$= 3 + \lfloor \log \lfloor n/2 \rfloor \rfloor + 1$

$= 3 + \lfloor \log n/2 \rfloor + 1$

$= 3 + \lfloor \log n \rfloor - \lfloor \log 2 \rfloor + 1$

$= 3 + \lfloor \log n \rfloor$ //

Exr 3.4 - Sejam a, b, c e números positivos. Seja T a função definida pela seguinte recorrência:

$T(1) = a$

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + bn + c \qquad n = 2^1, 2^2, 2^3$

Desenrolando a recorrência:

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + bn + c$

$= 2 \cdot [2 \cdot T(n/4) + b\frac{n}{2} + c] + bn + c$

$= 2^2 \cdot (2 \cdot T(n/8) + b\frac{n}{4} + c) + bn + 2c + bn + c$

$= 2^3 \cdot T(n/8) + bn + 4c + bn + 2c + bn + c$

$= 2^i T(\frac{n}{2^i}) + b i n + c \cdot \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \qquad \frac{n}{2^i} = 1$

$= n \cdot a + b \log n \cdot n + c \cdot \sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i \qquad i = \log n$

Somatório $\sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i = \frac{2^{\log n - 1 + 1} - 1}{2 - 1} = 2^{\log n} - 1 = n - 1$ //

$= an + bn\log n + c \cdot (n-1)$

$= an + b \cdot n \log n + cn - c$ //

$F(n) = an + bn \log n + cn - c$

Vou provar que $f(n) = F(n)$

Prova de indução em n.

base: $n = 1$

$f(1) = a = a + b \log 1^{0} + \cancel{c - c} = a = F(n)$ ok!

Passo: $n > 2^2, 2^3 \ldots$

Hipótese: $f(n/2) = a\frac{n}{2} + b\frac{n}{2} \log n/2 + c \cdot \frac{n}{2} - c$

$f(n) = 2 \cdot f(n/2) + bn + c$

$= 2 \cdot \left(a\frac{n}{2} + b\frac{n}{2} \log n/2 + c\frac{n}{2} - c \right) + bn + c$

$= an + bn \log n/2 + cn - 2c + bn + c$

$= an + bn(\log n - 1) + cn + bn - c$

$= an + bn\log n - \cancel{bn} + cn + \cancel{bn} - c$

$= an + bn\log n + cn - c$

$= F(n)$ //

Exer. 3.5: Considere a recorrência $f(1)=1$ e $f(n) = 2\, f(n/2) + 3$

Quero provar que $f(n) = O(n)$

$$f(n) = 2\, f(n/2) + 3$$
$$= 2.\left(2 f(n/4) + 3\right) + 3$$
$$= 2^2.\left(2 f(n/8) + 3\right) + 6 + 3$$
$$= 2^3 f(n/8) + 12 + 6 + 3$$
$$= 2^i f(n/2^i) + 3 . \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \qquad 2^i = n \Rightarrow i = \log n$$
$$= n . f(1) + 3 . \sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i \qquad \text{Somatório } \sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i$$
$$= n + 3.(n-1) \qquad = \frac{2^{\log n - 1 + 1} - 1}{2 - 1}$$
$$= 4n - 3 \;// \qquad = 2^{\log n} - 1$$
$$= n - 1$$

Vou provar que $f(n) = F(n) = 4n - 3$

Prova por indução em n.

base: $n = 1$

$f(1) = 1 = 4.1 - 3 = 1 = F(n)$ ok!

Passo: $n \geq 2^1, 2^2, 2^3 \ldots$

H.I: $f(n/2) = 4.\frac{n}{2} - 3 = 2n - 3 \;//$

$$f(n) = 2.f(n/2) + 3$$
$$\overset{H.I}{=} 2.(2n-3) + 3$$
$$= 4n - 6 + 3$$
$$= 4n - 3 \;//$$
$$= F(n)$$

Sim é $O(n)$.

Transparência: $T(1) = 1$

$T(n) = T(n-1) + 3n + 2$ para $n \geq 1$

Desenrolando a recorrência:

$$T(n) = T(n-1) + 3n + 2 \qquad i=1 \quad n-0$$
$$= T(n-2) + 3(n-1) + 2 + 3n + 2 \qquad i=2 \quad n-1$$
$$= T(n-3) + 3(n-2) + 2 + 3(n-1) + 2 + 3n + 2 \qquad i=3 \quad n-2$$
$$= T(n-i) + 3. \sum_{k=0}^{i-1} (n-k) + 2.i \qquad n - i = 1, \quad \boxed{i = n-1}$$
$$= T(1) + 3. \sum_{i=0}^{n-1-1} (n-i) + 2.(n-1)$$
$$= 1 + 3.\left(\sum_{i=0}^{n-2} n - \sum_{i=0}^{n-2} i\right) + 2n - 2$$

Somatório $\sum_{i=0}^{n-2} i = \frac{(n-1).(0+n-2)}{2} = \frac{(n-1).(n-2)}{2}$

$$= 1 + 3.\left[(n-1).n - \left[\frac{(n-1).(n-2)}{2}\right]\right] + 2n - 2$$
$$= 1 + 3.\left[n^2 - n - \left(\frac{n^2 - 2n - n + 2}{2}\right)\right] + 2n - 2$$
$$= 1 + 3n^2 - 3n - \left(\frac{3n^2 - 9n + 6}{2}\right) + 2n - 2$$
$$= 1 + 3n^2 - 3n - \frac{3n^2}{2} + \frac{9n}{2} - 3 + 2n - 2$$
$$= 1 + \frac{6n^2 - 3n^2}{2} - n + \frac{9n}{2} - 5$$
$$= 1 + \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 5 = \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 4 \;// = t(n)$$

Vou provar que $T(n) = t(n)$

Prova por indução em n.

base: $n = 1$

$T(n) = 1 = \frac{3.1}{2} + \frac{7}{2} - 4 = \frac{3+7-8}{2} = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1 = t(n)$ ok!

Hipótese de Indução: $t(n-1) = \frac{3(n-1)^2}{2} + \frac{7(n-1)}{2} - 4$

Passo: $n > 1$

$T(n) = T(n-1) + 3n + 2$

$= \frac{3(n-1)^2 + 7(n-1) - 8}{2} + 3n + 2$

$= \frac{3(n^2 - 2n + 1) + 7n - 7 - 8}{2} + 3n + 2$

$= \frac{3n^2 - 6n + 3 + 7n - 15 + 6n + 4}{2}$

$= \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 4$ //

$= t(n)$ OK!

Ex. 3.6 - Considere a recorrência:

$T(2^0) = 1$

$T(n) = 4T(n/2) + n$ para $n = 2^1, 2^2, \dots$

desenrolando a recorrência

$T(n) = 4T(n/2) + n$

$= 4.(4T(n/4) + \frac{n}{2}) + n$

$= 4.4.(4T(n/8) + \frac{n}{4}) + 2n + n$

$= 4^i T(\frac{n}{2^i}) + 4n + 2n + n$

$= 4^i T(\frac{n}{2^i}) + n . \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$

$= 4^{\log n} T(1) + n . \sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i$

$= n^{\log 4} + n.(n-1)$

$= n^2 + n^2 - n = 2n^2 - n$ //

$\frac{n}{2^i} = 1$

$i = \log n$

Somatória

$\sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i$

$= \frac{2^{\log n - 1 + 1} - 1}{2 - 1}$

$= 2^{\log n} - 1$

$= n - 1$ //

Vou provar que $T(n) = t(n) = 2n^2 - 2$

Prova por indução em n.

base: $n = 1$

$T(1) = 1 = 2 . 1^2 - 1 = 1 = t(n)$

H.I: $T(n/2) = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

Passo: $n > 2^1, 2^2 \dots$

$T(n) = 4T(n/2) + n$

$\overset{H.I}{=} 4 . \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) + n$

$= 2n^2 - 2n + n$

$= 2n^2 - n$ //

$= t(n)$

Ex. 3.9 - Seja T a função definida pela recorrência

$T(1) = 1$

$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ para $n > 1$. A que classe Θ $T(n)$ pertence? Para simplificar:

Desenrolando a recorrência

$T(n) = 3T(n/2) + n$ para $n > 2^1, 2^2, 2^3 \dots$

$= 3.3T(n/4) + \frac{3n}{2} + n$

$= 3^3 T(n/8) + 3^2 \frac{n}{4} + \frac{3n}{2} + n$

$= 3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k . n$

$= 3^{\log n} T(1) + \sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^i . n$

$= n^{\log 3} + \frac{2.n.n^{\log 3}}{n} - 2n$

$\frac{n}{2^i} = 1$

$i = \log n$

$\frac{3}{2} - 2 . \frac{1}{2}$

$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 1 . 2 = 2 . \frac{3^{\log n}}{2^{\log n}} - 2$

$\frac{2 . 3^{\log n}}{n}$

$= n^{\log 3} + 2n^{\log 3} - 2n$

$= 3n^{\log 3} - 2n \quad // \quad = t(n)$

Somatória

$$\sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^i = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n - 1 + 1} - 1}{\frac{3-2}{2}}$$

$$= 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 2$$

$$= 2\cdot\frac{n^{\log 3}}{2^{\log n}} - 2$$

$$= \boxed{2\frac{n^{\log 3}}{n} - 2}$$

Vou provar $T(n) = t(n)$

Prova por indução em n.

base: $n = 1$

$T(1) = 1 = 3\cdot 1^{\log 3} - 2 = 1 = t(n)$

passo: $n > 2^1, 2^2 \ldots$

H.I: $T(n/2) = 3\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{\log 3} - 2\cdot\frac{n}{2}$

$T(n) = 3T(n/2) + n$

$\overset{H.I}{=} 3\cdot\left(3\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{\log 3} - n\right) + n$

$= 9\left(\frac{n}{2}\right)^{\log 3} - 3n + n$

$= 9\cdot\left(\frac{n^{\log 3}}{2^{\log 3}}\right) - 2n$

$= 9\cdot\frac{n^{\log 3}}{3^{\log 2}} - 2n$

$= 9\cdot\frac{n^{\log 3}}{3} - 2n = 3n^{\log 3} - 2n = t(n) \quad //$

Como $3n^{\log 3} - 2n \geq \frac{1}{2}\cdot n^{\log 3}$ para $n \geq 1$ OK!

então $t(n) = \Omega(n)$ e $3n^{\log 3} - 2n \leq 3n^{\log 3}$ para $n \geq 1$

então $t(n) = O(n)$, $t(n) = \Theta(n)$ //

Ex: 3.7 - Considere a recorrência $T(1) = 1$

$T(n) = 4T(n/2) + n$ p/ $n \geq 2^1, 2^2 \ldots$

Prove, por indução, que $T(n) = O(n^2)$.

Como no exercício 3.6 a fórmula fechada para esta recorrência é $2n^2 - n$.

Vou provar que $T(n) = t(n)$

Prova por indução em n:

base: $n = 1$

$T(1) = 1 = 2\cdot 1^2 - 1 = 1 = t(n)$

passo: $n \geq 2^1, 2^2 \ldots$

H.I: $T(n/2) = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

$T(n) = 4T(n/2) + n$

$\overset{H.I}{=} 4\cdot\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) + n$

$= 2n^2 - n \quad //$

É óbvio que $t(n) = 2n^2 - n \leq 2\cdot n^2$ para $n \geq 1$

Então $t(n) = O(n^2)$.

Exr 3.16 - Resolva a seguinte recorrência: $T(n) = 1$ e $n = 1$

$T(n) = T(n/2) + n \log n$ para todo $n > 1$ que seja potência de 2.

desenrolando:

$T(n) = T(n/2) + n \log n$ $\qquad \frac{n}{2^i} = 1$

$= T(n/4) + \frac{n}{2}\log n/2 + n \log n$ $\qquad i = \lg n$

$= T(n/8) + \frac{n}{4}\log n/4 + \frac{n}{2}\log n/2 + n \log n$

$= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{n}{2^{i-1}}\lg\frac{n}{2^{i-1}} + \frac{n}{2^{i-2}}\lg\frac{n}{2^{i-2}} + \frac{n}{2^{i-3}}\lg\frac{n}{2^{i-3}}$

$$= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{n}{2^{i-1}} \lg n - \frac{n}{2^{i-1}} \lg 2^{i-1} + \frac{n}{2^{i-2}} \lg n - \frac{n}{2^{i-2}} \log 2^{i-2} + \frac{n}{2^{i-3}} \lg n - \frac{n}{2^{i-3}} \lg 2^{i-3}$$

$$= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n.\lg n . \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - n . \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{2^k} . \log 2^k$$

$$= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n.\lg n . \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - n . \sum_{k=1}^{i-1} \frac{k}{2^k}$$

$$= T(1) + n.\lg n \sum_{i=0}^{\lg n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i - n . \sum_{i=1}^{\lg n-1} \frac{i}{2^i}$$

$$= 1 + n.\lg n \left(2 - \frac{2}{n}\right) - n . \sum_{i=1}^{\lg n-1} \sum_{j=i}^{\lg n-1} \frac{1}{2^j}$$

$$= 1 + 2n\lg n - 2\lg n + 2n.(\lg n - 1)\frac{1}{2^{\lg n}} - 2n.\left(\frac{-2}{n} + 2 - 1\right)$$

$$= 2n\lg n - 2\lg n + \frac{2n\lg n - 2n}{n} + 4 - 2n + 1$$

$$= 2n\lg n - 2n + 3 \quad // \qquad F(n) +$$

Somatório

$$\sum_{i=0}^{\lg n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg n - 1 + 1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}^{\lg n} - 1}{-1/2} = 2 - 2.\frac{1}{n} \quad //$$

Somatório

$$\sum_{i=1}^{\lg n-1} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\lg n-1} \sum_{j=i}^{\lg n-1} \frac{1}{2^j} = -2 \sum_{i=1}^{\lg n-1} \left(\frac{1}{2^{\lg n}} - \frac{1}{2^i}\right) = -2 . \sum_{i=1}^{\lg n-1} \frac{1}{2^{\lg n}} - 2\sum_{i=0}^{\lg n-1} \frac{1}{2^i} - 1$$

$$\boxed{-2(\lg n - 1)\frac{1}{2^{\lg n}} + 2.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg n} - 1}{1/2 - 1}} - 1$$

Vou provar que $T(n) = F(n)$

base: $n = 1$

$T(1) = 1 \leq 2.1\lg 1 - 2.1 + 3 = 1 = F(n)$

passo: $n \geq 2^1, 2^2, 2^3$

H.I: $T\left(\frac{n}{2}\right) = 2.\frac{n}{2}\lg \frac{n}{2} - 2.\frac{n}{2} + 3 = n\lg n/2 - n + 3$

$T(n) = T(n/2) + n\lg n$

$\overset{H.I}{\leq} n\lg n/2 - n + 3 + n\lg n$

$\leq n\lg n - n - n + 3 + n\lg n$

$= 2n\lg n - 2n + 3 \; //$

$T(n) = O(n.\lg n)$

$\frac{\lg n}{\lg n}$ $\frac{\lg n}{2^{\lg n}}$ $\lg n$ $\int \frac{k}{x} dx$ $\frac{\lg n}{\lg n}$

Usando o teorema Mestre:

$T(n) = T(n/2) + n\lg n$

$f(n) = n.\lg n \; //$

$n\lg n = \Omega\, n^{\lg_b a + \epsilon}$? $\quad n\lg n = \Omega\, n^{\lg_2 1 + \epsilon}$ para $\epsilon = 1$

$n\lg n = \Omega\, n^{0+1} = \Omega(n)$

e $a.f(n/b) \leq c.f(n)$, ou seja, $1.\frac{n}{2}.\lg n/2 \leq \frac{1}{2} . n\lg n$

$\frac{n}{2}\lg n - \frac{n}{2} \leq \frac{n}{2}\lg n$

então $T(n) = \Theta(n\lg n) \; //$

Ex 4.4 (Cormen) b- Dê a cota superior e inferior assintótica.

$T(n) = 5(T(n/5)) + n/\lg n$

$= 5T(n/5) + n/\lg n$

$= 5.\left(5T(n/5^2) + \frac{n/5}{\lg n/5}\right) + n/\lg n$

$= 5^2\left(5T(n/5^3) + \frac{n/5^2}{\lg n/5^2}\right) + 5.\frac{\frac{n}{5}}{\lg n/5} + n/\lg n$

$= 5^3 T\left(\frac{n}{5^3}\right) + \frac{n}{\lg n/5^2} + \frac{n}{\lg n/5} + \frac{n}{\lg n}$

$= 5^i T\left(\frac{n}{5^i}\right) + n . \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{\lg n - k.\lg 5}$

$\frac{n}{5^i} = 1$

$n = 5^i = \lg n = i\lg 5$

$i = \frac{\lg n}{\lg 5}$

$= n.a + n.\sum_{i=0}^{\frac{\lg n}{\lg 5}-1} \frac{1}{\lg n - i\lg 5}$ (alterar o somatório do fim para zero)

$\frac{\lg n}{\lg 5} - 1 \to \frac{1}{\lg 5}$

$\frac{\lg n}{\lg 5} - 2 \to \frac{1}{2\lg 5}$

$\vdots$

$\frac{1}{\frac{\lg n}{\lg 5}.\lg 5}$

$= na + n.\frac{1}{\lg 5} . \sum_{i=1}^{\frac{\lg n}{\lg 5}} \frac{1}{i}$

$= na + \frac{n}{\lg 5} \cdot \left(\lg\left(\frac{\lg n}{\lg 5}\right) + 1\right) \Rightarrow \boxed{na + \frac{n}{\lg 5} . \lg\left(\frac{\lg n}{\lg 5}\right) + \frac{n}{\lg 5} + 1}$

$$na + \frac{n}{\lg s} \cdot (\lg\lg n - \lg\lg s) + \frac{n}{\lg s} + 1$$

$$na + \frac{n}{\lg s} \cdot \lg\lg n - \frac{n}{\lg s} \cdot \lg\lg s + \frac{n}{\lg s} + 1$$

$$t(n) = O\left(\frac{n}{\lg s} \lg\lg n\right)$$

[Questão 3 - prova março 1997] - Resolva a recorrência abaixo. Você pode supor que $n = 2^k$ para algum inteiro positivo k. (1 ponto)

$$\begin{cases} t(1) = 4 \\ t(n) = 2t(n/2) + 3n + 2 \end{cases}$$

$$\frac{n}{2^i} = 1 \qquad \boxed{i = \lg n}$$

Desenrolando

$$2 \cdot \left(2t(n/4) + 3\frac{n}{2} + 2\right) + 3n + 2$$

$$2^2\left(2t(n/8) + 3n/4 + 2\right) + 3n + 4 + 3n + 2$$

$$2^3 t(n/2^3) + 3n + 3n + 3n + 2^3 + 2^2 + 2^1$$

$$2^i t\left(\frac{n}{2^i}\right) + 3n \cdot i + \sum_{k=1}^{i} 2^k$$

$$n \cdot t(1) + 3n \cdot \lg n + \sum_{i=0}^{\lg n} 2^i - 1$$

Somatório

$$\sum_{i=0}^{\lg n} 2^i = \frac{2^{\lg n + 1} - 1}{2 - 1} = 2^{\lg n + 1} - 1 \;//$$

$$4n + 3n \lg n + 2^{\lg n + 1} - 1 - 1$$

$$= 3n \lg n + 4n + 2^{\lg n} \cdot 2 - 2 = 3n \lg n + 6n - 2 \;// = f(n)$$

Vou provar que $t(n) = f(n)$

Prova por indução em n.

base: $n = 1$

$$T(1) = 4 = 3 \cdot 1 \lg 1 + 6 \cdot 1 - 2 = 4 = f(n) \quad \text{ok!}$$

passo: $n > 2^1, 2^2 \ldots$

$$\text{H.I} = t(n/2) = 3 \cdot \frac{n}{2} \lg n/2 + 6 \cdot \frac{n}{2} - 2$$

$$= \frac{3n}{2} \lg n - \frac{3n}{2} + \frac{6n}{2} - 2$$

$$= \frac{3n}{2} \lg n + \frac{3n}{2} - 2$$

$$t(n) = 2 \cdot t(n/2) + 3n + 2$$

$$\overset{\text{H.I}}{=} 2 \cdot \left(\frac{3n}{2} \lg n + \frac{3n}{2} - 2\right) + 3n + 2$$

$$= 3n \lg n + 3n - 4 + 3n + 2$$

$$= 3n \lg n + 6n - 2 \;//$$

$$= f(n)$$

Ex 3.19 - Considere a função f definida pela seguinte recorrência: $f(1) = 2$ e $f(n) = f(3n/4) + 3$ para $n > 1$. Para que valores de n a função f está definida? Enuncie e prove uma fórmula fechada exata para f.

Vale para potência de $4/3$

Desenrolando:

$$f(n) = f\left(\frac{3n}{4}\right) + 3$$

$$= f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 n\right) + 3 + 3$$

$$= f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 n\right) + 3 + 3 + 3$$

$$= f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^i n\right) + 3i$$

$$= f(1) + 3 \cdot \lg_{4/3} n$$

$$= 2 + 3 \cdot \lg_{4/3} n \;//$$

detalhe:

$\left(\frac{3}{4}\right)^i n = 1$

$n = \left(\frac{4}{3}\right)^i$

$\lg n = \lg\left(\frac{4}{3}\right)^i$

$\lg n = i \lg\left(\frac{4}{3}\right)$

regra $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

$i = \frac{\lg n}{\lg 4/3}$

$\boxed{i = \log_{4/3} n}$

Vou provar que $F(n) = f(n)$

Prova por indução em n:

base $n = 1$

$f(1) = 2 = 2 + 3 \cdot \lg_{4/3} 1 = 2 = F(n)$ ok!

passo $n > \left(\frac{4}{3}\right)^1, \left(\frac{4}{3}\right)^2 \ldots$

H.I: $f\left(\frac{3}{4}n\right) = 2 + 3 \cdot \lg_{4/3}\left(\frac{3}{4}n\right)$

$f(n) = f\left(\frac{3n}{4}\right) + 3$

$\overset{H.I}{=} 2 + 3 \lg_{4/3}\left(\frac{3}{4}n\right) + 3$

$= 2 + 3 \lg_{4/3} n - 3 \cdot \lg_{4/3} 4/3 + 3$

$= 2 + 3 \lg_{4/3} n - 3 + 3$

$= 2 + 3 \lg_{4/3} n$ //

Exer 3.20 - Suponha que $f(1) = 1$ e $f(n) = f(n-1) + 2n$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$ Mostre que $f(n) = \Omega(n^2)$

desenrolando:

$f(1) = 1$

$f(n) = f(n-1) + 2n$ //

$1+4 = 5$

$5 + 6 = 11$

$n - i = 1$

$\boxed{i = n-1}$

$f(n) = f(n-1) + 2n$

$= f(n-2) + 2(n-1) + 2n$

$= f(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) + 2n$

$= f(n-i) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{i-1} (n-k)$

$= f(1) + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (n-i)$

$= 1 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} n - 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} i$

$= 1 + 2 \cdot n(n-1) - 2 \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}\right)$

$= 1 + 2n^2 - 2n - (n^2 - 2n - n + 2)$

$= n^2 + n - 1$

$= f(n)$

Somatório

$\sum_{i=0}^{n-2} n = n \cdot (n-2-0+1)$

$= n \cdot (n-1)$ //

$\sum_{i=0}^{n-2} i = \frac{(n-1) \cdot (0+n-2)}{2}$

$= \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ //

$n^2 - 2n - n + 2$

$(n-1) \cdot (2+n)$

Vou provar que $f(n) = T(n)$

base: $n = 1$

$f(1) = 1 = 1^2 + 1 - 1 = 1 = $ OK

passo: $n > 2, 3, 4 \ldots$

H.I: $f(n-1) = (n-1)^2 + (n-1) - 1 = n^2 - 2n + 1 + n - 1 - 1$

$f(n) = f(n-1) + 2n$

$= n^2 - n - 1 + 2n$

$= n^2 + n - 1$ //

$\frac{1}{2} \cdot n^2 \le n^2 + n - 1$ para $n > 2$

$\frac{1}{2} n^2 \le n^2 - 1 \le n^2 + n - 1$

Portanto $n^2 + n - 1 = \Omega(n^2)$

[Exr. Alair 10.6] Resolva a recorrência $T(1) = 0$ $T(n) = 2T(n/2) + n$ para $n = 2, 4, 8 \dots$ Mostre por indução que a sua solução está correta.

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
$$= 2\left(2T(n/4) + n/2\right) + n$$
$$= 2^2\left(2T(n/8) + n/4\right) + n + n$$
$$= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n.i$$
$$= n.T(1) + n.\lg n$$
$$= n \lg n$$
$$= t(n)$$

$\frac{n}{2^i} = 1$

$\boxed{\lg n = i}$

Vou provar que $T(n) = t(n)$

Prova por indução em n

base: $n = 1$

$T(1) = 0 = 1.\lg 1 - 0 = t(1)$ ok!

passo: $n \ge 2^1, 2^2, 2^3 \dots$

H.I: $t(n/2) = n/2 . \lg n/2 = \frac{n}{2} \lg n - n/2$

$$t(n) = 2t(n/2) + n$$
$$= 2.\left(\frac{n}{2} \lg n - n/2\right) + n$$

$$= n \lg n - n + n$$
$$= n \lg n$$
$$= t(n) \quad \text{ok!}$$

Exr [Alair A1.J] Escreva um algoritmo que calcule $\lfloor \lg n \rfloor$

O algoritmo Funcao recebe um numero inteiro n e devolve $\lfloor \lg n \rfloor$.

```
Funcao (n)
    se n > 1
        p ← ⌊n/2⌋
        devolva Funcao(p) + 1
    senão
        devolva 0
```

Exr [Alair 10 F] - Projete um algoritmo que recebe um vetor $A[1..n]$ de números inteiros e um número inteiro m e devolve um índice i tal que $1 \le i \le n-m$ e a soma $A[i] + \dots + A[i+m]$ seja próxima de zero. Qual o consumo de tempo do seu algoritmo?

O algoritmo Funcao recebe um vetor $A[1..n]$ e um numero inteiro m e retorna um índice i tal que $1 \le i \le m-n$ e a somaMin $= A[i] + \dots + A[i+m]$ seja a mais próxima de zero. m recebe valores > 0

Função (A, m)

1 somamin ← ∞		$O(1)$
2 indice ← −∞		$O(1)$
3 Para i ← 1 até $n-m$		$O(n-m+1)$
4 soma ← 0		$O(n-m)$
5 Para k ← i até $i+m$	$(i+m-i+1)+(i+1+m-(i+1)-1)+\dots$	
6 soma ← soma + A[k]	$(m+1)+(m+1)+\dots+2$	
7 se soma < somamin		$O(n-m)$
8 então somamin ← soma		
9 indice ← i		
10 devolva indice		$O(1)$

Tamanho da instância: Par (m, n)

Nas linhas 5: $(i+m-i+1)+(i+1+m-(i+1)+1)+\dots+3$

$(m+1)+(m+1)+\dots+3$.

$T(n)$ é o consumo de tempo.

Então: O consumo é de $(n-m)\cdot(m+1)$

$T(n) = n.m + n - m^2 - m$

$m(n + \frac{1}{m} - m - 1)$

Exemplo: $m=3$ $n=5$

$5-3=2$

$O(m(n+\frac{1}{m}-m-1))$

Outra forma

$\sum_{i=1}^{n-m}\sum_{j=i}^{i+m} 1 = \sum_{i=1}^{n-m}(i+m-i+1) = \sum_{i=1}^{n-m}(m+1)$

$= (n-m-1+1)\cdot(m+1) = (n-m)\cdot(m+1) = n.m - m^2 + n - m$

crescente. Escreva um algoritmo de seleção para o problema. Analise a correção e prova invariante. Analise o consumo.

Para i ← 1 até $n-1$	$O(n)$
min ← i	$O(n-1)$
Para j ← $i+1$ até n	$n+(n-1)+(n-2)+\dots+2$
Se $A[j] < A[min]$	$(n-1)+(n-2)+\dots+1$
min ← j	
temp ← $A[i]$	$O(n)$
$A[i]$ ← $A[min]$	$O(n)$
$A[min]$ ← temp	$O(n)$

1	2	3	4	5
47	20	1	45	2

$n-2+1 = n-1$

$n-(n-1+1)+1 =$

$n-n+1 = 1$

Tamanho da instância n

Consumo de tempo: $T(n)$

$T(n) = O(n) + O(n-1) + \sum_{i=2}^{n}(n-i) + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + O(n) + O(n) + O(n)$

nº de comparações

$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i = n.(n-1) - \frac{(n-1).(1+n-1)}{2}$

$= \frac{2n^2-2n-(n-1).(n)}{2} = \frac{2n^2-2n-n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

Invariante: $A[1..i]$ está ordenado

Início: $i=1$, e $A[1]$ está ordenado de forma trivial por conter um elemento.

Manutenção: Vou mostrar que o invariante não muda após um loop. O segundo loop busca um índice com valor mínimo e caso encontre troca com o índice atual i reestabelecendo o invariante.

Término: $i=n$. O loop não executará mais e se estabelece $A[1..n]$ ordenado.

[Exercício 2T] - É verdade que $n + \sqrt{n}$ é $O(n)$?
Sim.
Vou provar que $n + \sqrt{n} \leq 2 \cdot n$ para $n \geq 1$

$n + \sqrt{n} = n + n^{1/2} \leq n + n^{1/2} \cdot n^{1/2} \leq n + n$
$= 2n$ //

[Exercício 2T] É verdade que n é $O(\sqrt{n})$?
Não.
Vou provar por contradição que n não é $O(\sqrt{n})$.

$n \leq c \cdot \sqrt{n}$ para $n \geq N_0$
$n \leq c \cdot n^{1/2}$
$c \leq \frac{n}{n^{1/2}}$ $\quad 1 - \frac{1}{2}$

$c \leq n^{1/2}$ O que é absurdo pois c deve ser constante livre de n.

Assim n não é $O(\sqrt{n})$.

[Exercício 2T] - É verdade que $n^{2/3}$ é $O(\sqrt{n})$?
Não.
Vou provar por contradição que $n^{2/3}$ não é $O(\sqrt{n})$

$n^{2/3} \leq c \cdot \sqrt{n}$ para $n \geq N$
$n^{2/3} \leq c \cdot n^{1/2}$
$c \leq \frac{n^{2/3}}{n^{1/2}}$

$c \leq n^{1/6}$ O que é absurdo pois c deve ser constante livre de n.

[Exercício 25] - Prove que $n^2 + 999n + 9999 = O(n^2)$

Vou provar que $n^2 + 999n + 9999 \leq 5 \cdot n^2$ para $n \geq 1000$

$n^2 + 999n + 9999 \leq n^2 + 999n + n^2 \leq n^2 + n^2 + n^2$
$= 3n^2 \leq 5n^2$

Exr 7.2 - Mostre que todo heap de altura h tem entre 2^h e $2^{h+1} - 1$ nós.

raiz $\quad h = 0 \quad 2^0 = 1 \leq$ nº de nós $\leq 1 = 2^0$
$h = 1 \quad 2^1 = 2 \leq$ nº de nós $\leq 3 = 2^2 - 1$
$h = 2 \quad 2^2 = 4 \leq$ nº de nós $\leq 7 = 2^3 - 1$
$h = i \quad 2^i \leq$ nº de nós $\leq 2^{i+1} - 1$

Outra solução:

Como o heap tem h níveis: $0 \ldots h-1$
Para $j = 0, 1, \ldots, h-1$, cada nível j tem 2^j nós.
O nível h tem k nós, sendo $1 \leq k \leq 2^h$
Assim o nº total de nós será:
se $k = 2^h$ então $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{h-1} + 2^h = 2^{h+1} - 1$
se $k = 1$ então $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{h-1} + 1 = 2^h$

~~Exr~~ Alair 12.A - A altura de i em $A[1..m]$ é o comprimento da mais longa sequência da forma (filho(i), filho(filho(i)), fi.(fi.(fi.(i)))... onde filho(i) vale $2i$ ou $2i+1$. Mostre que a altura de i é $\lfloor \lg \frac{m}{i} \rfloor$
É verdade que $\lfloor \lg m/i \rfloor = \lfloor \lg m \rfloor - \lfloor \lg i \rfloor$?

$\lfloor 1{,}6 \rfloor = 1$

$\lfloor \lg m/i \rfloor = \lfloor \lg m - \lg i \rfloor = \lfloor \overset{3,3}{\lg 9} - \overset{1,7}{\lg 3} \rfloor = 1{,}00 \neq$ assim não é verdade.
$\lfloor \lg 9 \rfloor - \lfloor \lg 3 \rfloor = 2{,}00$
$3 - 1 = 2{,}00$

/ /

Seja h a altura de i

h é o comprimento da sequência $(2i, 4i, 8i, \ldots, 2^h i)$

onde $2^h i \le m < 2^{(h+1)} i$. Assim,

$$2^h i \le m < 2^{h+1} i$$

$$2^h \le \frac{m}{i} < 2^{h+1}$$

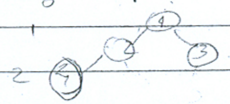
$$\lg 2^h \le \lg \frac{m}{i} < \lg 2^{h+1}$$

$$h \le \lg \frac{m}{i} < h+1$$

Então $h = \lfloor \lg(m/i) \rfloor$

[Exer 12.B] Mostre que um heap $A[1..m]$ tem no máximo $\lceil m/2^{h+1} \rceil$ nós com altura h.

Um nó i tem altura $h = \lfloor \lg m/i \rfloor$. Logo,



$$2^h \le m/i < 2^{h+1}$$

$$\frac{2^h}{m} \le \frac{1}{i} < \frac{2^{h+1}}{m}$$

$$\frac{2^h}{i} \le 1$$

$i\,2^i \le m \le 2^{i+1}$

$m=5$

$5 - 2^3 - 1 = 2$ $\quad \frac{4}{2^{0+1}} = 2$

$\frac{4}{2^3} \left(\frac{4}{8}\right) = 1$ $\quad 2^h = m$ $\quad \frac{4}{2^2} = 1$

$\frac{4}{2^2} = 1$ $\quad \frac{5}{2}$ $\quad \frac{4}{2^3} = 1$

h tem no máximo $2^{h+1} - 1$

cada nível tem até 2^j nós, supomos que h tem x nós tal que $1 \le x \le 2^h$ então no total será

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^h = 2^{h+1} - 1$, $m = 2^h - 1$

/ /

Exer 3.1 - Resolver a recorrência por Teorema Mestre.

$f(1) = 3$

$f(n) = f(n/2) + 1$

1) $f(n) \le n^{\log 1 - \epsilon}$ Não

2) $f(n) = \Theta(n^{\log 1})$ Sim $f(n) = n^{\log_2 1} \lg n$

Então $f(n) = \Theta(\lg n)$ //

Prova 01/2008

Questão 1.1 Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções dos inteiros nos inteiros positivos. O que significa dizer que $f(n) = O(g(n))$?

Significa que $g(n)$ é uma função que limita superiormente $f(n)$ tal que existe uma constante c onde $f(n) \le c \cdot g(n)$ para $n \ge N_0$.

1.2 - Explique por que a afirmação "O consumo de tempo do algoritmo A é pelo menos $O(n^2)$" não faz sentido.

Porque o termo O grande expressa o consumo máximo do algoritmo e as palavras "pelo menos" expressam o sentido do mínimo.

Questão 2 - Descreva um algoritmo com consumo de tempo $O(n \lg n)$ que, dados um conjunto S de n inteiros e outro inteiro x, determina se existem ou não dois elementos em S cuja soma é exatamente x.

▷ O algoritmo DETERMINA recebe um vetor $S[1..n]$ e um
▷ inteiro x e devolve verdadeiro se existem dois elementos em
▷ S cuja soma é x e devolve falso caso não existam dois elementos
▷ em S cuja soma é exatamente x.