

MAC0329 – Álgebra Booleana e Aplicações

Nina S. T. Hirata — DCC / IME / USP

Lista 3 — Data de entrega : 03/04/2003

1. Considere o conjunto dos números reais R , juntamente com as operações usuais de adição e multiplicação. Quais dos axiomas A1, A2, A3 da álgebra booleana vistos em sala não são satisfeitos ? É possível definir uma operação unária em R tal que o axioma A4 seja satisfeito ? Por quê ?
2. Seja $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, ou seja, o conjunto de divisores de 30. Defina operações binárias $+$ e \cdot e uma operação unária $\bar{}$ da seguinte forma: para quaisquer $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 + a_2 = \text{o mínimo múltiplo comum entre } a_1 \text{ e } a_2$$

$$a_1 \cdot a_2 = \text{o máximo divisor comum entre } a_1 \text{ e } a_2$$

$$\bar{a}_1 = 30/a_1$$

Quais são os elementos identidade com respeito a $+$ e \cdot ? Mostre que A com as três operações acima é uma álgebra booleana.

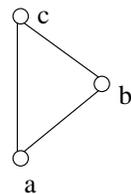
3. Usando os axiomas e leis da álgebra booleana, prove o Teorema do Consenso, isto é, mostre que para quaisquer elementos x, y e z de uma álgebra booleana a seguinte igualdade é verdadeira.

$$xy + yz + \bar{x}z = xy + \bar{x}z$$

4. Simplifique a seguinte expressão (derive uma expressão equivalente e mais curta, a mais curta que você conseguir derivar):

$$x + xyz + yz\bar{x} + wx + \bar{w}x + \bar{x}y$$

5. Mostre que a configuração ao lado não pode ocorrer no diagrama de Hasse de nenhum poset.



6. Seja o poset dado pelo diagrama ao lado :

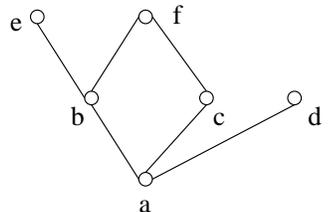
a) Liste todos os elementos da relação de ordem expressa pelo diagrama.

b) O poset ao lado tem maior elemento? Tem menor elemento? Em caso afirmativo, diga qual é, e em caso negativo diga por que não tem.

c) Quais são os elementos maximais do poset ao lado? E os minimais?

d) O poset ao lado é um reticulado? Por quê?

Existe algum subconjunto com mais de dois elementos no poset ao lado que seja um reticulado? Qual?



7. Mostre que em qualquer álgebra booleana $x + y = y$ se, e somente se, $xy = x$. Expresse essa relação na álgebra dos conjuntos.