3 Álgebra Booleana

Nesta parte veremos uma definição formal de álgebra booleana, a qual é feita via um conjunto de axiomas (ou postulados). Veremos também algumas leis ou propriedades de álgebras booleanas. Todas essas leis podem ser derivadas algebricamente a partir dos postulados.

Para as formalizações apresentadas aqui, procure associar os equivalentes vistos na parte de álgebra dos conjuntos e lógica proposicional. Recomenda-se também que o leitor faça o inverso: prestar atenção como os conceitos apresentados via álgebra de conjunto podem ser formalizados (tratados de forma abstrata).

Referências para esta parte do curso: [Hill and Peterson, 1981], [Garnier and Taylor, 1992], [Whitesitt, 1961], [Micheli, 1994], [Katz, 1994], entre outros.

3.1 Definição axiomática

Um conjunto de elementos A, juntamente com duas operações binárias $+$ e $\cdot$, é uma **álgebra booleana** se, e somente se, os seguintes postulados (Postulados de Huntington) são satisfeitos:

- (A1) As operações $+$ e $\cdot$ são **comutativas**, ou seja, para todo x e y em A,

$$x + y = y + x \quad \text{e} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

- (A2) Cada operação é **distributiva** sobre a outra, isto é, para todo x, y e z em A,

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \text{e} \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

- (A3) Existem em A **elementos identidade** 0 e 1, distintos, com relação às operações $+$ e $\cdot$, respectivamente. Ou seja, para todo $x \in A$,

$$x + 0 = x \quad \text{e} \quad x \cdot 1 = x$$

  A partir disto podemos dizer que há pelo menos dois elementos distintos em A.

- (A4) Para cada elemento $x \in A$ existe um elemento $\overline{x}$ em A tal que

$$x + \overline{x} = 1 \quad \text{e} \quad x \cdot \overline{x} = 0$$

  O elemento $\overline{x}$ será chamado **complemento** de x.

Denotaremos uma álgebra booleana por uma sextupla ordenada. No caso da definição acima, temos a álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$.

Observação: Alguns autores incorporam outros axiomas como parte da definição de uma álgebra booleana. Vale registrar que os postulados de Huntington correspondem a um conjunto minimal de postulados, isto é, nenhum deles pode ser derivado a partir dos demais. Mais ainda, é um conjunto completo no sentido de que qualquer propriedade de uma álgebra booleana pode ser derivada/provada a partir desses postulados. Mais adiante mostraremos como a propriedade associativa (frequentemente incorporada à definição de álgebra booleana) e várias outras podem ser derivadas a partir dos postulados acima.

3.2 Exemplos de álgebra booleana

Exemplo 1 O conjunto $B = \{0, 1\}$ onde definimos

$$\overline{1} = 0 \quad \overline{0} = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

é uma álgebra booleana.

Os axiomas A1, A3 e A4 são satisfeitos por definição. Para verificar o axioma A2 podemos construir uma tabela verdade com todas as possíveis combinações de valores para x, y e z. Vejamos a validade da distributividade em relaçao a $\cdot$, ou seja, que $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

x	y	z	$(y+z)$	$x \cdot (y+z)$	$(x \cdot y)$	$(x \cdot z)$	$(x \cdot y) + (x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1
				*			*

Denotamos esta álgebra booleana por $\langle B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$.

Exemplo 2: Dado um conjunto S, $\mathcal{P}(S)$ denota o conjunto das partes de S, isto é, $\mathcal{P}(S) = \{X : X \subseteq S\}$. Então, $\langle \mathcal{P}(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S \rangle$ é uma álgebra booleana.

Como já vimos na parte de álgebra dos conjuntos, os equivalentes aos 4 postulados são:

- (1) $X \cup Y = Y \cup X$ e $X \cap Y = Y \cap X$
- (2) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ e $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
- (3) $\emptyset \cap X = \emptyset$ e $U \cup X = U$
- (4) $X \cap X^c = \emptyset$ e $X \cup X^c = U$

Exemplo 3: A lógica (ou cálculo) proposicional visto nas aulas anteriores é uma álgebra booleana. De fato, ela tem uma correspondência um-para-um com $\langle B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$, conforme mostrado a seguir:

Lógica proposicional	álgebra booleana B
$\vee$	$+$
$\wedge$	$\cdot$
F	0
V	1
x'	$\overline{x}$

Como conseqüência, temos também a correspondência entre as tabelas-verdade:

x	y	x'	$x \vee y$	$x \wedge y$
F	F	V	F	F
F	V	V	V	F
V	F	F	V	F
V	V	F	V	V

x	y	$\overline{x}$	$x + y$	$x \cdot y$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Exemplo 4: O conjunto $B^n = B \times B \times \ldots \times B$, com as operações $+$, $\cdot$ e $\bar{}$ herdadas de B e definidas, para quaisquer $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B^n$, da seguinte forma

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n)$$

$$\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

é uma álgebra booleana.

Exemplo 5: A teoria de chaveamentos, que veremos mais adiante, é uma álgebra booleana.

Exercício:

a) Mostre que o conjunto B^n mais as operações definidas no exemplo 4 acima é uma álgebra booleana.

b) Considere o conjunto dos números reais R, juntamente com as operações usuais de adição e multiplicação. Quais dos axiomas A1, A2, A3 não são satisfeitos ? É possível definir uma operação unária em R tal que o axioma A4 seja satisfeito ?

c) Seja $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, ou seja, o conjunto de divisores de 30. Defina operações binárias $+$ e $\cdot$ e uma operação unária $\bar{}$ da seguinte forma: para quaiquer $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 + a_2 = \text{o menor múltiplo comum entre } a_1 \text{ e } a_2$$

$$a_1 \cdot a_2 = \text{o maior fator comum entre } a_1 \text{ e } a_2$$

$$\overline{a}_1 = 30/a_1$$

Quais são os elementos identidade com respeito a $+$ e $\cdot$? Mostre que A com as três operações acima é uma álgebra booleana.

3.3 Leis fundamentais da álgebra booleana

Princípio da dualidade: Cada expressão ou identidade algébrica dedutível a partir dos postulados em uma álgebra booleana continua válida se todas as ocorrências dos operadores $+$ e $\cdot$ e os elementos identidade 0 e 1 são trocados um pelo outro.

De fato, o dual de cada um dos axiomas é também um axioma. Observe:

$$\text{Axioma 1} \quad \begin{array}{ccccccc} x & \cdot & y & = & y & \cdot & x \\ & \downarrow & & & & \downarrow & \\ x & + & y & = & y & + & x \end{array}$$

$$\text{Axioma 2} \quad \begin{array}{ccccccccccccc} x & \cdot & (y & + & z) & = & (x & \cdot & y) & + & (x & \cdot & z) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ x & + & (y & \cdot & z) & = & (x & + & y) & \cdot & (x & + & z) \end{array}$$

$$\text{Axioma 3} \quad \begin{array}{ccccc} x & + & 0 & = & x \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ x & \cdot & 1 & = & x \end{array}$$

$$\text{Axioma 4} \quad \begin{array}{ccccc} x & + & \overline{x} & = & 1 \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ x & \cdot & \overline{x} & = & 0 \end{array}$$

Assim, se na prova de uma proposição E trocarmos cada proposição pela sua dual obtemos uma outra prova (válida, pois axiomas são trocadas por axiomas). Esta nova prova é uma prova da dual de E.

Desta parte em diante omitiremos o símbolo $\cdot$ na maioria das vezes; em vez de $x \cdot y$, escreveremos simplesmente xy. Suponha que $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$ é uma álgebra booleana. As seguintes igualdades (leis, propriedades) são válidas.

[**Unicidade do** 0 **e** 1] Os elementos 0 e 1 são únicos.

PROVA: Suponha que existem dois elementos zero, 0_1 e 0_2. Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer em A. Por A3, temos que

$$x_1 + 0_1 = x_1 \quad \text{e} \quad x_2 + 0_2 = x_2$$

Tome, em particular, $x_1 = 0_2$ e $x_2 = 0_1$. Assim temos

$$0_2 + 0_1 = 0_2 \quad \text{e} \quad 0_1 + 0_2 = 0_1$$

Por A1 e a transitividade de $=$, resulta que $0_1 = 0_2$.

A unicidade de 1 pode ser provada usando o princípio da dualidade.

[**Idempotência**] Para todo elemento $x \in A$, $\quad x + x = x$ e $\quad xx = x$.

PROVA:

$$\begin{array}{rcll} x + x & = & (x + x) \cdot 1 & (A3) \\ & = & (x + x)(x + \overline{x}) & (A4) \\ & = & x + x\overline{x} & (A2) \\ & = & x + 0 & (A4) \\ & = & x & (A3) \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} xx & = & xx + 0 & (A3) \\ & = & xx + x\overline{x} & (A4) \\ & = & x(x + \overline{x}) & (A2) \\ & = & x \cdot 1 & (A4) \\ & = & x & (A3) \end{array}$$

[**Identidade**] Para todo $x \in A$, $x + 1 = 1 \quad$ e $\quad x0 = 0$.

$$\begin{array}{rcll} x + 1 & = & 1 \cdot (x + 1) & (A3) \\ & = & (x + \overline{x})(x + 1) & (A4) \\ & = & x + \overline{x} \cdot 1 & (A2) \\ & = & x + \overline{x} & (A3) \\ & = & 1 & (A4) \end{array}$$

[**Complemento do um (zero)**] $\overline{1} = 0$ e $\overline{0} = 1$.

$$\begin{array}{rcll} \overline{1} & = & \overline{1} \cdot 1 & (A3) \\ & = & 0 & (A4) \end{array}$$

[**Absorção**] Para todo $x, y \in A$, $x + xy = x$ e $x(x+y) = x$.

$$\begin{array}{rcll} x + xy & = & x \cdot 1 + xy & (A3) \\ & = & x(1+y) & (A2) \\ & = & x \cdot 1 & \\ & = & x & (A3) \end{array}$$

[**Unicidade de $\overline{x}$**] O inverso de qualquer elemento $x \in A$ é único, isto é, se $x + y = 1$ e $xy = 0$ para algum $y \in A$, então $y = \overline{x}$.

PROVA: Por contradição. Suponha que existem dois elementos distintos $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ em A tais que

$$x + \overline{x}_1 = 1 \quad \text{e} \quad x + \overline{x}_2 = 1 \quad \text{e} \quad x\,\overline{x}_1 = 0 \quad \text{e} \quad x\,\overline{x}_2 = 0$$

$$\begin{array}{rcll} \overline{x}_2 & = & 1 \cdot \overline{x}_2 & (A3) \\ & = & (x + \overline{x}_1)\overline{x}_2 & \text{(hipótese)} \\ & = & x\overline{x}_2 + \overline{x}_1\overline{x}_2 & (A2) \\ & = & 0 + \overline{x}_1\overline{x}_2 & \text{(hipótese)} \\ & = & x\overline{x}_1 + \overline{x}_1\overline{x}_2 & \text{(hipótese)} \\ & = & (x + \overline{x}_2)\overline{x}_1 & (A2) \\ & = & 1 \cdot \overline{x}_1 & \text{(hipótese)} \\ & = & \overline{x}_1 & (A3) \end{array}$$

[**Involução**] Para todo $x \in A$, $\overline{\overline{x}} = x$.

PROVA: Seja $\overline{\overline{x}} = y$. Então, por A3 temos que $\overline{x}y = 0$ e $\overline{x} + y = 1$. Mas por A4, $\overline{x}x = 0$ e $\overline{x} + x = 1$. Por causa da unicidade do complemento, $\overline{\overline{x}} = y = x$.

[**Lema**] Para quaisquer $x, y, z \in A$, $x[(x+y)+z] = [(x+y)+z]x = x$.

$$\begin{array}{rcll} x[(x+y)+z] & = & [(x+y)+z]x & (A1) \\ x[(x+y)+z] & = & x(x+y) + xz & (A2) \\ & = & x + xz & \text{(absorção)} \\ & = & x & \text{(absorção)} \end{array}$$

[**Associatividade**] Para quaisquer $x, y, z \in A$, $x + (y+z) = (x+y)+z$ e $x(yz) = (xy)z$.

Seja

$$\begin{array}{rcll} Z & = & [(x+y)+z][x+(y+z)] & \\ & = & [(x+y)+z]x + [(x+y)+z](y+z) & (A2) \\ & = & x + [(x+y)+z](y+z) & (lema) \\ & = & x + \{[(x+y)+z]y + [(x+y)+z]z\} & (A2) \\ & = & x + \{[(y+x)+z]y + [(x+y)+z]z\} & (A1) \\ & = & x + \{y + [(x+y)+z]z\} & (lema) \\ & = & x + (y+z) & \end{array}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} Z &= (x+y)[x+(y+z)] + z[x+(y+z)] && (A2)\\ &= (x+y)[x+(y+z)] + z && (lema)\\ &= \{x[x+(y+z)] + y[x+(y+z)]\} + z && (A2)\\ &= \{x[x+(y+z)] + y\} + z && (lema)\\ &= (x+y)+z && (lema) \end{aligned}$$

Logo, $x+(y+z) = (x+y)+z$

[Teorema de DeMorgan] Para quaisquer $x, y \in A$, $\overline{(x+y)} = \overline{x}\,\overline{y}$ e $\overline{x\,y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Vamos mostrar que $(x+y) + \overline{x}\overline{y} = 1$ e que $(x+y)(\overline{x}\overline{y}) = 0$.

$$\begin{aligned} (x+y) + \overline{x}\overline{y} &= [(x+y)+\overline{x}][(x+y)+\overline{y}] && (A2)\\ &= [\overline{x}+(x+y)][\overline{y}+(x+y)] && (A1)\\ &= [(\overline{x}+x)+y)][x+(\overline{y}+y)] && (Identidade + A1)\\ &= 1\cdot 1 && (A4)\\ &= 1 && (Identidade) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+y)\cdot\overline{x}\overline{y} &= x(\overline{x}\overline{y}) + y(\overline{y}\overline{x}) && (A2 + A1)\\ &= (x\overline{x})\overline{y} + (y\overline{y})\overline{x} && (associativa)\\ &= 0\cdot 0 && (A4)\\ &= 0 && (Identidade) \end{aligned}$$

Portanto, pela unicidade do complemento, podemos concluir que $\overline{(x+y)} = \overline{x}\,\overline{y}$.

A igualdade dual pode ser demonstrada pelo princípio da dualidade, ou usando o fato de que as igualdades acima valem também para $\overline{x}$ e $\overline{y}$ no lugar de x e y.

Note a similaridade destas propriedades com as propriedades dos conjuntos e com as da lógica proposicional. Enquanto lá fizemos uso dos diagramas de Venn e das tabelas-verdade, respectivamente, para nos convencermos da validade das propriedades, aqui as demonstrações são algébricas.

Exercícios: Prove as seguintes igualdades

a) $x + \overline{x}y = x + y$ (e sua dual $x(\overline{x}+y) = xy$)

b) $x + y = \overline{\overline{x}\overline{y}}$ (e sua dual $xy = \overline{\overline{x}+\overline{y}}$)

c) $(x+y)(x+\overline{y}) = x$ (e sua dual $xy + x\overline{y} = x$)

d) (Teorema do consenso) $xy + yz + \overline{x}z = xy + \overline{x}z$ (e sua dual, $(x+y)(y+z)(\overline{x}+z) = (x+y)(\overline{x}+z)$

e) $[yx = zx \wedge y\overline{x} = z\overline{x}] \rightarrow (y = z)$

f) $(x+y+z)(x+y) = x+y$

Exercícios: Simplifique as seguintes expressões

a) $y\overline{z}(\overline{z} + \overline{z}x) + (\overline{x}+\overline{y})(\overline{x}y + \overline{x}z)$

b) $x + xyz + yz\overline{x} + wx + \overline{w}x + \overline{x}y$

Exercício: Mostre que em qualquer álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$, $x\overline{y} = 0$ se, e somente se, $xy = x$.