3.4 Álgebra booleana, ordens parciais e reticulados

Seja A um conjunto não vazio. Uma **relação binária** R sobre A é um subconjunto de $A \times A$, isto é, $R \subseteq A \times A$. Se $(x, y) \in R$, denotamos xRy (lê-se x-erre-y).

Relação de ordem parcial

Uma relação binária $\leq$ sobre A é uma **ordem parcial** se

1. (reflexiva) $x \leq x$, para todo $x \in A$
2. (anti-simétrica) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$, para todo $x, y \in A$
3. (transitiva) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$, para todo $x, y, z \in A$

Se $\leq$ é uma ordem parcial em A, então a relação $\geq$ definida por, para quaisquer $x, y \in A$, $x \geq y$ se e somente se $y \leq x$ é também uma ordem parcial em A.

Conjunto parcialmente ordenado (poset)

Um conjunto A munido de uma relação de ordem parcial $\leq$ é denominado um conjunto parcialmente ordenado (ou *poset*) e denotado por $(A, \leq)$. Se $(A, \leq)$ é um poset, então $(A, \geq)$ também é um poset.

Exemplo 1: A relação de ordem $\leq$ usual definida no conjunto dos números reais é uma ordem parcial (na verdade é uma ordem total, pois todos os elementos são comparáveis dois a dois). A relação $<$ não é uma ordem parcial pois ela não é reflexiva.

Exemplo 2: A relação de inclusão de conjuntos $\subseteq$ é uma ordem parcial.

Diagrama de Hasse

Escrevemos $x < y$ quando $x \leq y$ e $x \neq y$. Dado um poset $(A, \leq)$ e $x, y \in A$, dizemos que y cobre x se, e seomente se, $x < y$ e não há outro elemento $z \in A$ tal que $x < z < y$. Um diagrama de Hasse do poset $(A, \leq)$ é uma representação gráfica onde vértices representam os elementos de A e dois elementos x e y são ligados por uma aresta se e somente se y cobre x. Em um diagrama de Hasse, os elementos menores (com relação a ordem parcial) são em geral desenhados abaixo dos elementos maiores.

Exemplo: O diagrama de Hasse do poset $(\{a, b, c\}, \subseteq)$ é mostrado na figura 1.

Elementos notáveis de um poset

Seja $(A, \leq)$ um poset.

- Chama-se **menor elemento** de A um elemento $0 \in A$ tal que $0 \leq x$ para todo $x \in A$.
- Chama-se **maior elemento** de A um elemento $1 \in A$ tal que $x \leq 1$ para todo $x \in A$.

Teorema: Em um poset $(A, \leq)$, se existe um menor elemento, ele é único. Similarmente, se existe um maior elemento, ele é único.

PROVA: Suponha que 0_1 e 0_2 são menores elementos de $(A, \leq)$. Então, teríamos $0_1 \leq 0_2$ (pois 0_1 é menor elemento) e $0_2 \leq 0_1$ (pois 0_2 é menor elemento). Pela propriedade anti-simétrica da relação $\leq$, concluímos que $0_1 = 0_2$. A unicidade do maior elemento prova-se de forma análoga. $\square$

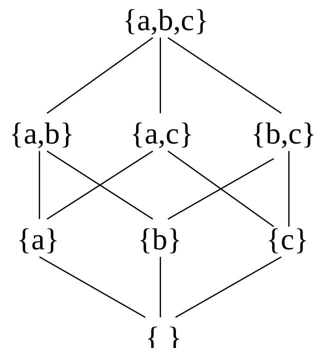


Figura 1: Diagrama de Hasse de $(\{a,b,c\}, \subseteq)$.

- Chama-se **elemento minimal** de A um elemento $a \in A$ tal que elemento algum de A precede estritamente a, isto é, para qualquer $x \in A$, se $x \leq a$ então $x = a$.
- Chama-se **elemento maximal** de A um elemento $a \in A$ tal que elemento algum de A sucede estritamente a, isto é, para qualquer $x \in A$, se $x \geq a$ então $x = a$.

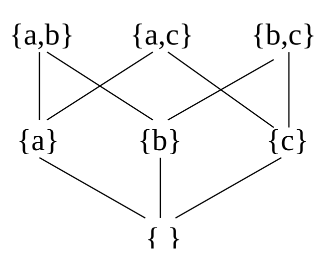
Teorema: Se 0 é o menor elemento de $(A, \leq)$, então 0 é o único elemento minimal de $(A, \leq)$.

Seja $(A, \leq)$ um poset e seja $X \subset A$.

- Chama-se **limitante inferior** de X em A a todo elemento $a \in A$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$.
- Chama-se **limitante superior** de X em A a todo elemento $a \in A$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in X$.

- Chama-se **ínfimo** de X em A o maior elemento dos limitantes inferiores de X em A. O ínfimo de X é denotado $\bigwedge X$. O ínfimo de $\{x, y\}$ é denotado $x \wedge y$. O operador $\wedge$ é chamado *conjunção*.
- Chama-se **supremo** de X em A o menor elemento dos limitantes superiores de X em A. O supremo de X é denotado $\bigvee X$. O supremo de $\{x, y\}$ é denotado $x \vee y$. O operador $\vee$ é chamado *união*.

Exemplo: Seja $S = \{a, b, c\}$ e considere o conjunto de todos os subconjuntos próprios de S, conforme ilustrado no diagrama abaixo.

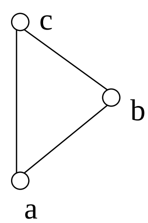


Este conjunto tem três elementos maximais, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$. O menor elemento deste conjunto é $\{\}$ e, conforme teorema acima, é o único elemento minimal. O conjunto não possui maior elemento.

Exercício: Mostre o teorema "Se 0 é o menor elemento de $(A, \leq)$, então 0 é o único elemento minimal de $(A, \leq)$".

Este teorema é válido com respeito ao maior elemento ?

Exercício: Mostre que a configuração abaixo não pode ocorrer no diagrama de Hasse de nenhum poset.



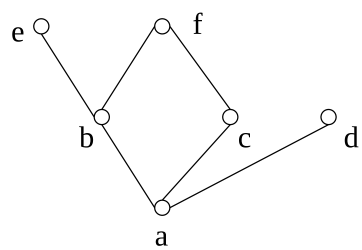
Exercício: Seja R uma ordem parcial sobre A e seja $X \subseteq A$. Mostre que $S = R \cap X \times X$ é uma relação de ordem parcial. (em outras palavras, qualquer subconjunto de um poset é também um poset).

Exercício: Seja a relação de divisibilidade $|$ definida sobre os inteiros positivos da seguinte forma: para quaisquer x, y inteiros positivos, $x|y$ se, e somente se, x divide y.

a) Mostre que $|$ é uma relação de ordem parcial

b) Desenhe o diagram de Hasse de $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ com respeito à relação parcial $|$.

Exercício: Liste os elementos da relação de ordem cujo diagrama de Hasse é o seguinte:



Reticulados

Um poset $(A, \leq)$ no qual cada par de elementos possui um ínfimo e um supremo em A é um **reticulado** (ou seja, para quaisquer $x, y \in A$, $x \wedge y$ e $x \vee y$ estão em A).

Um reticulado $(A, \leq)$ é **distributivo** se as operações de união $(\vee)$ e conjunção $(\wedge)$ são distributivas, isto é, para quaisquer x, y e z em A,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \text{e} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Um reticulado $(A, \leq)$ com 0 e 1 é **complementado** se todo elemento em A possui um complemento, isto é, para todo $x \in A$ existe $\overline{x}$ tal que $x \vee \overline{x} = 1$ e $x \wedge \overline{x} = 0$.

Teorema: Um reticulado $(A, \leq)$ distributivo e complementado é uma álgebra booleana.

PROVA: Considere um reticulado distributivo e complementado $(A, \leq)$ com as operações de união $\vee$ e conjunção $\wedge$ como definidos acima, e complementação $^-$. Claramente $\vee$ e $\wedge$ definem operações binárias em A. Sejam ainda 0 e 1 o menor e o maior elementos de $(A, \leq)$.

Vamos verificar que os axiomas de Huntington são satisfeitos. As operações $\vee$ e $\wedge$ são comutativas por definição; são distributivas pois o reticulado é distributivo; o axioma 4 é satisfeito pois o reticulado é complementado, e o axioma 3 é satisfeito pois $x \vee 0 = x$ e $x \wedge 1 = x$ para qualquer $x \in A$. $\square$

Exercício: Mostre por indução que todo subconjunto finito de um reticulado tem um ínfimo e um supremo.

Relação de ordem em uma álgebra booleana

Seja $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ uma álgebra booleana. Definimos uma relação binária $\leq$ em A da seguinte forma:

$$\forall x, y \in A, \quad x \leq y \ \text{ se e somente se } \ x + y = y \tag{1}$$

A relação $\leq$ definida pela equação 1 é uma relação de ordem parcial. De fato, pela lei de idempotência $x + x = x$ temos que $x \leq x$ para todo $x \in A$; se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x + y = y$ e $y + x = x$ e, portanto, pela comutatividade de $+$, segue que $x = y$; se $x \leq y$ e $y \leq z$, então

$$\begin{aligned} z &\geq y + z && \text{(pois } y \leq z\text{)} \\ &\geq (x + y) + z && \text{(pois } x \leq y\text{)} \\ &= x + (y + z) && \text{(associatividade de } +\text{)} \\ &\geq x + z && \text{(pois } y \leq z\text{)} \end{aligned}$$

Logo, $x \leq z$.

Exercício: Mostre que em qualquer álgebra booleana, $x + y = y$ se, e somente se, $xy = x$. Expresse essa relação na álgebra dos conjuntos.

Teorema: Sejam x, y elementos de uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$. Então os elementos $x + y$ e xy são respectivamente o supremo e o ínfimo de $\{x, y\}$.

Exercício: Prove o teorema acima.

Teorema: Toda álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ é um reticulado.

PROVA: Qualquer subconjunto $\{x, y\}$ de A tem supremo $x + y$ e ínfimo xy (teorema anterior). Logo $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ é um reticulado. $\square$

Exercício: Mostre que em qualquer álgebra booleana

a) $xy \leq x \leq x + y$, para todo x e y em A,

b) $0 \leq x \leq 1$, para todo x em A.

Átomo

Um **átomo** de um reticulado $(A, \leq)$ é um elemento não nulo x que não pode ser expresso na forma $x = y \vee z$ com $x \neq y$ e $x \neq z$.

Exemplo 1: Os átomos de $\langle \mathcal{P}(S), \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle$ são todos os conjuntos unitários.

Exemplo 2: A álgebra booleana relativa ao conjunto B^n de todas as n-uplas binárias tem como átomos as n-uplas com exatamente uma coordenada igual a 1.

Teorema: Um elemento não nulo x de um reticulado $(A, \leq)$ é um **átomo** se e somente se não há elemento y em A tal que $0 < y < x$.

PROVA: Suponha que x é um átomo e que $y < x$. Então, $x = x \wedge 1 = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = y \vee (x \wedge \overline{y})$. Como x é um átomo, então ou $y = x$ ou $(x \wedge \overline{y}) = x$. Como $x \neq y$ por hipótese, então $(x \wedge \overline{y}) = x$. Consequentemente $y = x \wedge y = (x \wedge \overline{y}) \wedge y = x \wedge (\overline{y} \wedge y) = x \wedge 0 = 0$.

Agora suponha que não há elemento y em A tal que $0 < y < x$ e (suponha por absurdo) que x não é um átomo. Então, $x = y \vee z$ para algum y e z diferentes de x. Como $y \leq y \vee z = x$ (um dos exercícios acima), temos que $y < x$. Além disso, $y = 0$ (pois caso contrário teríamos $0 < y$). Logo, $x = 0 \vee z = z \neq x$ (absurdo). $\square$

Teorema: Seja $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ uma álgebra booleana finita com conjunto de átomos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Cada elemento não nulo x de A pode ser escrito como o supremo de um conjunto de átomos

$$x = a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \cdots \vee a_{i_k}$$

Mais ainda, tal expressão é única, a menos da ordem dos átomos.

A demonstração é por contradição. Suponha que existem elementos que não são expressos como supremo de átomos. Seja x um desses elementos. Então como x não é atomo, temos que $x = y \vee z$ para algum $y < x$ e $z < x$, e mais ainda, pelo menos y ou z não são átomos. Supondo que y não é átomo, novamente temos que ele é supremo de dois elementos menores que ele, dos quais pelo menos um não é átomo. Assim, há uma seqüência de elementos não-átomos $x_0 = x > x_1 = y > x_2 > \ldots$. Mas, como A é finito, haverão índices k e m, com $k < m$ tal que $x_k = x_m$. Pela transitividade de $<$ em $x_k > x_{k+1} > \ldots > x_m$ segue que $x_k > x_m$, contradizendo $x_k = x_m$. Portanto, podemos concluir que todos os elementos não-nulos em A podem ser expressos como supremo de átomos.

Para mostrar a unicidade, primeiro devemos mostrar que

$$x = \bigvee \{a \in A : a \text{ é átomo e } a \leq x\}$$

isto é, x pode ser expresso como o supremo de todos os átomos menores ou igual a ele. (A demonstração fica como exercício).

Agora, suponha que $x = a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \cdots \vee a_{i_k}$ é uma expressão de x como supremo de átomos. Então $a_{i_j} \leq x$, e, portanto, $a_{i_j} \in \{a \in A : a \text{ é átomo}\}$. Agora, seja a um átomo tal que $a \in \{a \in A : a \text{ é átomo}\}$. Então,

$$0 \neq a = a \wedge x = a \wedge (a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \cdots \vee a_{i_k}) = (a \wedge a_{i_1}) \vee (a \wedge a_{i_2}) \vee \cdots \vee (a \wedge a_{i_k})$$

Pelo menos um $(a \wedge a_{i_j})$ precisa ser diferente de zero. Logo, $a \wedge a_{i_j} = a = a_{i_j}$ uma vez que ambos são átomos. Ou seja, a é um dos átomos em $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$. $\square$

Exercício: Seja $\langle A, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1\rangle$ uma álgebra booleana finita com conjunto de átomos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Sabendo que cada elemento não nulo x de A pode ser escrito como o supremo de um conjunto de átomos

$$x = a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \cdots \vee a_{i_k}$$

mostre que, mais especificamente,

$$x = \bigvee\{a \in A : a \text{ é átomo e } a \leq x\}$$

isto é, x é o supremo de todos os átomos menores ou igual a ele.

Dica: Comece expressando 1 como um supremo de átomos e use o fato de que $x = x \wedge 1$.

Isomorfismo de álgebras booleanas

Uma função bijetora ϕ entre duas álgebras booleanas $\langle A_1, +_1, \cdot_1, \bar{\ }_1, 0_1, 1_1\rangle$ e $\langle A_2, +_2, \cdot_2, \bar{\ }_2, 0_2, 1_2\rangle$ que satisfaz

$$\phi(x +_1 y) = \phi(x) +_2 \phi(y)$$

$$\phi(x \cdot_1 y) = \phi(x) \cdot_2 \phi(y)$$

e

$$\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$$

é um **isomorfismo** de álgebra booleana.

Duas álgebras booleanas são isomorfas se existe um isomorfismo entre elas.

Teorema: Sejam duas álgebras booleanas com o mesmo número de átomos e sejam $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ respectivamente os seus conjuntos de átomos. Então, existe um isomorfismo ϕ entre eles tal que $\phi(a_i) = b_i$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema: Qualquer álgebra booleana finita cujo conjunto possui n elementos é isomorfa à álgebra booleana $\langle \mathcal{P}(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$ onde S é um conjunto com cardinalidade n.

Revisão dos principais conceitos através de um exemplo: Considere a álgebra booleana $\langle \mathcal{P}(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$.

- A seguinte relação binária é definida em $\mathcal{P}(S)$:

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(S), \quad X \subseteq Y \Longleftrightarrow X \cup Y = Y$$

- a relação $\subseteq$ é uma ordem parcial. Logo, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ é um poset
- o maior elemento de $\mathcal{P}(S)$ é S
- o menor elemento de $\mathcal{P}(S)$ é $\emptyset$
- o supremo de dois conjuntos $X, Y \in \mathcal{P}(S)$ é dado por $X \cup Y$

- o ínfimo de dois conjuntos $X, Y \in \mathcal{P}(S)$ é dado por $X \cap Y$
- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ é um reticulado booleano (distributivo e complementado)
- os átomos de $\langle \mathcal{P}(S), \cup, \cap, ^c, \emptyset, S \rangle$ são os conjuntos unitários.
- qualquer elemento de $\mathcal{P}(S)$ pode ser expresso como união de conjuntos unitários

---

3.5 Funções Booleanas

Variáveis e literais

Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$, uma **variável booleana** é uma variável para a qual pode-se associar elementos de A, ou seja, a variável booleana toma valores em A.

Dada uma variável booleana x, o **complemento** de x, denotado $\overline{x}$, é uma variável booleana tal que $\overline{x} = \overline{a}$ sempre que $x = a$ para qualquer $a \in A$.

Um **literal** é uma variável booleana x ou o seu complemento $\overline{x}$.

Expressão booleana

Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$, as seguintes são expressões booleanas em n váriáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

- os elementos identidade 0 e 1,
- as variáveis booleanas $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
- $x + y$, $x \cdot y$, $\overline{x}$, onde x e y são expressões booleanas nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Observe que uma expressão booleana em n váriáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ não necessariamente contém todas as n variáveis.

Se uma expressão pode ser derivada a partir de outra aplicando-se as regras (leis) da álgebra booleana um número finito de vezes, então elas são ditas **equivalentes**. O valor de expressões equivalentes, para cada atribuição de valores às variáveis booleanas, é o mesmo.

Expressões booleanas definem uma função. Expressões equivalentes definem uma mesma função.

Função booleana

Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$, uma função booleana em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma função $f : A^n \to A$ tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma expressão booleana. O valor da função f para um elemento $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ é calculado substituindo-se cada ocorrência de x_i na expressão por a_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e calculando-se o valor da expressão.

No caso da álgebra booleana $\langle B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \rangle$, vimos que há exatamente $(2)^{2^n}$ funções booleanas em n variáveis.

Em geral, há $(|A|)^{|A|^n}$ funções booleanas em n variáveis.

Exemplo: A função $f : B^2 \to B$, definida pela expressão $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ pode ser representada pela tabela-verdade a seguir, à esquerda. Note que ela é igual a tabela-verdade da expressão $x_1 + \overline{x}_1 x_2$. Logo, as expressões $x_1 + x_2$ e $x_1 + \overline{x}_1 x_2$ são equivalentes (ou seja, definem uma mesma função).

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1 x_2$	$x_1 + \overline{x}_1 x_2$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

Há $(2)^{2^2} = 16$ funções de 2 variáveis para $\langle B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$, conforme mostrados a seguir:

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Formas de expressão

Um **produto** é uma expressão lógica que é ou uma literal, ou uma conjunção de duas ou mais literais, duas das quais nunca envolvem a mesma variável.

Um produto q é **subproduto** de um produto p se cada literal que aparece em q também aparece em p. Por exemplo, xy é um subproduto de xyz. Já $x\overline{y}$ não é subproduto de xyz.

Soma de produtos ou Forma normal disjuntiva (FND)

> Um expressão E é uma **soma de produtos** (SOP) se ela é um produto ou se é uma disjunção de dois ou mais produtos tais que nenhum deles é subproduto de outro.
>
> As expressões xy, $x + yz$, $xyw + \overline{x}z + yz$ estão na FND, enquanto que $x(y + z)$, $xy + yzx$ não estão.

Teorema: Qualquer expressão que não é uma contradição é equivalente a uma expressão na forma SOP.

Exemplos: Expressar $f(x, y, z, w) = (xz + y)(zw + \overline{w})$ na forma SOP:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= (xz + y)(zw + \overline{w}) \\ &= (xz + y)zw + (xz + y)\overline{w} \quad (distributiva) \\ &= xzw + yzw + xz\overline{w} + y\overline{w} \quad (distributiva) \end{aligned}$$

Expressar $f(x, y, z) = [(x + \overline{y}) + z](x + \overline{\overline{y}})\overline{x}$ na forma SOP:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= [(x + \overline{y}) + z](x + \overline{\overline{y}})\overline{x} \\ &= [(x + \overline{y}) + z](x + y)\overline{x} \\ &= [(x + \overline{y}) + z](x\overline{x} + y\overline{x}) \\ &= [(x + \overline{y}) + z]y\overline{x} \\ &= xy\overline{x} + \overline{y}y\overline{x} + zy\overline{x} \\ &= 0 + 0 + zy\overline{x} \\ &= \overline{x}yz \end{aligned}$$

Observação: Os nomes **termo produto**, **produto fundamental**, **conjunção fundamental** e **produto normal** também são utilizados em lugar de **produto**.

Os nomes **Soma de produtos normais** e **forma normal disjuntiva** são também usados em vez de **soma de produtos**.

Uma **soma fundamental**, ou simplesmente **soma**, define-se de forma análoga (é um literal ou a disjunção de dois ou mais literais, duas das quais nunca envolvem a mesma variável). Qualquer expressão é equivalente a uma expressão na forma produto de somas (POS).

Mintermo (ou produto completo ou produto canônico ou produto padrão) em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma expressão booleana formada pelo produto de cada uma das n variáveis ou dos respectivos complementos (mas não ambas). Ou seja, consiste do produto de n literais, cada um correspondendo a uma variável (se x_i está presente no produto, então $\overline{x}_i$ não está, e vice-versa).

Maxtermo (ou soma completa ou soma canônica) em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem definição similar ao mintermo: em vez de produto, consiste de soma de n literais, cada um correspondendo a uma variável.

Exemplo: Supondo 3 variáveis x_1, x_2, x_3, $x_1\overline{x}_2x_3$ e $x_1x_2x_3$ são exemplos de mintermos, enquanto $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$ e $\overline{x}_1 + x_2 + x_3$ são exemplos de maxtermos.

Teorema: Há 2^n mintermos e 2^n maxtermos. Não há dois mintermos equivalentes, e similarmente, não há 2 maxtermos equivalentes.

PROVA: Como um mintermo consiste de n literais, cada um podendo ser uma variável x ou o seu complemento $\overline{x}$, há no total 2^n possíveis combinações.

Denote x por x^1 e $\overline{x}$ por x^0. Assim, qualquer mintermo m pode ser expresso por $m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{e_1}\, x_2^{e_2}\, \ldots\, x_n^{e_n}$ onde $e_i \in \{0, 1\}$. Para

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se } e_i = 1, \\ 0, & \text{se } e_i = 0. \end{cases}$$

temos $m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, pois todos os literais $x_i^{e_i}$ em m tem valor 1.

Qualquer outro mintermo tem pelo menos um literal que é complemento do correspondente literal em m. Portanto, substituindo os valores de x_i definidos acima neste mintermo, haverá pelo menos um zero no produto. Isto quer dizer que este mintermo vale zero para estes valores em particular. Portanto, para quaisquer dois mintermos, há sempre uma atribuição de valores às variáveis que torna um deles 1 e o outro 0. $\square$

Exercício: Liste todos os mintermos em 3 variáveis.

Teorema: Qualquer função booleana que não seja identicamente nulo pode ser expressa na forma de soma canônica de produtos (soma de mintermos).

Teorema: Qualquer função booleana que não seja identicamente 1 pode ser expressa na forma de produto canônico de somas (produto de maxtermos).

Observações: Os nomes **Soma padrão de produtos**, **forma normal disjuntiva completa** ou **forma mintermo** também são usados em vez de **soma canônica de produtos** (SOP canônica).

Note que alguns autores usam o nome **forma normal disjuntiva** em vez de **forma normal disjuntiva completa**.

Nós usaremos **soma de produtos** e **soma canônica de produtos**; **produto de somas** e **produto canônico de somas**.

Exemplos: Escrever $f(x,y,z,w) = (xz+y)(zw+\overline{w})$ na forma SOP canônica:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= (xz+y)zw + (xz+y)\overline{w} \\
&= xzw + yzw + xz\overline{w} + y\overline{w} \\
&= xzw(y+\overline{y}) + (x+\overline{x})yzw + x(y+\overline{y})z\overline{w} + (x+\overline{x})y(z+\overline{z})\overline{w} \\
&= xyzw + x\overline{y}zw + xyzw + \overline{x}yzw + xyz\overline{w} + x\overline{y}z\overline{w} + xy(z+\overline{z})\overline{w} + \overline{x}y(z+\overline{z})\overline{w} \\
&= xyzw + x\overline{y}zw + \overline{x}yzw + xyz\overline{w} + x\overline{y}z\overline{w} + xyz\overline{w} + xy\overline{z}\overline{w} + \overline{x}yz\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}\overline{w} \\
&= xyzw + xyz\overline{w} + xy\overline{z}\overline{w} + x\overline{y}zw + x\overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yzw + \overline{x}yz\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}\overline{w}
\end{aligned}$$

Escrever $x+z+\overline{y}\overline{w}$ na forma POS canônica.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= x+z+\overline{y}\overline{w} \\
&= x + (z+\overline{y}\overline{w}) \\
&= x + (z+\overline{y})(z+\overline{w}) \\
&= (x+z+\overline{y})(x+z+\overline{w}) \\
&= (x+\overline{y}+z+w\overline{w})(x+y\overline{y}+z+\overline{w}) \\
&= (x+\overline{y}+z+w)((x+\overline{y}+z+\overline{w})(x+y+z+\overline{w})(x+\overline{y}+z+\overline{w}) \\
&= (x+\overline{y}+z+w)((x+\overline{y}+z+\overline{w})(x+y+z+\overline{w})
\end{aligned}$$

Exercícios: a) Escreva $f(a,b,c,d,e) = (\overline{ac}+\overline{d})(\overline{b+ce})$ na forma SOP.

b) Escreva $f(a,b,c,d) = (a+b)c\overline{d} + (a+b)\overline{c}d$ na forma SOP canônica.

c) Escreva $f(x,y,z,w) = x+z+\overline{y}\overline{w}$ na forma SOP canônica. Qual a relação entre a forma SOP canônica e a forma POS canônica ?

d) Lembrando que $x \leftrightarrow y \Leftrightarrow [(x \to y) \wedge (y \to x)]$, e que $x \to y \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$, escreva $(a \vee b) \leftrightarrow \neg c$ na forma SOP canônica.

e) Ache a expressão na forma SOP canônica que define a função dada pela tabela-verdade abaixo. Você consegue simplificar esta expressão e obter uma outra equivalente e mais curta ?

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

4 Tabela dos principais axiomas e leis

A1	$x + y = y + x$ $xy = yx$
A2	$x(y + z) = xy + xz$ $x + yz = (x + y)(x + z)$
A3	$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$
A4	$x + \overline{x} = 1$ $x\overline{x} = 0$
Idempotência	$x + x = x$ $xx = x$
Identidade	$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$
Complemento do um (zero)	$\overline{1} = 0$ $\overline{0} = 1$
Absorção	$x + xy = x$ $x(x + y) = x$
Involução	$\overline{\overline{x}} = x$
Associatividade	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$
De Morgan	$\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$ $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$
Teorema do consenso	$xy + yz + \overline{x}z = xy + \overline{x}z$ $(x + y)(y + z)(\overline{x} + z) = (x + y)(\overline{x} + z)$

Referências

[Garnier and Taylor, 1992] Garnier, R. and Taylor, J. (1992). *Discrete Mathematics for New Technology*. Adam Hilger.

[Hill and Peterson, 1981] Hill, F. J. and Peterson, G. R. (1981). *Introduction to Switching Theory and Logical Design*. John Wiley, 3rd edition.

[Katz, 1994] Katz, R. H. (1994). *Contemporary Logic Design*. Benjamin Cummings.

[Micheli, 1994] Micheli, G. D. (1994). *Synthesis and Optimization of Digital Circuits*. McGraw-Hill.

[Whitesitt, 1961] Whitesitt, J. E. (1961). *Boolean Algebra and its Applications*. Addison-Wesley.