Expressões e Funções Booleanas

1.1 Expressões Booleanas

Variáveis e literais: Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$, uma **variável booleana** é uma variável que toma valores em A.

Dada uma variável booleana x, o **complemento** de x, denotado $\overline{x}$, é uma variável booleana tal que $\overline{x} = \overline{a}$ sempre que $x = a$ para qualquer $a \in A$.

Um **literal** é uma variável booleana x ou o seu complemento $\overline{x}$.

Expressões booleanas: Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$, expressões booleanas em n váriáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são definidas pelas seguintes regras:

- os elementos em A são expressões booleanas;
- as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são expressões booleanas;
- se x e y são expressões booleanas então também são as expressões $(x) + (y)$, $(x) \cdot (y)$ e $\overline{(x)}$;
- uma expressão é booleana se e somente se pode ser obtida aplicando-se as três regras um número finito de vezes.

Observe que uma expressão booleana em n váriáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ não necessariamente precisa conter todas as n variáveis. Parênteses podem ser removidos da expressão desde que não introduzam ambiguidades. Por exemplo, a expressão $(x_1) + (x_2)$ pode ser escrita $x_1 + x_2$.

Se uma expressão pode ser derivada a partir de outra aplicando-se um número finito de vezes as regras (leis/propriedades) da álgebra booleana, então elas são ditas **equivalentes**. O valor de expressões equivalentes, para cada atribuição de valores às variáveis booleanas, é o mesmo.

Expressões booleanas definem uma função. Expressões equivalentes definem uma mesma função.

1.2 Funções booleanas

Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$, uma expressão booleana em n variáveis x_1, x_2, …, x_n define uma **função booleana** $f : A^n \rightarrow A$. O valor da função f para um elemento $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ é calculado substituindo-se cada ocorrência de x_i na expressão por a_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, e calculando-se o valor da expressão.

Seja $A(n)$ o conjunto de todas as funções booleanas em A com n variáveis e seja $\leq$ uma relação definida em $A(n)$ da seguinte forma:

$$f \leq g \Longleftrightarrow f(\mathbf{a}) \leq g(\mathbf{a}),\ \forall \mathbf{a} \in A^n\,. \tag{1.1}$$

Seja $(f \cdot g)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a})$, $(f + g)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a})$, e $\overline{f}(\mathbf{a}) = \overline{f(\mathbf{a})}$, $\forall \mathbf{a} \in A^n$. Fazendo $\mathbf{0}(\mathbf{a}) = 0$ e $\mathbf{1}(\mathbf{a}) = 1$ para todo $\mathbf{a} \in A^n$, o conjunto $(A(n), +, \cdot, ^-, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ também é uma álgebra booleana.

Note que nem todas as funções $f : A^n \to A$ podem ser definidas por uma expressão booleana; **funções booleanas** são aquelas que podem ser definidas por uma expressão booleana.

Exemplo: A função $f : B^2 \to B$, definida pela expressão $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ pode ser representada pela tabela-verdade a seguir, à esquerda[1]. Note que ela é igual a tabela-verdade da expressão $x_1 + \overline{x}_1 x_2$, à direita. Logo, as expressões $x_1 + x_2$ e $x_1 + \overline{x}_1 x_2$ são equivalentes (ou seja, definem uma mesma função).

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1\, x_2$	$x_1 + \overline{x}_1\, x_2$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

Há $2^{(2^2)} = 16$ funções de 2 variáveis para $\langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$, conforme mostrados a seguir:

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Exercícios:

1. Dada a álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ com $A = \{0, 1, a, \overline{a}\}$, construa a tabela-verdade da função correspondente à expressão $\overline{a}x + a\overline{y}$.

1.3 Formas Canônicas

Vimos que uma mesma função pode ser expressa por diversas expressões. Dependendo do contexto no qual essas expressões são utilizadas, pode-se desejar encontrar, dentre todas as expressões que representam uma função booleana, aquela que satisfaz algum critério. Por exemplo, uma expressão "mais curta", ou então, uma expressão que não envolve um termo produto com mais de um determinado número de literais e assim por diante.

Formas canônicas são interessantes uma vez que, se existirem, garantem que qualquer elemento de interesse (no caso uma função booleana sa) pode ser expresso unicamente nessa forma.

[1] Lembre-se que $B = \{0, 1\}$

Teorema de expansão de Boole: Seja $f : A^n \to A$ uma função booleana. Então, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x}_1 \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)\,. \tag{1.2}$$

Prova: visto em sala de aula. Veja, por exemplo, [Garnier and Taylor, 1992], página 408.

Colorário (dual do teorema anterior): Seja $f : A^n \to A$ uma função booleana. Então, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [\overline{x}_1 + f(1, x_2, \ldots, x_n)] \cdot (x_1 + f(0, x_2, \ldots, x_n)]\,. \tag{1.3}$$

Exemplo: Seja $A = \{0, 1, a, \overline{a}\}$. A função f definida pela tabela a seguir é uma função booleana?

x	$f(x)$
0	a
1	1
a	$\overline{a}$
$\overline{a}$	1

De acordo com o teorema de expansão de Boole, sabemos que se f é uma função booleana podemos escrever $f(x) = \overline{x}f(0) + xf(1) = \overline{x}a + x\,1 = \overline{x}a + x$. Em particular, para $x = a$ teríamos então $f(a) = \overline{a}\,a + a = 0\,a + a = a$. Porém, na definição de f temos $f(a) = \overline{a}$. Logo, f não é uma função booleana. □

1.3.1 Soma de produtos

Produto: Um produto é uma expressão booleana que é ou uma literal, ou uma conjunção de duas ou mais literais, duas das quais nunca envolvem a mesma variável. Em outras palavras, um produto é uma conjunção em que uma variável aparece no máximo uma vez (na forma barrada ou não barrada). Produtos podem ser expressos como $p = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i$, $\sigma_i \in \{x_i, \overline{x}_i, '\ '\}$, com $'\ '$ denotando o caractere vazio. Por exemplo, para $n = 4$, x_1x_3 e $x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$ são exemplos de produtos.

Mintermos: Mintermo (ou **produto canônico**) em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma expressão booleana formada pelo produto de cada uma das n variáveis ou dos respectivos complementos (mas não ambas). Ou seja, consiste do produto de n literais, cada um correspondendo a uma variável (se x_i está presente no produto, então $\overline{x}_i$ não está, e vice-versa).

Exemplo: Supondo 3 variáveis x_1, x_2 e x_3, então $x_1\overline{x}_2x_3$ e $x_1x_2x_3$ são exemplos de mintermos.

Vamos mostrar a seguir que qualquer função booleana pode ser expressa como soma (disjunção) de mintermos. Para começar, considere uma função booleana f de 3 variáveis e vamos aplicar o teorema de expansão de Boole repetidamente:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \overline{x}\,f(0,y,z) + x\,f(1,y,z) \\
&= \overline{x}\,[\overline{y}\,f(0,0,z) + y\,f(0,1,z)] + x\,[\overline{y}\,f(1,0,z) + y\,f(1,1,z)] \\
&= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\,f(0,0,0) + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\,f(0,0,1) + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\,f(0,1,0) + \overline{x}_1x_2x_3\,f(0,1,1) + \\
&\quad\; x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\,f(1,0,0) + x_1\overline{x}_2x_3\,f(1,0,1) + x_1x_2\overline{x}_3\,f(1,1,0) + x_1x_2x_3\,f(1,1,1)
\end{aligned}$$

Para considerar o caso geral introduzimos algumas notações.

Notação: Denote x por x^1 e $\overline{x}$ por x^0. Assim, qualquer mintermo pode ser expresso por $m_{e_1,e_2,\ldots,e_n} = x_1^{e_1}\,x_2^{e_2}\,\ldots\,x_n^{e_n}$ onde $e_i \in \{0,1\}$. Por exemplo, se considerarmos $n = 3$, então $m_{001} = x_1^0\,x_2^0\,x_3^1 = \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3$.

O conjunto de todas as seqüências de n bits corresponde à representação binária dos números entre 0 e $2^n - 1$. Com base neste fato, podemos caracterizar o índice de um mintermo $m_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$ pela representação binária ou pela correspondente notação decimal $\sum 2^i\,e_i$. A tabela 1.1 apresenta todos os mintermos em três variáveis e a notação com índice decimal associada a cada um deles.

$e_1\,e_2\,e_3$	$m_{e_1,e_2,\ldots,e_n}$
0 0 0	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = m_0$
0 0 1	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 = m_1$
0 1 0	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3 = m_2$
0 1 1	$\overline{x}_1x_2x_3 = m_3$
1 0 0	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = m_4$
1 0 1	$x_1\overline{x}_2x_3 = m_5$
1 1 0	$x_1x_2\overline{x}_3 = m_6$
1 1 1	$x_1x_2x_3 = m_7$

Tabela 1.1: Tabela de mintermos com 3 variáveis.

Teorema: Há 2^n mintermos em n variáveis e não há dois mintermos equivalentes.

PROVA: Como um mintermo consiste de n literais, cada um podendo ser uma variável x ou o seu complemento $\overline{x}$, há no total 2^n possíveis formas de se combinar as literais.

Para mostrar que não há dois mintermos equivalentes, seja $m_{e_1,e_2,\ldots,e_n} = x_1^{e_1}\,x_2^{e_2}\,\ldots\,x_n^{e_n}$ um mintermo e considere

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se } e_i = 1, \\ 0, & \text{se } e_i = 0. \end{cases}$$

Então, $m_{e_1,e_2,\ldots,e_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, pois todos os literais em m tem valor 1.

Qualquer outro mintermo m' tem pelo menos um literal x^{e_j} que é complemento do correspondente literal em m. Portanto, substituindo os valores de x_i definidos acima neste mintermo, haverá pelo menos um zero no produto. Isto quer dizer que este mintermo vale zero para estes valores em particular. Portanto, para quaisquer dois mintermos, há sempre uma atribuição de valores às variáveis que torna um deles 1 e o outro 0. $\square$

Soma de produtos: Dizemos que uma expressão está na forma **soma de produtos** (SOP) se ela é um produto ou se é uma disjunção de dois ou mais produtos e se nenhum par de produtos p e p' é tal que $p \leq p'$ (a relação $\leq$ é a definida pela equivalência 1.1).

As expressões xy, $x + yz$ e $xyw + \overline{x}z + yz$ estão na forma SOP, enquanto que $x(y + z)$ e $xy + yzx$ não estão.

Soma canônica de produtos (SOP canônica): Dizemos que uma expressão está na forma **soma canônica de produtos** (SOP canônica) se ela é um mintermo ou se é uma disjunção de dois ou mais mintermos distintos.

Teorema: Uma função $f : A^n \rightarrow A$ é booleana se e somente se ela pode ser expressa na forma soma canônica de produtos, ou seja, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\mathbf{e} \in \{0,1\}^n} f(e_1, e_2, \ldots, e_n)\, x_1^{e_1}\, x_2^{e_2}\, \ldots\, x_n^{e_n} \tag{1.4}$$

Prova: Se f é uma função booleana, então ela pode ser expressa na forma soma canônica de produtos aplicando-se o teorema de expansão de Boole, conforme vimos em um exemplo anterior. Por outro lado, suponha que f pode ser expressa na forma da equação 1.4. Claramente, a expressão é uma expressão booleana e portanto f é uma função booleana. $\square$

Observe que, para uma dada função booleana, a representação na forma soma canônica de produtos é única, a menos da ordem dos mintermos. Essa unicidade pode ser mostrada de forma similar a demonstração de que não há mintermos equivalentes, vista anteriormente. Por outro lado, podem existir duas funções distintas cujas respectivas formas soma canônica de produtos é idêntica? A resposta é não, pois uma expressão define uma única função.

Exemplos:

a) Expressar a função $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ na forma SOP canônica.

De acordo com o teorema acima, f pode ser escrito como

$$f(x_1, x_2) = f(0,0)\overline{x}_1\, \overline{x}_2 + f(0,1)\overline{x}_1\, x_2 + f(1,0)x_1\, \overline{x}_2 + f(1,1)x_1\, x_2$$

Se calculamos o valor de f para todos os elementos $\mathbf{e} \in \{0,1\}^2$ temos $f(0,0) = 0$ e $f(0,1) = f(1,0) = f(1,1) = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0 \cdot \overline{x}_1\, \overline{x}_2 + 1 \cdot \overline{x}_1\, x_2 + 1 \cdot x_1\, \overline{x}_2 + 1 \cdot x_1\, x_2 \\ &= \overline{x}_1\, x_2 + x_1\, \overline{x}_2 + x_1\, x_2 \end{aligned}$$

b) Expressar $f(x, y, z, w) = (xz + y)(zw + \overline{w})$ na forma SOP. Neste caso, basta aplicarmos a distributiva para eliminar os parênteses.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= (xz + y)(zw + \overline{w}) \\ &= (xz + y)zw + (xz + y)\overline{w} \quad (\mathit{distributiva}) \\ &= xzw + yzw + xz\overline{w} + y\overline{w} \quad (\mathit{distributiva}) \end{aligned}$$

c) Expressar $f(x, y, z) = [(x + \overline{y}) + z](x + \overline{\overline{y}})\overline{x}$ na forma SOP. Idem anterior.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= [(x + \overline{y}) + z](x + \overline{\overline{y}})\overline{x} \\ &= [(x + \overline{y}) + z](x + y)\overline{x} \\ &= [(x + \overline{y}) + z](x\overline{x} + y\overline{x}) \\ &= [(x + \overline{y}) + z]y\overline{x} \\ &= xy\overline{x} + \overline{y}y\overline{x} + zy\overline{x} \\ &= 0 + 0 + zy\overline{x} \\ &= \overline{x}yz \end{aligned}$$

d) Escrever $f(x,y,z,w) = (xz+y)(zw+\overline{w})$ na forma SOP canônica. Aqui poderíamos utilizar uma abordagem similar ao do exemplo (a). É possível, no entanto, utilizarmos manipulações algébricas (eliminar os parênteses e em seguida "introduzir", em cada produto, as variáveis que não aparecem).

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= (xz+y)zw + (xz+y)\overline{w} \\
&= xzw + yzw + xz\overline{w} + y\overline{w} \\
&= xzw(y+\overline{y}) + (x+\overline{x})yzw + x(y+\overline{y})z\overline{w} + (x+\overline{x})y(z+\overline{z})\overline{w} \\
&= xyzw + x\overline{y}zw + xyzw + \overline{x}yzw + xyz\overline{w} + x\overline{y}z\overline{w} + xy(z+\overline{z})\overline{w} + \overline{x}y(z+\overline{z})\overline{w} \\
&= xyzw + x\overline{y}zw + \overline{x}yzw + xyz\overline{w} + x\overline{y}z\overline{w} + xyz\overline{w} + xy\overline{zw} + \overline{x}yz\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}\,\overline{w} \\
&= xyzw + xyz\overline{w} + xy\overline{z}\,\overline{w} + x\overline{y}zw + x\overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yzw + \overline{x}yz\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}\,\overline{w}
\end{aligned}$$

Observações: Em vez de **produto**, alguns autores utilizam também os nomes **termo produto**, **produto fundamental**, **conjunção fundamental** ou **produto normal**.

Em vez de **soma de produtos**, utilizam-se também os nomes **soma de produtos normais** e **forma normal disjuntiva**.

Em vez de **soma canônica de produtos** (SOP canônica), utilizam-se também os nomes **soma padrão de produtos**, **forma normal disjuntiva completa** ou **forma mintermo**. Note, porém, que alguns autores usam o nome **forma normal disjuntiva** em vez de **forma normal disjuntiva completa**.

Nós usaremos **soma de produtos** e **soma canônica de produtos** (ou **soma de mintermos**).

1.3.2 Produto de somas

Todos os conceitos definidos com respeito a expressões do tipo produto podem também ser definidos com respeito a expressões do tipo soma.

Uma **soma** define-se de forma análoga ao produto: soma é ou um literal ou a disjunção de dois ou mais literais, duas das quais nunca envolvem a mesma variável. Dizemos que uma expressão booleana está na forma **produto de somas** (POS) se ela é uma soma ou é uma conjunção de duas ou mais somas.

Maxtermo (ou **soma canônica**) em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem definição similar ao mintermo: em vez de produto, consiste de soma de n literais, cada um correspondendo a uma variável. As expressões $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$ e $\overline{x}_1 + x_2 + x_3$ são exemplos de maxtermos. A tabela 1.2 lista todos os matexrmos de 3 variáveis.

$e_1e_2e_3$	maxtermos
0 0 0	$x_1 + x_2 + x_3 = M_0$
0 0 1	$x_1 + x_2 + \overline{x}_3 = M_1$
0 1 0	$x_1 + \overline{x}_2 + x_3 = M_2$
0 1 1	$x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 = M_3$
1 0 0	$\overline{x}_1 + x_2 + x_3 = M_4$
1 0 1	$\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 = M_5$
1 1 0	$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3 = M_6$
1 1 1	$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 = M_7$

Tabela 1.2: Tabela de maxtermos com 3 variáveis.

Teorema: Há 2^n maxtermos e não há dois maxtermos equivalentes.

Produto canônico de somas (POS canônica): Dizemos que uma expressão booleana está na forma **produto canônico de somas** (POS canônica) se ela é um maxtermo ou é uma conjunção de dois ou mais maxtermos distintos.

Teorema: Qualquer função booleana que não seja identicamente 1 pode ser expressa unicamente na forma **produto canônico de somas** (produto de maxtermos ou POS canônica).

A demonstração desse teorema é dual ao do teorema sobre a expressão de funções booleanas como soma canônica de produtos. Em particular, deve-se considerar o teorema de expansão de Boole dual, visto anteriormente.

Exemplo: Escrever $x + z + \overline{y}\,\overline{w}$ na forma POS canônica.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= x + z + \overline{y}\,\overline{w} \\
&= x + (z + \overline{y}\,\overline{w}) \\
&= x + (z + \overline{y})(z + \overline{w}) \\
&= (x + z + \overline{y})(x + z + \overline{w}) \\
&= (x + \overline{y} + z + w\overline{w})(x + y\overline{y} + z + \overline{w}) \\
&= (x + \overline{y} + z + w)(x + \overline{y} + z + \overline{w})(x + y + z + \overline{w})(x + \overline{y} + z + \overline{w}) \\
&= (x + \overline{y} + z + w)(x + \overline{y} + z + \overline{w})(x + y + z + \overline{w})
\end{aligned}$$

1.3.3 Soma de mintermos vista como supremo de átomos

Quando estudamos reticulados booleanos, vimos que qualquer elemento de um reticulado booleano pode ser expresso de forma única como supremo de átomos.

O conjunto das funções booleanas $A(n)$ de n variáveis, conforme discutido na página 2, é uma álgebra booleana. Seja $\preceq$ uma relação em $A(n)$ definida para quaisquer $f, g \in A(n)$ da seguinte forma:

$$f \preceq g \Longleftrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ para todo } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$$

Então, pode-se verificar que $(A(n), \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

A função constante zero $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{0} \in A(n)$ é o menor elemento de $(A(n), \preceq)$ enquanto a função constante um $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{1} \in A(n)$ é o maior elemento de $(A(n), \preceq)$.

O supremo de duas funções $f, g \in A(n)$ é dado por

$$(f + g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

o ínfimo por

$$(f \cdot g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

e o complemento por

$$\overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Se consideramos a álgebra booleana $B = \{0, 1\}$, os átomos de $(B(n), \preceq)$ são justamente os mintermos. Portanto, toda função booleana $f : B^n \to B$ pode ser escrita como uma disjunção (soma) de mintermos distintos. Mais ainda, tal representação é única a menos da ordem dos mintermos. Portanto, esta é outra forma de se provar o teorema da soma canônica de produtos.

1.4 Representação de funções booleanas

A mais elementar das álgebras booleanas é aquela correspondente ao conjunto $B = \{0, 1\}$. Deste ponto em diante, consideraremos essa álgebra booleana, salvo menção em contrário. Os objetos que nos interessam mais são as funções boolenas $f : B^n \to B$.

No caso da álgebra booleana $\langle B(n), +, \cdot, ^-, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$, há exatamente $(2)^{2^n}$ elementos em $B(n)$, ou seja, todas as funções de B^n em B podem ser definidas por expressões booleanas.

Algumas formas para descrever/representar funções booleanas são:

- expressões booleanas
- tabelas-verdade
- diagramas de decisão binária
- circuitos

1.4.1 Expressões booleanas

Além das formas soma de produtos e produto de somas (canônica ou não), expressões booleanas podem ter uma forma seqüencial ou mixta. Entre elas, merece destaque a expansão de Boole, que frequentemente é creditada a Shannon.

Existem também outras formas canônicas, mas não serão consideradas neste texto.

1.4.2 Tabelas-verdade

Esta é a forma mais trivial e direta possível para se representar uma função booleana. Uma função de n variáveis pode ser representada por um vetor de 2^n posições, tal que a posição i do vetor armazena o valor da função para a entrada correspondente ao valor decimal i. No entanto, para um valor grande de n, esta representação torna-se impraticável.

Uma função booleana $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ pode ser completamente caracterizada em termos de seu conjunto-um, $f\langle 1\rangle = \{\mathbf{b} \in \{0, 1\}^n : f(\mathbf{b}) = 1\}$, bem como em termos do seu conjunto-zero, $f\langle 0\rangle = \{\mathbf{b} \in \{0, 1\}^n : f(\mathbf{b}) = 0\}$. Portanto, alternativamente à tabela-verdade, pode-se representar uma função através do seu conjunto-um ou do conjunto-zero. Nestes casos, encontrar uma representação eficiente desses conjuntos é a questão principal.

Observe que $x_1\overline{x}_2x_3 = 1$ se e somente se $x_1 = 1, x_2 = 0$ e $x_3 = 1$. Portanto, a SOP canônica de uma expressão booleana pode ser diretamente obtida através da soma dos mintermos correspondentes aos 1's da sua tabela-verdade. Analogamente, $(x_1 + \overline{x}_2 + x_3) = 0$ se e somente se $x_1 = 0, x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, e portanto, a POS canônica pode ser obtida pelo produto dos maxtermos correspondentes aos 0's da tabela-verdade.

Exemplo: Dada a tabela-verdade

$x_1x_2x_3$	f_1
000	1
001	1
010	0
011	0
100	1
101	1
110	1
111	0

a forma SOP canônica da função é

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2x_3$$

e sua notação simplificada é dada por :

$$f(x_1, x_2, x_3) = m_0 + m_1 + m_4 + m_5 + m_6.$$

De forma mais compacta, é usual escrevermos

$$\sum m(0, 1, 4, 5, 6)$$

A forma POS canônica é $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) = \prod M(2, 3, 7)$.

1.4.3 Diagramas de decisão binária

Diagramas de decisão binária (ou BDD, do inglês *Binary Decision Diagram*) são grafos orientados utilizados para representar funções booleanas. Para detalhes, consulte [Akers, 1978, Bryant, 1986, Brace et al., 1990]. Eles estão diretamente relacionados com a expansão de Boole descrita acima.

Exemplo dado em sala de aula.

1.4.4 Circuitos (hardware)

Utilizando-se componentes lógicos (portas, inversores, etc) pode-se criar um circuito que realiza uma determinada função booleana. Conforme já vimos, dado um circuito lógico, pode-se determinar a correspondente expressão booleana. Analogamente, dada uma expressão booleana, pode-se construir o circuito correspondente. Além disso, da mesma forma que existem várias expressões booleanas que definem uma mesma função, existem vários circuitos que realizam uma mesma função.

No contexto de circuitos, uma das questões mais importantes é saber determinar o melhor circuito (em termos de custo, eficiência, etc) que realiza uma dada função. Existem alguns critérios de simplificação de funções booleanas que visam responder essa questão. A simplificação mais estudada é conhecida como **minimização lógica dois-níveis** e consiste em encontrar uma menor expressão minimal na forma SOP (o número de produtos corresponde ao número de portas E, o número de literais em um produto corresponde ao número de entradas da respectiva porta E). O termo dois-níveis está associado ao número máximo de portas que um sinal de entrada deve percorrer até a saída. Claramente, de uma forma grosseira, quanto menor o número de níveis de um circuito, mais eficiente ele será.

Por outro lado, uma realização dois níveis pode utilizar muitas portas lógicas (e pode haver limitações físicas quanto ao número de entradas de uma porta lógica, por exemplo). Assim, estudam-se também realizações multi-níveis de funções booleanas. Neste caso, há grande interesse em se reduzir o número de portas lógicas necessárias. Este problema é, em geral, conhecido por **decomposição funcional**.

Esses tópicos, relacionados a circuitos, serão vistos em detalhes mais adiante.

Exercícios:

1. Liste todos os mintermos em 3 variáveis.
2. Escreva $f(a,b,c,d,e) = (\overline{ac} + \overline{d})(\overline{b + ce})$ na forma SOP.
3. Escreva $f(a,b,c,d) = (a+b)c\overline{d} + (a+b)\overline{c}d$ na forma SOP canônica.
4. Escreva $f(x,y,z,w) = x + z + \overline{yw}$ na forma SOP canônica. Existe relação entre a forma SOP canônica e a forma POS canônica? Qual?
5. Lembrando que $x \leftrightarrow y \Leftrightarrow [(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)]$, e que $x \rightarrow y \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$, escreva $(a \vee b) \leftrightarrow \neg c$ na forma SOP canônica.
6. Ache a expressão na forma SOP canônica que define a função dada pela tabela-verdade abaixo. Você consegue simplificar esta expressão e obter uma outra equivalente e mais curta ?

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

7. Prove que qualquer função booleana que não seja identicamente 0 (nulo) pode ser expressa na forma SOP canônica.
8. Prove que a forma SOP canônica de qualquer função booleana que não seja identicamente 0 (nulo) é única, a menos da ordem dos produtos canônicos.

Referências Bibliográficas

[Akers, 1978] Akers, S. B. (1978). Binary Decision Diagrams. *IEEE Transactions on Computers*, C-27(6):509–516.

[Brace et al., 1990] Brace, K. S., Rudell, R. L., and Bryant, R. E. (1990). Efficient Implementation of a BDD Package. In *Proceedings of 27th ACM/IEEE Design Automation conference*, pages 40–45.

[Bryant, 1986] Bryant, R. E. (1986). Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation. *IEEE Transactions on Computers*, C-35(8):677–691.

[Garnier and Taylor, 1992] Garnier, R. and Taylor, J. (1992). *Discrete Mathematics for New Technology*. Adam Hilger.

Última revisão em 25 de março de 2007.