MAC 0329 – Álgebra Booleana e Aplicações

Primeiro semestre de 2007

Lista de exercícios 2 — Gabarito parcial

2. Mostre que em qualquer álgebra booleana,

d) (2 pontos) $xy \leq x \leq x + y$, para todo x e y em A,

e) (1 ponto) $0 \leq x \leq 1$, para todo x em A.

R.: Sabemos que $a \leq b \Longleftrightarrow a + b = b$, $\forall a, b \in A$.

d) Como $xy+x = x\,(y+1) = x\,1 = x$, segue que $xy \leq x$. Similarmente, $x+(x+y) = (x+x)+y = x + y$ e, portanto, $x \leq x + y$.

e) De forma similar, como $0 + x = x$, então $0 \leq x$, e como $x + 1 = 1$ então $x \leq 1$.

5 (2 pontos) Dado $A = \{0, 1, \overline{a}, a\}$, seja f uma função booleana em duas variáveis tal que

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(0,1) &= 1 \\ f(1,0) &= \overline{a} \\ f(1,1) &= a \end{aligned}$$

Determine $f(a, 1)$.

R.: Pela expansão de Boole sabemos que $f(x, y) = f(0, 0)\,\overline{x}\,\overline{y} + f(0, 1)\,\overline{x}\,y + f(1, 0)\,x\,\overline{y} + f(1, 1)\,x\,y = \overline{x}\,y + \overline{a}\,x\,\overline{y} + a\,x\,y$. Logo, $f(a, 1) = \overline{a}\,1 + \overline{a}\,a\,\overline{1} + a\,a\,1 = \overline{a} + 0 + a = 1$ $\square$.

6 (3 pontos) Se $f : A^n \to A$ é uma função booleana e a é um elemento de A, mostre que a função em $n - 1$ variáveis $g : A^{n-1} \to A$ definida por

$$g(x_2, \ldots, x_n) = f(a, x_2, \ldots, x_n)$$

é também uma função booleana.

R.: Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Sabemos, pela expansão de Boole, que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{b} \in \{0,1\}^n} f(\mathbf{b})\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \\ &= \sum_{(b_1,\ldots,b_n) \in \{0,1\}^n} f(b_1, \ldots, b_n) x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} \end{aligned}$$

Então, temos que

$$
\begin{aligned}
g(x_2,\ldots,x_n) &= f(a,x_2,\ldots,x_n) \\
&= \sum_{(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\{0,1\}^n} f(b_1,b_2,\ldots,b_n)a^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n} \\
&= \sum_{(b_2,\ldots,b_n)\in\{0,1\}^{n-1}} ([f(0,b_2,\ldots,b_n)\overline{a}]\,x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n} + [f(1,b_2,\ldots,b_n)a]\,x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}) \\
&= \sum_{(b_2,\ldots,b_n)\in\{0,1\}^{n-1}} [f(0,b_2,\ldots,b_n)\overline{a} + f(1,b_2,\ldots,b_n)a]\,x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n} \\
&= \sum_{(b_2,\ldots,b_n)\in\{0,1\}^{n-1}} [g(b_2,\ldots,b_n)]\,x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}
\end{aligned}
$$

Ou seja, que a função g também pode ser expressa na forma soma canônica de produtos. Logo, g é também uma função booleana.

7 (1 ponto) Escreva $f(a,b,c,d) = (a+b)c\overline{d} + (a+b)\overline{c}d$ nas formas SOP e POS canônicas.

R.: A forma SOP canônica

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c,d) &= (a+b)c\overline{d} + (a+b)\overline{c}d \\
&= a\,c\,\overline{d} + b\,c\,\overline{d} + a\,\overline{c}\,d + b\,\overline{c}\,d \\
&= a\,(b+\overline{b})c\,\overline{d} + (a+\overline{a})b\,c\,\overline{d} + a\,(b+\overline{b})\overline{c}\,d + (a+\overline{a})b\,\overline{c}\,d \\
&= a\,b\,c\,\overline{d} + a\,\overline{b}\,c\,\overline{d} + a\,b\,c\,\overline{d} + \overline{a}\,b\,c\,\overline{d} + a\,b\,\overline{c}\,d + a\,\overline{b}\,\overline{c}\,d + a\,b\,\overline{c}\,d + \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d \\
&= \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d + \overline{a}\,b\,c\,\overline{d} + a\,\overline{b}\,\overline{c}\,d + a\,\overline{b}\,c\,\overline{d} + a\,b\,\overline{c}\,d + a\,b\,c\,\overline{d}
\end{aligned}
$$

A form POS canônica está calculada a seguir:

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c,d) &= (a+b)c\overline{d} + (a+b)\overline{c}d \\
&= (a+b)(c\overline{d} + \overline{c}d) \\
&= (a+b)(c\overline{d} + \overline{c})(c\overline{d} + d) \\
&= (a+b)(\overline{c}+c)(\overline{c}+\overline{d})(d+c)(d+\overline{d}) \\
&= (a+b)(\overline{c}+\overline{d})(c+d) \\
&= (a+b+c\,\overline{c})(a\,\overline{a}+\overline{c}+\overline{d})(a\,\overline{a}+c+d) \\
&= (a+b+\overline{c})(a+b+c)(a+\overline{c}+\overline{d})(\overline{a}+\overline{c}+\overline{d})(a+c+d)(\overline{a}+c+d) \\
&= \text{idem com a variável que falta em cada soma...} \\
&= (a+b+\overline{c}+d)(a+b+\overline{c}+\overline{d})(a+b+c+\overline{d})(a+b+c+d)(a+b+\overline{c}+\overline{d}) \\
&\quad (a+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d})(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d})(\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{d})(a+\overline{b}+c+d)(a+b+c+d) \\
&\quad (\overline{a}+\overline{b}+c+d)(\overline{a}+b+c+d) \\
&= (\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d})(\overline{a}+\overline{b}+c+d)(\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{d})(\overline{a}+b+c+d)(a+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}) \\
&\quad (a+\overline{b}+c+d)(a+b+\overline{c}+\overline{d})(a+b+\overline{c}+d)(a+b+c+\overline{d})(a+b+c+d) \\
&\quad \text{(Ufa!! acabou!)}
\end{aligned}
$$