Teoria Elementar dos Conjuntos

Última revisão em 27 de fevereiro de 2009

Este texto é uma breve revisão sobre teoria elementar dos conjuntos. Em particular, importam-nos os aspectos algébricos no estudo de conjuntos, pois a álgebra de conjuntos é um exemplo de álgebra booleana. Como referência bibliográfica, recomendamos o livro :

- Filho, E. A. (1980). *Teoria Elementar dos Conjuntos.* Livraria Nobel S.A., São Paulo.

Conjuntos e elementos

Conjuntos são coleções de objetos, denominados elementos[1]

Exemplos de conjuntos

O conjunto de todos os números inteiros, o conjunto de todos os alunos de MAC0329 do semestre corrente, o conjunto de todos os seres humanos vivos atualmente, o conjunto de todos os números reais maiores que zero e menores que 1, o conjunto de todos os jogadores da atual seleção brasileira de futebol, o conjunto de todas as letras do alfabeto romano, etc.

Notação

Conjuntos serão representados por letras maiúsculas: A, B, C, S, etc. Elementos de um conjunto serão representados por letras minúsculas: a, b, x, y, etc.

Em geral, podemos especificar um conjunto descrevendo os seus elementos via uma condição, ou então enumerando os seus elementos. Por exemplo, o conjunto A de todos os números inteiros pares pode ser expresso por:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ é par}\}$$

e o conjunto B das cores da bandeira brasileira pode ser expresso por:

$$B = \{verde, amarelo, azul, branco\}$$

[1]Não é objetivo fazermos uma definição formal de conjunto. Basta utilizaremos a noção intuitiva que temos sobre conjuntos.

Conjuntos universo e vazio

Dois conjuntos especiais são o **conjunto universo**, isto é, o conjunto de todos os objetos em questão, e o **conjunto vazio**, isto é, o conjunto que não contém nenhum elemento. Os conjuntos universo e vazio são denotados, respectivamente, por U e $\emptyset$.

Conjunto unitário

Em álgebra de conjuntos, os objetos de interesse são os conjuntos e não os elementos que pertencem a eles. Assim, as operações devem ser definidas sobre ou entre conjuntos, mas nunca sobre elementos isolados. Para tratar elementos, devemos considerar conjuntos unitários. Por exemplo, se a é um elemento de U então $\{a\}$ denota o **conjunto unitário** que contém apenas um único elemento, o elemento a.

Relação elemento $\times$ conjunto

Se um elemento x **pertence** a um conjunto A, escrevemos $x \in A$. Diremos, alternativamente, que x é **membro** de A. Se x não pertence ao conjunto A, escrevemos $x \notin A$.

Relação conjunto $\times$ conjunto

Um conjunto A é **igual** a um conjunto B, denotado $A = B$, se eles contêm exatamente os mesmos elementos. Se não forem iguais, eles são **diferentes**, e denotado por $A \neq B$.

Um conjunto A está **contido** num conjunto B se todos os elementos de A pertencem também ao conjunto B. Escrevemos $A \subseteq B$ e dizemos também que A é um **subconjunto** de B. Se, além disso, B possui pelo menos um elemento que não pertence a A, então dizemos que A está **propriamente contido** em B, ou que A é um subconjunto próprio de B, e denotamos $A \subset B$.

Propriedades da relação $\subseteq$

A relação de inclusão de conjuntos $\subseteq$ obedece às seguintes propriedades. Para quaisquer X, Y e Z,

I1. (reflexiva) $X \subseteq X$

I2. (transitiva) $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z \Longrightarrow X \subseteq Z$

I3. (anti-simétrica) $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X \Longrightarrow X = Y$

I4. (a) $\emptyset \subseteq X$
   (b) $X \subseteq U$

Conjunto potência (power set) ou conjunto das partes de um conjunto

Dado um conjunto A, o **conjunto potência de** A é denotado por $\mathcal{P}(A)$ e definido por $\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq U : X \subseteq A\}$, ou seja, $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

Exercício: Seja $A = \{a, b, c\}$. Liste todos os elementos de $\mathcal{P}(A)$.

Exercício: Mostre que se A contém n elementos então $\mathcal{P}(A)$ contém 2^n elementos.

Complemento, união e interseção

O **complemento** de um conjunto X, denotado X^c, consiste de todos os elementos em U que não estão em X, ou seja, $X^c = \{x \in U \,|\, x \notin X\}$.

Conjuntos podem ser combinados para gerar outros conjuntos. Para isso, podemos considerar duas regras (operações) que definem formas pelas quais conjuntos podem ser combinados: a **união** e a **interseção**.

Dados dois conjuntos X e Y quaisquer, a **união** de X e Y é denotada $X \cup Y$ e definida como sendo o conjunto de elementos que pertencem ou a X, ou a Y ou a ambos, ou seja, $X \cup Y = \{x \in U \,|\, x \in X \text{ ou } x \in Y\}$. A **interseção** de X e Y é denotada $X \cap Y$ e definida como sendo o conjunto de elementos que pertencem tanto a X como a Y, ou seja, $X \cap Y = \{x \in U \,|\, x \in X \text{ e } x \in Y\}$.

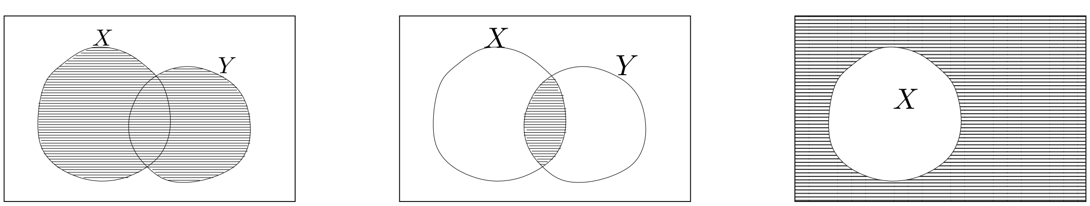
Se $X \cap Y = \emptyset$ (conjunto vazio) então dizemos que X e Y são **disjuntos**.

Exemplos: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $\quad$ $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$
$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ $\quad$ $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

Diagramas de Venn

Os diagramas de Venn são úteis para reforçar a noção intuitiva sobre conjuntos, principalmente para analisar relações entre os conjuntos e também seus membros. Para demonstrar propriedades dos conjuntos, uma prova estritamente algébrica seria necessária. No entanto, para entender uma propriedade e, mais do que isso, para nos convencermos de sua validade, os diagramas de Venn são bastante úteis.

No diagrama de Venn o conjunto universo é representado por um retângulo, mais precisamente, pelos pontos interiores ao retângulo. Qualquer conjunto é desenhado como sendo uma curva fechada, inteiramente contida no retângulo. Pontos interiores à curva correspondem aos elementos do conjunto. No exemplo da figura 1, a união e interseção de dois conjuntos genéricos estão representadas pelas regiões hachuradas das figuras 1a e 1b, respectivamente. O complemento de um conjunto é representado no diagrama da figura 1c.



(a) $X \cup Y$ $\quad$ (b) $X \cap Y$ $\quad$ (c) X^c

Figura 1: Diagramas de Venn (a) União de dois conjuntos. (b) Interseção de dois conjuntos. (c) Complemento de um conjunto.

Exercício: Seja x um elemento no conjunto universo U e X e Y dois subconjuntos quaisquer de U. Mostre que x é membro de apenas um dos conjuntos $X \cap Y$, $X \cap Y^c$, $X^c \cap Y$ e $X^c \cap Y^c$. (Dica: Desenhe o diagrama de Venn e argumente.)

Leis fundamentais

Dados conjuntos X, Y, Z quaisquer, utilize diagramas de Venn para convencer-se da validade das seguintes leis.

L1. Comutativa

(a) $X \cap Y = Y \cap X$

(b) $X \cup Y = Y \cup X$

L2. Associativa

(a) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

(b) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

L3. Distributiva

(a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

(b) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

L4. Idempotência

(a) $X \cap X = X$

(b) $X \cup X = X$

L5. Absorção

(a) $X \cap (X \cup Y) = X$

(b) $X \cup (X \cap Y) = X$

L6. Complementação

(a) $X \cap X^c = \emptyset$

(b) $X \cup X^c = U$

L7. Complementação dupla

$(X^c)^c = X$

L8. De Morgan

(a) $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$

(b) $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$

L9. Operações com $\emptyset$ e U

(a) (Elemento neutro) $U \cap X = X$ e $\emptyset \cup X = X$

(b) $\emptyset \cap X = \emptyset$ e $U \cup X = U$

(c) $\emptyset^c = U$ e $U^c = \emptyset$

As igualdades das leis acima podem ser entendidas com o auxílio de diagramas de Venn. Para provar as igualdades podemos mostrar que o conjunto do lado esquerdo está contido no do lado direito e vice-versa (propriedade de anti-simetria de $\subseteq$), ou ainda via transformações lógicas (ver exemplo mais adiante).

Note que $X \cup Y = (X^c \cap Y^c)^c$. Isto implica que o operador $\cup$ poderia ser dispensado. Maiores detalhes sobre isso serão vistos oportunamente. Enquanto isso, vale a pena mencionarmos que embora não necessário, o uso dos três operadores é conveniente.

Algumas leis são semelhantes aos da álgebra dos números. No entanto, na álgebra dos conjuntos não existem, como na álgebra usual, expressões do tipo $2X$ ou X^2 e algumas leis como as de número 3b, 4 e 5 não são válidas na álgebra dos números.

Observe também que a maior parte das leis aparece aos pares. Iremos ver mais adiante que isso está ligado ao princípio da dualidade.

<u>Exercício</u>: Prove a validade das leis L3, L5 e L8 acima.

Como exemplo, vamos mostrar a validade da lei L3(a), isto é, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Primeiramente utilizaremos o diagrama de Venn para nos convencermos da validade. O conjunto $X \cap (Y \cup Z)$ corresponde à região hachurada pelas linhas verticais e pelas linhas horizontais na figura 2a. Esta coincide com a região hachurada no diagrama mais à direita da figura 2b, que representa o conjunto $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

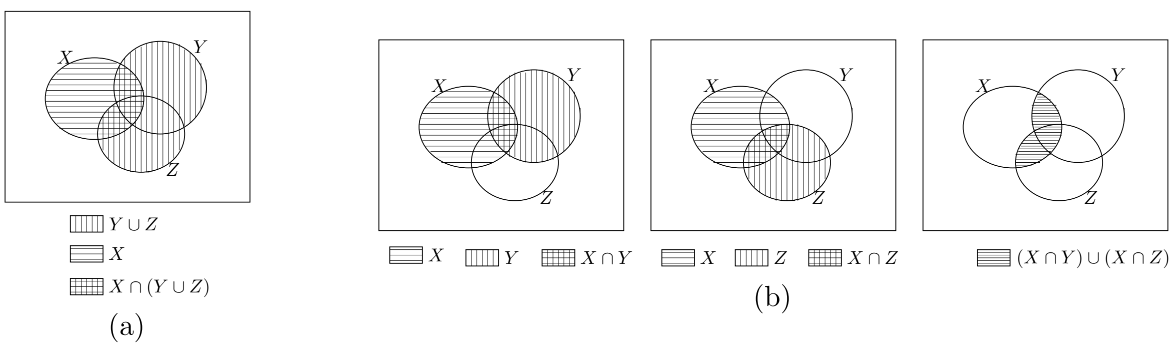


Figura 2: (a) $X \cap (Y \cup Z)$ e (b) $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

Para provar a igualdade, devemos mostrar que $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ e que $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$.

Prova: Considere $x \in X \cap (Y \cup Z)$. Então $x \in X$. Além disso, $x \in Y \cup Z$. Logo, temos que ou $x \in Y$ e/ou $x \in Z$. Se $x \in Y$, então $x \in X \cap Y$. Se $x \in Z$, então $x \in X \cap Z$. Logo, $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

Por outro lado, considere $y \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Então, ou $y \in (X \cap Y)$ e/ou $y \in (X \cap Z)$. Se $y \in (X \cap Y)$, então $y \in X$ e $y \in Y$. Se $y \in Y$ então $y \in Y \cup Z$ e portanto, $y \in X \cap (Y \cup Z)$. De forma similar, se $y \in (X \cap Z)$, então $y \in X$ e $y \in Z$, de modo que $y \in Y \cup Z$ e portanto, $y \in X \cap (Y \cup Z)$. $\square$

Podemos utilizar o mesmo raciocínio acima, porém expressando os conjuntos explicitamente, conforme a seguir:

$$X \cap (Y \cup Z) \quad = \quad \{x \,|\, x \in X \text{ e } x \in Y \cup Z\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x \mid x \in X \text{ e } (x \in Y \text{ ou } x \in Z)\} \\
&= \{x \mid (x \in X \text{ e } x \in Y) \text{ ou } (x \in X \text{ e } x \in Z)\} \\
&= \{x \mid x \in X \cap Y \text{ ou } x \in X \cap Z\} \\
&= (X \cap Y) \cup (X \cap Z)
\end{aligned}
$$

Exercício: A seguintes generalizações das leis de De Morgan são válidas ? Explique sua resposta.

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c$$

Exercício: Desenhe a relação $X \subseteq Y$ num diagrama de Venn. Quais igualdades envolvendo os conjuntos X e Y são verdadeiras quando $X \subseteq Y$? Liste pelo menos três.

Outras propriedades

Para quaisquer conjuntos X, Y e Z, as seguintes propriedades são verdadeiras:

P1. (a) $X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$
(b) $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$

P2. (a) $X \cap Y = X$ sse $X \subseteq Y$
(b) $X \cup Y = Y$ sse $X \subseteq Y$

P3. (a) $X = Y$ sse $(X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X)$
(b) $X = Y$ sse $X^c = Y^c$

Exercício: Mostre que $A \cap (A \cup B) = A$.

Por P1(b), sabemos que $A \subseteq A \cup B$. Mas então, por P2(a) $A \subseteq A \cup B$ implica que $A \cap (A \cup B) = A$.

Exercício: Dados dois conjuntos X e Y a **diferença** deles é definida por $X \setminus Y = \{x \in U : x \in X \text{ e } x \notin Y\}$ e a **diferença simétrica** entre eles é definida por $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Expresse estes conjuntos em termos das operações de complementação, união e interseção (deduza a partir do diagrama de Venn).

Obs.: Na presença dos operadores $\cup$, $\cap$ e ^{c}, não há necessidade dos operadores $\setminus$ e Δ. No entanto, estes operadores podem ser práticos.

Simplificação de expressões

As operações $\cup$, $\cap$ e ^{c} podem ser utilizadas para combinar conjuntos de várias formas. A combinação pode ser representada por uma expressão que descreve como os conjuntos foram combinados. Assim como a combinação de conjuntos resulta em um conjunto, uma expressão que descreve uma combinação de conjuntos representa um conjunto (aquele que resulta após as combinações serem executadas).

Como vimos no caso de algumas leis, existem diferentes formas para se expressar um mesmo conjunto. Por exemplo, vimos que $X = X \cup X$. Ou ainda, $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$. Assim sendo, surge a possibilidade de estudarmos diferentes formas de expressão de conjuntos. Expressões podem ser expandidas, fatoradas ou simplificadas aplicando-se as leis fundamentais.

Exemplo: Mostramos a simplificação da expressão $[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] \cap (A^c \cup B)$.

$$\begin{aligned}
[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] \cap (A^c \cup B) &= [A \cap (B \cup B^c)] \cap (A^c \cup B) \\
&= (A \cap U) \cap (A^c \cup B) \\
&= A \cap (A^c \cup B) \\
&= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\
&= \emptyset \cup (A \cap B) \\
&= A \cap B
\end{aligned}$$

Exercício: Simplifique as seguintes expressões:
a) $(A \cap B^c)^c \cup (B \cap C)$
b) $[(A \cup B) \cap (A \cup B^c)] \cap (A \cup B)$
c) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$
d) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$

Exercício: Verifique se as seguintes igualdades / afirmações são válidas. Justifique (pode ser via diagrama de Venn) ou mostre um contra-exemplo

a) $(A \cap B) \cup B = B$
b) $(A \cap C) \cap (B \cup C) = A \cap C$
c) Se $A \cup B = A \cup C$ então $B = C$
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
e) $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
f) $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A^c \cup B^c$
g) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
h) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$
i) $X \setminus X = \emptyset$
j) $X \setminus \emptyset = X$
k) $\emptyset \setminus X = \emptyset$
l) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$
m) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y$
n) $X \setminus Y = X \cap Y^c$
o) $(A \setminus B)^c = B \cup A^c$
p) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$
q) $X \Delta X = \emptyset$
r) $X \Delta Y = Y \Delta X$
s) $X \Delta \emptyset = X$
t) $X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y)$
u) $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$
v) $X \cup (Y \Delta Z) = (X \cup Y) \Delta (X \cup Z)$
x) Se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ então $A \subseteq B \cap C$

Nos seguintes exemplos ilustramos como podemos utilizar a álgebra dos conjuntos para analisar afirmações ou conjunto de afirmações.

Exemplo:

> Dado que Sócrates é um homem e que todos os homens são mortais, deseja-se mostrar que Sócrates é mortal.
>
> Vamos usar a propriedade de que $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$ implica $X \subseteq Z$.
>
> Sejam
> U: conjunto de todos os seres vivos
> X: conjunto de todos os seres vivos humanos
> Y: conjunto de todos os mortais
> S: conjunto unitário cujo único elemento é Sócrates
>
> Utilizando esta notação, temos que $S \subseteq X$ (Sócrates é um homem) e que $X \subseteq Y$ (todos os homens são mortais). Logo, $S \subseteq Y$ (ou seja, Sócrates é mortal).

Exemplo: Três colecionadores ingleses, A, B e C, de obras literárias antigas têm interesse pelas seguintes obras:

- A obras sobre política em inglês e ficção em língua estrangeira.
- B obras sobre política, exceto ficção em inglês, e obras em inglês que não sejam ficção
- C obras que não sejam ficção, e que sejam em inglês ou sobre política em língua estrangeira.

Pergunta-se quais são as obras pelas quais mais de um colecionador têm interesse?

Defina os conjuntos

A: todas as obras pelos quais A se interessa
B: todas as obras pelos quais B se interessa
C: todas as obras pelos quais C se interessa
E: todas as obras em inglês
F: todas as obras que são ficção
P: todas as obras sobre política

Podemos então expressar o conjunto Z de obras pelos quais pelo menos dois colecionadores possuem interesse por:

$$Z = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1}$$

Analogamente, podemos expressar os conjuntos A, B e C em termos dos conjuntos E, F e P da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A &= (P \cap E) \cup (F \cap E^c) \\ B &= (P \cap (F \cap E)^c) \cup (E \cap F^c) \\ C &= F^c \cap (E \cup (P \cap E^c)) \end{aligned}$$

Simplificando Z, após substituírmos A, B e C, temos que

$$Z = (E \cap F^c) \cup (P \cap E^c) \tag{2}$$

ou seja, que há pelo menos dois interessados em obras não-ficção em inglês e obras sobre política em língua estrangeira.

Vimos até aqui os principais conceitos relacionados a conjuntos. Em particular, note que conjuntos juntamente com as operações de união, interseção e complementação podem ser vistos como um sistema algébrico, onde expressões podem ser escritas para representar uma série de operações sobre conjuntos e as mesmas podem ser, por exemplo, simplificadas aplicando-se manipulações algébricas baseadas nas leis básicas.

Produto cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. O produto cartesiano de A e B, denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que o primeiro elemento x pertence a A e o segundo elemento y pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Generalizando, dados n conjuntos A_1, A_2,..., A_n, o produto cartesiano destes n conjuntos é dado por

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1 \text{ e } a_2 \in A_2 \text{ e } \ldots \text{ e } a_n \in A_n\}$$

Quando $A_i = A_j$ para quaisquer i e j, denota-se o produto cartesiano acima também por A^n.

Exercício: Seja $B = \{0, 1\}$. Liste todos os elementos do produto cartesiano $B \times B \times B$.

Relações binárias e funções

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma relação binária R sobre A e B é um subconjunto de $A \times B$, isto é, $R \subseteq A \times B$.

Dizemos que y é correspondente de x pela relação R se $(x, y) \in R$, e denotamos xRy (lê-se x-erre-y).

Se $R \subseteq A \times A$, dizemos que R é uma relação binária sobre A. Se $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots A_n$, então R é uma relação n-ária.

Uma relação binária R sobre A é uma **relação de equivalência** se para quaisquer três elementos a, b e c de A vale as propriedades:

- (reflexiva) aRa
- (simétrica) se aRb então bRa
- (transitiva) se aRb e bRc então aRc

Uma relação binária $f \subseteq A \times B$ é uma **função** de A em B se para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. A função é denotada $f : A \to B$ e em vez de xfy denotamos $f(x) = y$. O elemento $y = f(a) \in B$ é a **imagem** de $a \in A$.

Uma relação f que associa um elemento $b \in B$ para cada elemento do produto direto $A_1 \times A_2 \times \cdots A_n$ é denominada uma função de n variáveis.

<u>**Exercício:**</u> Explique o que são funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras.

Operações

Uma função de A em A é muitas vezes denominada uma **operação unária**. Por exemplo, o complemento $\cdot^c$ é uma operação unária. Uma função de duas variáveis de $A \times A$ em A é muitas vezes denominada uma **operação binária**. Por exemplo, na álgebra elementar a operação $+$ em $1 + 3 = 4$ é uma função que associa ao par $(1, 3)$ o elemento 4.