Noções de Morfologia Matemática

23 de maio de 2002

As transformadas lineares que vimos anteriormente, como a transformada de Fourier, foram inicialmente definidas para sinais unidimensionais e mais tarde foram extendidas para imagens. Assim, elas não são necessariamente adequadas para a transformação de imagens. Por exemplo, elas não privilegiam a forma presente nas imagens.

A morfologia matemática é uma abordagem surgida na década de 1960, na França, com a preocupação de explorar as formas presentes em imagens. Inicialmente desenvolvida para tratar imagens binárias, as primeiras aplicaçoes foram no estudo de porosidade de minerais. Mais tarde, ela foi extendida para imagens níveis de cinza e atualmente há estudos no contexto de imagens coloridas também.

Sua formalização é baseada na teoria dos reticulados completos (uma estrutura algébrica, com relação de ordem parcial, operação de supremo e ínfimo), e neste contexto, mapeamentos entre imagens podem ser vistos como operadores entre reticulados completos.

Em particular, os mapeamentos entre imagens binárias são formulados tendo como base a teoria dos conjuntos. A coleção de todos os subconjuntos de um conjunto E, com a relação de ordem parcial $\subseteq$ usual entre conjuntos, e as operações de interseção, união e complemento formam um reticulado completo.

Os mapeamentos da morfologia binária podem ser expressos através destas operações elementares sobre conjuntos e mais dois operadores básicos, conhecidos como **erosão** e **dilatação**.

Referências bibliográficas: [1] e [2, 3].

1 Alguns operadores básicos

Todos os operadores da morfologia matemática são caracterizados por subconjuntos denominados **elementos estruturantes**. A idéia básica é explorar a relação entre este subconjunto e o conjunto que define uma imagem binária. Vamos supor que os elementos estruturantes contém a origem.

1.1 Erosão e dilatação

A **erosão** de uma imagem X por um elemento estruturante B é definida por :

$$\varepsilon_B(X) = \{x \in E : B_x \subseteq X\}$$

onde B_x é o conjunto B transladado por x.

A **dilatação** de uma imagem X por um elemento estruturante B é definida por :

$$\delta_B(X) = \{x \in E : B_x \cap X \neq \emptyset\}$$

A erosão diminui o tamanho dos objetos presentes na imagem, enquanto a dilatação aumenta. Veja os exemplos na figura 1. Note também que a erosão elimina objetos menores que o elemento estruturante, enquanto a dilatação elimina buracos e espaços menores que o elemento estruturante.

Características da erosão:
- tamanho dos objetos são reduzidos
- objetos menores que o elemento estruturante são eliminados
- número de componentes pode aumentar

Características da dilatação :
- tamanho dos objetos são aumentados

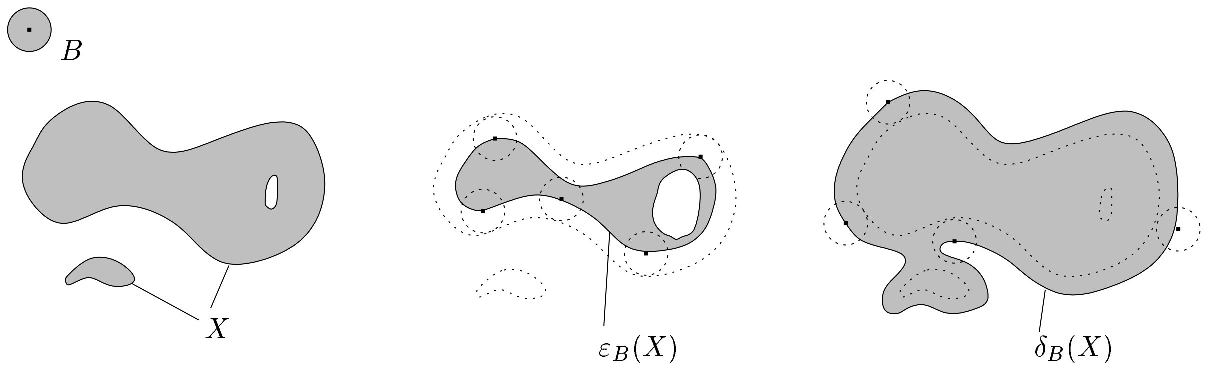


Figura 1: Efeitos da erosão e dilatação binárias.

- buracos menores que o elemento estruturante são eliminados
- número de componentes pode diminuir

Esta dualidade não é apenas coincidência: de fato, há uma relação de dualidade entre estes dois operadores, dada por:

$$\varepsilon_B(X) = (\delta_B(X^c))^c$$

onde $\cdot^c$ representa a operação de complementação usual de conjuntos.

Note também que, se a origem está contida em B, então $\varepsilon_B(X) \subseteq X \subseteq \delta_B(X)$.

1.2 Gradiente morfológico e bordas

O operador $\rho_B(X) = \delta_B(X) - \varepsilon_B(X)$ onde $-$ é a operação de diferença entre conjuntos, é denominado **gradiente morfológico**.

O operador $\rho_B^+(X) = \delta_B(X) - X$ é a borda ou **gradiente externo**, e o operador $\rho_B^-(X) = X - \varepsilon_B(X)$ é a borda ou **gradiente interno**.

A figura 2 ilustra os três tipos de gradiente, pelo elemento estruturante 3×3.

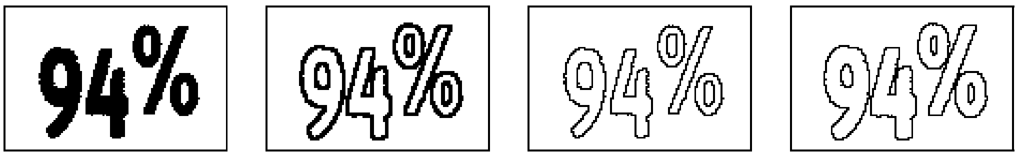


Figura 2: Da esquerda para a direita: imagem inicial, gradiente morfológico, gradiente interno e gradiente externo.

A figura 3 ilustra os três tipos de gradiente, para o elemento estruturante 3×3 e cruz, respectivamente.

Note que o gradiente morfológico é a união da borda externa com a borda interna, e portanto pode ser entendida como uma borda "mais grossa".

Em geral, os elementos estruturantes utilizados para extração de borda são a cruz ou o quadrado elementar (quadrado 3×3). Dependendo do elemento estruturante utilizado, as bordas podem apresentar pequenas diferenças. Observe também que a cruz está relacionado com a 4-adjacência, enquanto o quadrado está associado com a 8-adjacência.

1.3 Abertura e fechamento

O operador $\gamma_B(X) = \delta_B(\varepsilon_B(X))$ é denominado **abertura** de X por B, e o operador $\varphi_B(X) = \varepsilon_B(\delta_B(X))$ é denominado **fechamento** de X por B.

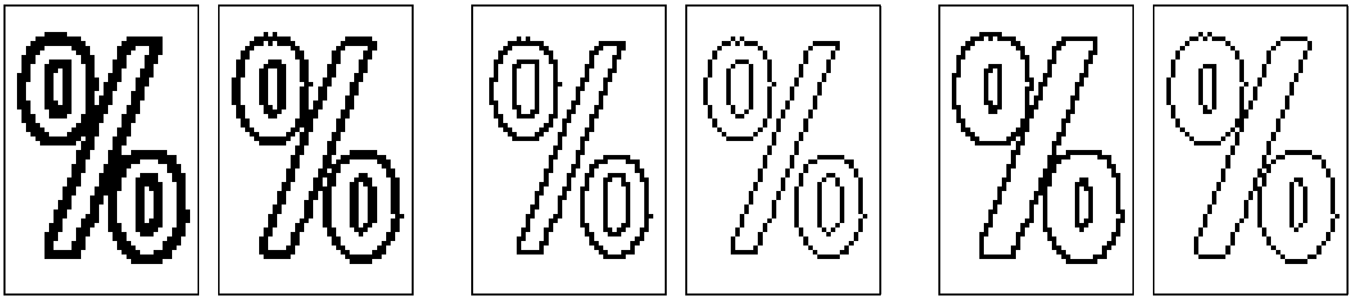


Figura 3: Da esquerda para a direita: gradiente morfológico, gradiente interno e gradiente externo (com elemento estruturante 3×3 e cruz, respectivamente).

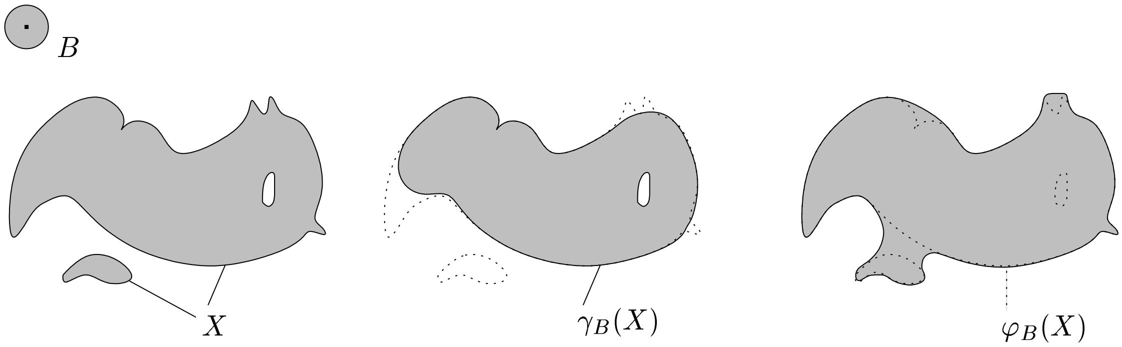


Figura 4: Efeitos da aberturta e fechamento binários.

Características da abertura:
- objetos menores que o elemento estruturante são eliminados
- partes pequenas do objeto são eliminadas
- partes pequenas do fundo não são eliminadas

Características do fechamento :
- preenche pequenos espaços entre objetos
- preenche pequenos buracos
- preenche reentrâncias estreitas

Estes operadores também possuem uma propriedade de dualidade, isto é: $\gamma_B(X) = [\varphi_B(X^c)]^c$.

Além disso, $\gamma_B(X) \subseteq X \subseteq \varphi_B(X)$, $\gamma\gamma = \gamma$ e $\varphi\varphi = \varphi$.

1.4 Exemplo ilustrativo

A figura 5 mostra o resultado dos quatro operadores (erosão, dilatação, abertura e fechamento) pelo quadrado elementar.

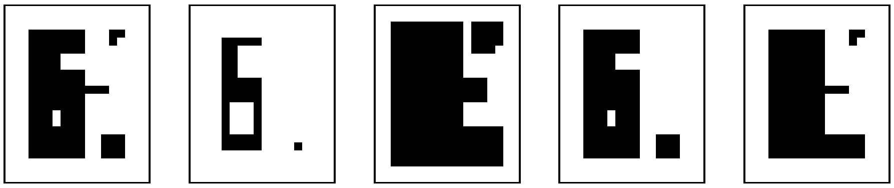


Figura 5: Da esquerda para a direita: imagem inicial, erosão, dilatação, abertura e fechamento.

1.5 Relação entre erosão e transformada distância

Seja nB um elemento estruturante de tamanho n, isto é, um elemento estruturante B dilatado n vezes por sua transposta (a transposta de B é denotada B^t e definida por $B^t = \{-b : b \in B\}$):

$$nB = \delta_{B^t}^{(n)}(B)$$

Sejam $D_4(X)$ e $D_8(X)$ os resultados da transformada distância de X para a 4-adjacência e 8-adjacência respectivamente. A erosão de um conjunto X pelo elemento estruturante de tamanho n, nB, onde B é um losango (cruz) ou quadrado, é equivalente ao thresholding da correspondente transformada distância de X no limiar $n+1$:

$$\varepsilon_{B_1}^{(n)}(X) = \{x \in X : D_4(X) > n\} = T_{n+1}[D_4(X)]$$

$$\varepsilon_{B_2}^{(n)}(X) = \{x \in X : D_8(X) > n\} = T_{n+1}[D_8(X)]$$

onde $T_i[f]$ denota o thresholding de f no nível i, e B_1 e B_2 são os elementos estruturantes cruz e quadrado, respectivamente.

1.6 Operador Hit-or-Miss

Operadores **hit-or-miss** são caracterizados por um par (B_1, B_2) de elementos estruturantes. A idéia é que um certo ponto fará parte da imagem resultante se e somente se o elemento B_1 "atinge" totalmente a imagem entrada nesse pixel (está totalmente contido na imagem entrada) e se o elemento B_2 perde totalmente a imagem entrada nesse pixel (está totalmente contido no complemento da imagem entrada).

$$H_{(B_1,B_2)}(X) = \{x \in X : B_1 \subseteq X \text{ e } B_2 \subseteq X^c\}$$

Este operador pode ser escrito também como

$$H_{(B_1,B_2)}(X) = \varepsilon_{B_1}(X) \cap \varepsilon_{B_2}(X^c)$$

Um operador equivalente ao operador hit-or-miss são as **sup-geradoras**. Dados dois elementos estruturantes A e B, tais que $A \subseteq B \subseteq W$, onde W é um subconjunto denominado janela, o operador sup-gerador é definido como:

$$\lambda_{(A,B)}(X) = \{x \in X : A_x \subseteq X \cap W_x \subseteq B_x\}$$

Exemplo: detecção de ponto extremo esquerdo em segmentos de reta horizontais, considerando-se a 4-vizinhança. Considere os elementos estruturantes da figura 6.

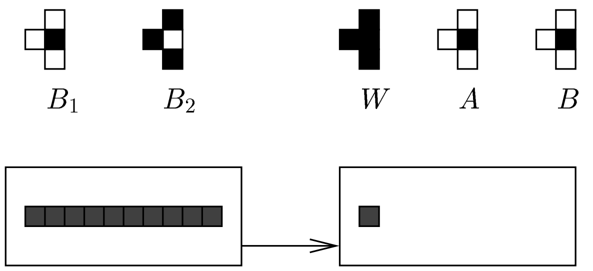


Figura 6: Detecção de ponto extremo esquerdo em segmento de reta horizontal. Temos $H_{(B_1,B_2)}(X) = \lambda_{(A,B)}(X)$.

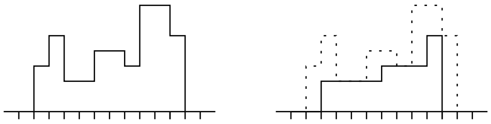
Comentário: para um dado W fixo, pode-se ter $2^{2^{|W|}}$ diferentes mapeamentos distintos entre imagens binárias. Tais operadores podem ser expressos como a união de operadores sup-geradores.

2 Morfologia Matemática para imagens níveis de cinza

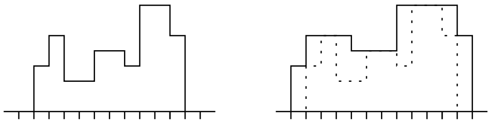
As idéias usadas na morfologia binária foram naturalmente extendidas para imagens níveis de cinza. A seguir veremos os operadores básicos para imagens níveis de cinza.

2.1 Erosão e dilatação

Erosão: $[\varepsilon_B(f)](x) = min\{f(x+b) : b \in B\}$

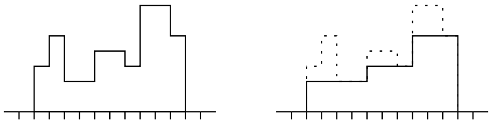


Dilatação : $[\delta_B(f)](x) = max\{f(x+b) : b \in B\}$

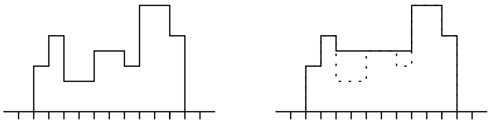


2.2 Abertura e fechamento

Abertura: $\gamma_B(f) = \delta_B(\varepsilon_B(f))$



Fechamento: $\varphi_B(f) = \varepsilon_B(\delta_B(f))$



A abertura elimina picos que são mais estreitos que o elemento estruturante, enquanto o fechamento preenche vales que são mais estreitos que o elemento estrutuante.

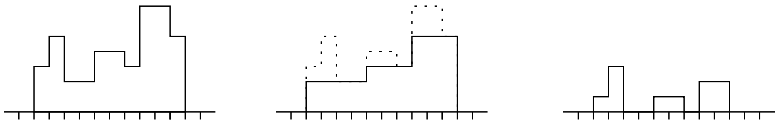
Gradientes são definidos de forma similar ao caso binário.

3 Outros operadores úteis

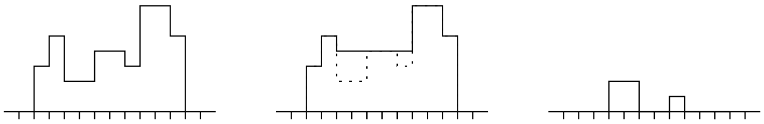
Nesta seção apresentamos mais alguns operadores da morfologia matemática. Alguns são para imagens binárias (conjuntos), outros para imagens níveis de cinza.

3.1 Top-hat

White top-hat: $WTH(f) = f - \gamma(f)$



Black top-hat: $BTH(f) = \varphi(f) - f$



Self-complementary top-hat: $\varrho = WTH(f) + BTH(f) = \varphi(f) - \gamma(f)$

3.1.1 Aplicações do top-hat

Correção de iluminação não uniforme: A figura 7 mostra uma imagem de texto com iluminação não uniforme. Assim, uma operação de threshold simples não funciona para segmentar as letras. Após a aplicação do top-hat a iluminação fica uniforme e um simples threshold funciona para segmentar as letras.

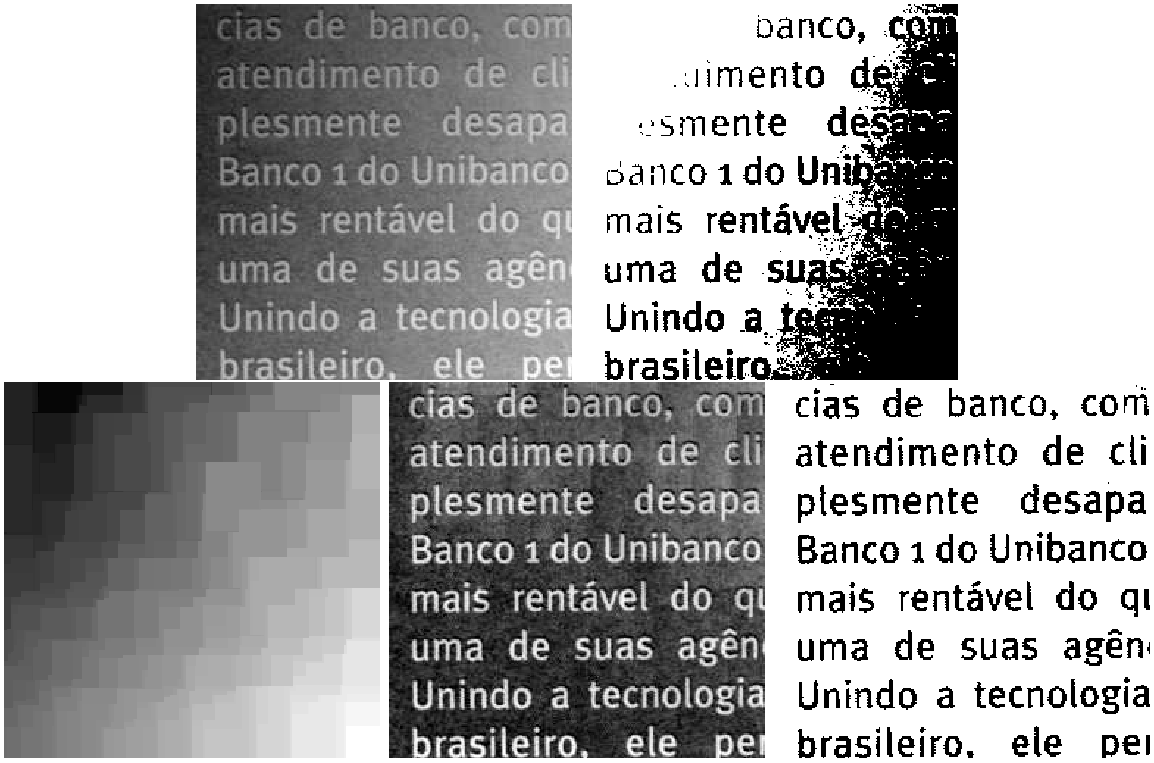


Figura 7: Correção de iluminação não uniforme via operador top-hat: imagem original, threshold da imagem original, abertura da imagem original por um quadrado grande, resultado do top-hat, e threshold do resultado do top-hat, respectivamente.

Realce de contraste: Pode ser obtido adicionando-se o resultado do white top-hat e subtraindo-se o resultado do black top-hat da imagem original. Isto é,

$$K(f) = f + WTH(f) - BTH(f) = f + f - \gamma(f) - \varphi(f) - f = 3f - \gamma(f) - \varphi(f)$$

Isto é mostrado na figura 8.

3.2 Emagrecimento e engordamento

Emagrecimento (thinning): Sejam B_1, B_2 dois elementos estruturantes, tal que B_1 contém a origem.

$$THIN_{(B_1,B_2)}(X) = X - H_{(B_1,B_2)}(X)$$

Engordamento (thickening): Sejam B_1, B_2 dois elementos estruturantes, tal que B_2 contém a origem.

$$THICK_{(B_1,B_2)}(X) = X \cup H_{(B_1,B_2)}(X)$$

Relação de dualidade : $THIN_{(B_1,B_2)}(X) = [THICK_{(B_2,B_1)}(X^c)]^c$

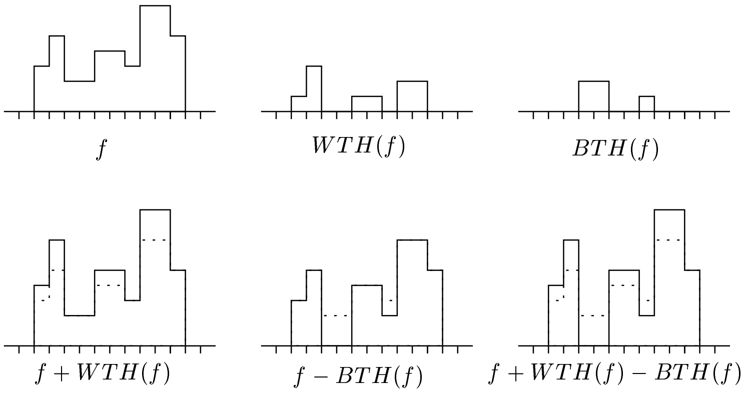


Figura 8: Uso do operador top-hat para aumentar contraste.

3.3 Esqueletos morfológicos

Os esqueletos são úteis para reconhecimento e análise de formas. Em vez de bordas (contornos), pode-se extrair o esqueleto ou eixo medial (linhas finas que condensam a informação original enquanto preservam a homotopia) dos objetos e analisar os atributos dele.

Alguns dos atributos (características) interessantes do esqueleto são comprimento máximo entre dois pontos extremos quaisquer, número de pontos extremos, quantidade de laços, quantidade de ramificações, etc.

Esqueleto Euclideano : Podemos primeiramente pensar em esqueleto Euclideano de um objeto no espaço 2D contínuo (e não discreto). Existem várias formas de se definir esqueleto:

Suponha que uma onda de fogo se propaga das bordas para o interior de um objeto, a uma velocidade constante. O esqueleto deste objeto corresponde aos pontos onde as ondas se encontram.

A propagação das ondas de fogo pode ser vista como os diferentes níveis da transformada distância. A superfície resultante da transformada distância corresponde a "rampas" em todos os pontos, exceto em alguns picos. Esses pontos que não fazem parte de rampas correspondem justamente aos pontos onde as ondas de fogo se encontram, isto é, aos esqueleto.

Outra forma de descrever esqueleto é considerar o lugar geométrico ocupado pelo centro de todos os círculos maximais contidos no objeto. Veja a figura 9.

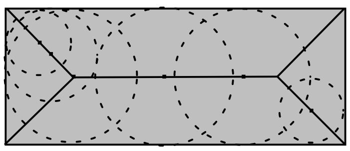


Figura 9: Esqueleto definido via bolas maximais contidas no objeto.

Pode-se pensar também nos caminhos mínimos entre os pontos do objeto e sua borda. O esqueleto corresponde a todos os pontos pelos quais não "passa" nenhum caminho mínimo.

Esqueleto digital : No caso digital, o esqueleto possui largura de pelo menos 1 pixel. Além disso, largura de 1 pixel e esqueleto centrado são propriedades incompatíveis em geral (por exemplo, em um retângulo cuja largura corresponde a um número par de pixels, não existe um segmento de pixels de largura um que ocupa o centro do retângulo). Além disso, no caso digital conseguimos apenas uma aproximação da distância Euclideana.

Por causa desses e outros detalhes ligados a discretização, em geral a adaptação do esqueleto no espaço contínuo para o espaço discreto resulta em diferentes tipos de esqueletos digitais. Algumas adaptações podem resultar em esqueletos não conectados (mesmo que o objeto esteja conectado) ou podem resultar em esqueletos de largura maior que 1, por exemplo. Isto não é interesante para descrição de formas.

Gostaria de preservar a homotopia: Para fazer análise de formas a partir do esqueleto dos objetos é interessante que estes preservem a homotopia, isto é, a quantidade e a relação entre os objetos deve ser preservada (mesmo que mude a posição e formato). A figura 10 ilustra o conceito de homotopia.

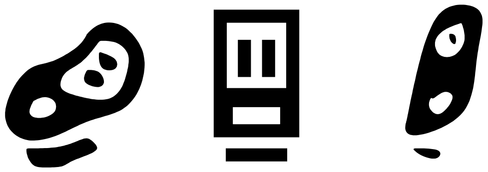


Figura 10: Os dois primeiros são homotópicos, mas o último não é homotópico aos dois primeiros.

Dizemos que um par de elementos estruturantes é homotópico se o emagrecimento baseado neles preserva a homotopia. O esqueleto pode ser obtido emagrecendo-se os objetos com um par de elementos estruturantes homotópicos ou uma série de pares de elementos estruturantes homotópicos e suas respectivas rotações, até a estabilidade.

No caso da 4-adjacência pode-se utilizar os seguintes pares de elementos estruturantes e suas 4 rotações:

No caso da 8-adjacência pode-se utilizar os seguintes pares de elementos estruturantes e suas 4 rotações:

Esqueleto morfológico: o esqueleto corresponde aos pontos centrais de bolas maximais (geradas a partir do elemento estruturante B) contidas no objeto da imagem de entrada. O esqueleto morfológico não necessariamente preserva a homotopia.

Exemplos: Na figura 11, o esqueleto morfológico foi obtido utilizando-se o elemeto estruturante cruz. O esqueleto homotópico foi obtido utilizando-se o primeiro par de elementos estruturantes acima para o caso da 8-adjacência.

3.4 Dilatação e erosão geodésicas

Seja $\delta^{(1)}(f) = \delta(f)$ e $\delta^{(n)}(f) = \delta(\delta^{(n-1)}(f))$, para $n > 1$ (o elemento estruturante foi omitido nas notações). Analogamente, seja $\varepsilon^{(1)}(f) = \varepsilon(f)$ e $\varepsilon^{(n)}(f) = \varepsilon(\varepsilon^{(n-1)}(f))$, para $n > 1$.

Uma classe de transformações úteis são as transformações geodégicas. Transformações geodégicas envolvem, além da imagem a ser transformada f, uma segunda imagem g denominada máscara. A idéia é que o resultado da transformação seja forçado a permanecer limitado pela imagem máscara.

Seja f uma imagem a ser transformada e seja g uma imagem máscara.

Dilatação geodésica de tamanho 1: $f \leq g$

$$\delta_g^{(1)}(f) = \delta^{(1)}(f) \wedge f$$

onde $\wedge$ é a operação de ínfimo (no caso de imagens binárias, corresponde à intersecção de conjuntos e no caso de imagens níveis de cinza corresponde à operação de mínimo).

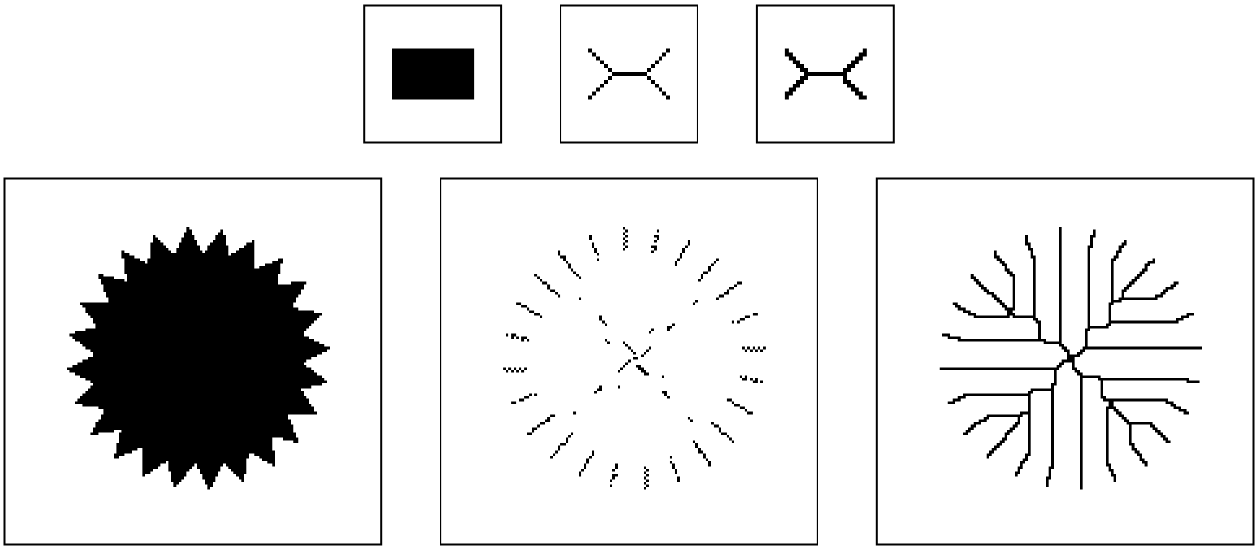
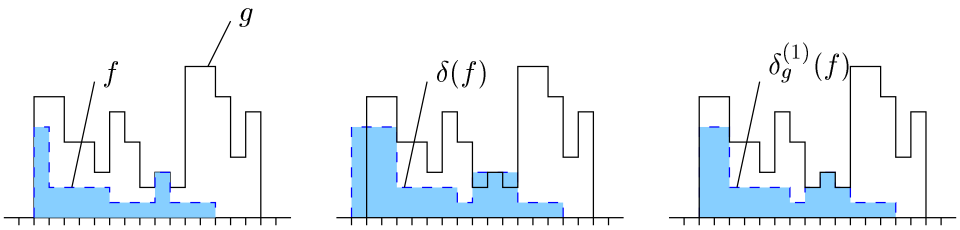


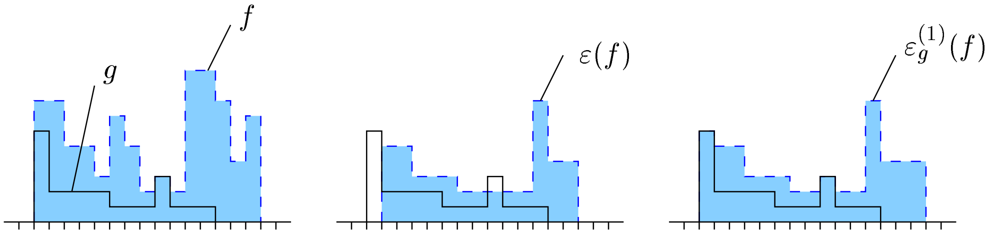
Figura 11: Esqueletos morfológico e homotópico.



Erosão geodésica : $g \leq f$

$$\varepsilon_g^{(1)}(f) = \varepsilon^{(1)}(f) \vee f$$

onde $\vee$ é a operação de supremo (no caso de imagens binárias, corresponde à união de conjuntos e no caso de imagens níveis de cinza corresponde à operação de máximo).



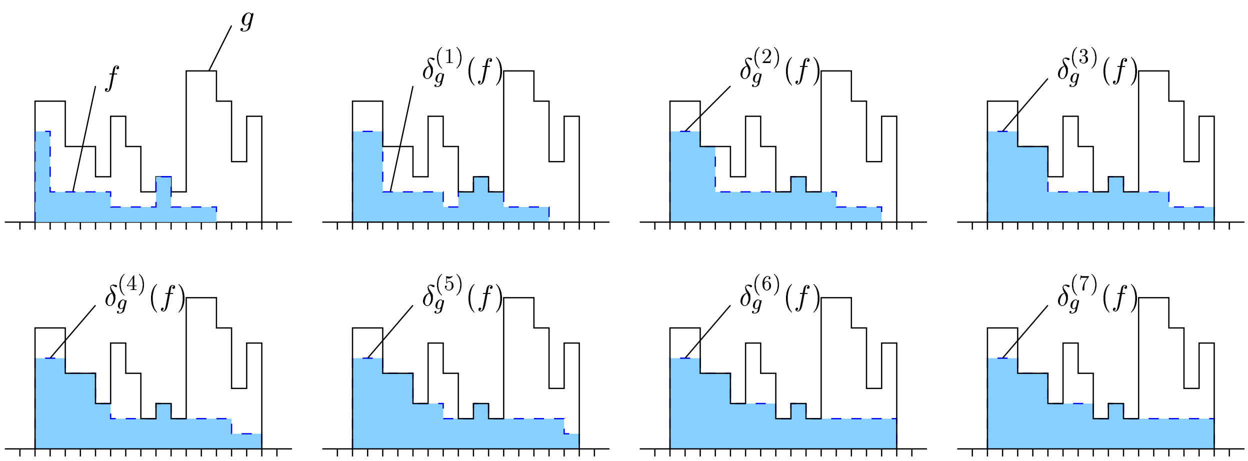
Dilatação geodésica de tamanho n, $n > 1$, é definida por $\delta_g^{(n)}(f) = \delta_g^{(1)}(\delta_g^{(n-1)}(f))$. Note que $\delta_g^{(n)}(f) \leq \delta^{(n)}(f) \wedge g$. A erosão geodésica de tamanho n é definida de forma análoga.

3.5 Reconstrução Morfológica

Reconstrução por dilatação : Sejam f, g, tais que $f \leq g$. A reconstrução por dilatação de uma imagem máscara g a partir de uma imagem marcadora f é definida como a dilatação geodésica até a estabilidade de f com respeito a g:

$$R_g(f) = \delta_g^{(i)}(f)$$

onde i é o menor inteiro positivo tal que $\delta_g^{(i)}(f) = \delta_g^{(i+1)}(f)$.



Reconstrução por erosão : Sejam f, g, tais que $f \geq g$. A reconstrução por erosão de uma imagem máscara g a partir de uma imagem marcadora f é definida como a erosão geodésica até a estabilidade de f com respeito a g:

$$R_g^*(f) = \varepsilon_g^{(i)}(f)$$

onde i é o menor inteiro positivo tal que $\varepsilon_g^{(i)}(f) = \varepsilon_g^{(i+1)}(f)$.

Abertura por reconstrução de tamanho n: é a reconstrução de f a partir de uma erosão f de tamanho n.

$$\gamma_R^{(n)}(f) = R_f[\varepsilon^{(n)}(f)]$$

Ou seja, apenas os objetos que "sobreviverem" a erosão de tamanho n serão reconstruídos.

Fechamento por reconstrução de tamanho n:

$$\varphi_R^{(n)}(f) = R_f^*[\delta^{(n)}(f)]$$

Comparemos os efeitos de uma abertura por reconstrução de tamanho 1 e uma abertura simples. Primeiro a imagem é erodida. Como conseqüência, objetos menores que o elemento estruturante desaparecem, assim como saliências (penínsulas) mais estreitas que o elemento estruturante. A abertura dilata a imagem erodida, e portanto a imagem resultante não conterá os objetos eliminados e as saliências removidas não serão recuperadas. Já na abertura por reconstrução, sobre a imagem dilatada é aplicada uma dilatação geodésica, até a estabilidade. Ou seja, os objetos que não foram eliminados completamente são recuperados integralmente.

Referências

[1] P. Soille. *Morphological Image Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] G. J. F. Banon and J. Barrera. Bases da Morfologia Matemática para Análise de Imagens Binárias. IX Escola de Computação, Pernambuco, Julho 1994.

[3] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology.* Academic Press, 1982.