Algoritmos de segmentação por corte em grafo generalizado

Prof. Dr. Paulo A. V. de Miranda
Instituto de Matemática e Estatística (IME),
Universidade de São Paulo (USP)
pmiranda@vision.ime.usp.br

Corte em grafo generalizado

Considere um grafo ponderado $G = \langle V, E, w \rangle$ derivado de uma imagem $\hat{I}$, onde os pesos $w(c, d)$ entre pixels vizinhos são projetados para ter valores elevados nas transições das bordas do objeto de interesse (e.g., $w(c, d) = |I(c) - I(d)|$).

Corte em grafo generalizado

- Para cada grafo $G = \langle V, E, w \rangle$, considere o espaço $\tilde{\mathcal{X}}$ de todas as funções $x\colon V \to [0,1]$, referido como *subconjuntos "fuzzy"* de V, com o valor $x(c)$ indicando um grau de pertinência com o qual c pertence ao conjunto.
- A família $\mathcal{X}$ de todas as funções $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ com os valores permitidos somente de 0 e 1 (i.e., $x\colon V \to \{0,1\}$) será referida como a família de todos *subconjuntos "hard"* de V.
- Cada $x \in \mathcal{X}$ é identificado com o subconjunto $P = \{c \in V : x(c) = 1\}$ de V. Note que, em tal caso, x é a *função característica* χ_P de $P \subset V$.

Corte em grafo generalizado

- Nós geralmente restringimos a coleção $\mathcal{X}$ de todos os objetos permitidos através de dois conjuntos disjuntos, referidos como *sementes*: $\mathcal{S}_{obj} \subset V$ indicando o objeto e $\mathcal{S}_{bkg} \subset V$ indicando o fundo.
- Isto restringe o conjunto de saídas admissíveis dos algoritmos para a família $\mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$ de todos $x \in \mathcal{X}$ com $x(s) = 1$ para todo $s \in \mathcal{S}_{obj}$, e $x(t) = 0$ para todo $t \in \mathcal{S}_{bkg}$.
- Note que $\mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg}) = \{\chi_P : \mathcal{S}_{obj} \subset P \subset V \setminus \mathcal{S}_{bkg}\}$.

Corte em grafo generalizado

Para $q \in [1, \infty]$ considere o funcional de energia $\varepsilon_q \colon \tilde{\mathcal{X}} \to [0, \infty)$, onde, para cada $x \in \tilde{\mathcal{X}}$, $\varepsilon_q(x)$ é definido como a q-norma do funcional $F_x \colon E \to \mathbb{R}$, dado pela fórmula $F_x(c, d) = \bar{w}(c, d)|x(c) - x(d)|$ para $\langle c, d \rangle \in E$. Isto é,

$$\varepsilon_\infty(x) = ||F_x||_\infty = \max_{\langle c,d \rangle \in E} \bar{w}(c, d)|x(c) - x(d)|,$$

$$\varepsilon_q(x) = ||F_x||_q = \sqrt[q]{\sum_{\langle c,d \rangle \in E} \left(\bar{w}(c, d)|x(c) - x(d)|\right)^q}$$

para $q < \infty$, onde $\bar{w}(c, d) = K - w(c, d)$.
Note que $\lim_{q \to \infty} \varepsilon_q(x) = \varepsilon_\infty(x)$, visto que q-norma converge, quando $q \to \infty$, para a ∞-norma.

Corte em grafo generalizado

- Seja $\varepsilon^q_{\min}$ o mínimo da energia $\varepsilon_q(x)$ sobre todos os objetos permitidos $x \in \mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$, isto é, $\varepsilon^q_{\min} = \min\{\varepsilon_q(x) \colon x \in \mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})\}$.
- Qualquer elemento de $\mathcal{X}_q(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg}) = \{x \in \mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg}) \colon \varepsilon_q(x) = \varepsilon^q_{\min}\}$ será referido como uma solução ótima da energia ε_q em $\mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$.
- Qualquer algoritmo A que, dada uma imagem $\hat{I}$ e conjuntos de sementes $\mathcal{S}_{obj}$ e $\mathcal{S}_{bkg}$, retorna um objeto, denotado por $A(\hat{I}, \mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$, de $\mathcal{X}_q(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$ será referido como um *algoritmo de ε_q-minimização*.

Corte em grafo generalizado

- Note que o algoritmo padrão de *fluxo máximo/corte mínimo* é um algoritmo de ε_1-minimização. Vamos usar um símbolo $\mathrm{GC}_{\mathrm{sum}}$ para denotar este algoritmo.
- Os métodos *Relative Fuzzy Connectedness (RFC)*, *Iterative Relative Fuzzy Connectedness (IRFC)*, Floresta de Espalhamento Mínima, e alguns casos de Floresta de Caminhos Ótimos são todos algoritmos de ε_∞-minimização. Todos esses métodos podem ser obtidos via a Transformada Imagem-Floresta (IFT).

Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

Por simplicidade, vamos considerar o problema equivalente dual dado pela **maximização** da energia abaixo:

$$\varepsilon_{\infty}^{-}(x) = \min_{\langle c,d\rangle \in E | x(c) \neq x(d)} w(c,d),$$

As funções de conexidade são especificadas por uma regra de inicialização e uma regra de extensão de caminho.

$$
\begin{aligned}
f_{sum}(\langle t \rangle) &= \begin{cases} 0 & \text{se } t \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_{obj} \cup \mathcal{S}_{bkg} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases} \\
f_{sum}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) &= f_{sum}(\pi_s) + w^{\beta}(s, t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\max}(\langle t \rangle) &= \begin{cases} -1 & \text{se } t \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_{obj} \cup \mathcal{S}_{bkg} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases} \\
f_{\max}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) &= \max\{f_{\max}(\pi_s), w(s, t)\}
\end{aligned}
$$

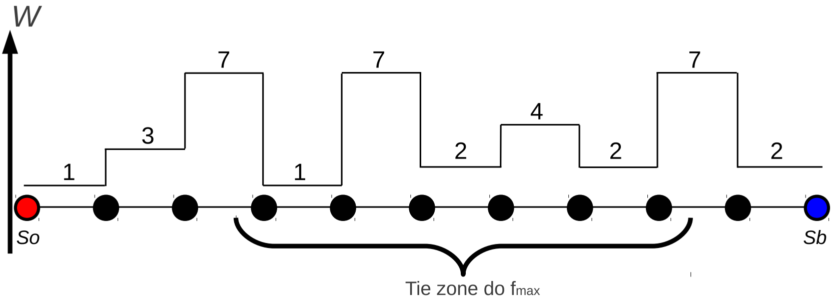
Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

$$
\begin{aligned}
f_w(\langle t \rangle) &= \begin{cases} -1 & \text{se } t \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_{obj} \cup \mathcal{S}_{bkg} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases} \\
f_w(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) &= w(s,t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{IRFC}(\langle t \rangle) &= \begin{cases} -1 & \text{se } t \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_{obj} \cup \mathcal{S}_{bkg} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases} \\
f_{IRFC}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) &= \begin{cases} \max\{f_{IRFC}(\pi_s), 2 \times w(s,t) + 1\} & \text{se } R(s) \in \mathcal{S}_{obj} \\ \max\{f_{IRFC}(\pi_s), 2 \times w(s,t)\} & \text{se } R(s) \in \mathcal{S}_{bkg} \end{cases}
\end{aligned}
$$

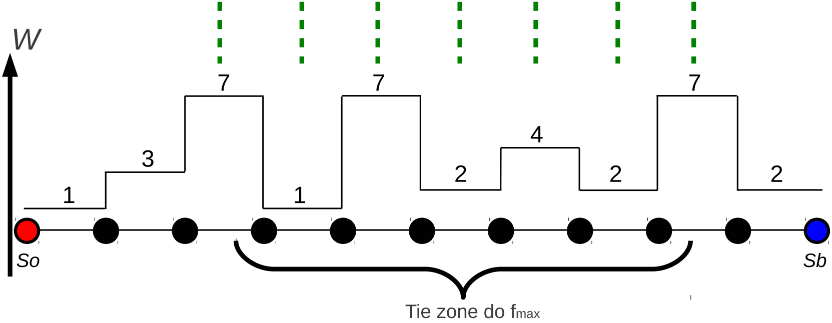
onde $R(s) = org(\pi_s)$.

Exemplo:

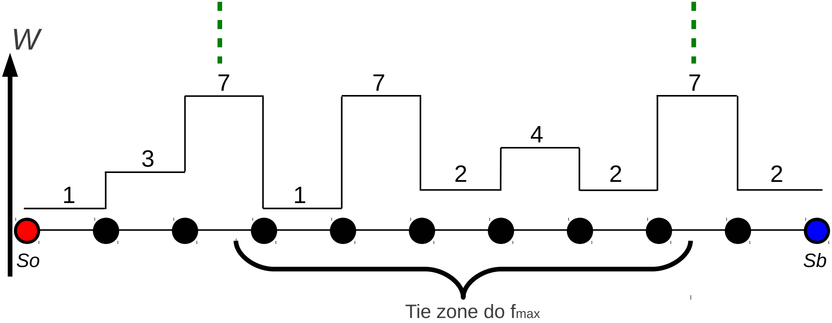


Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

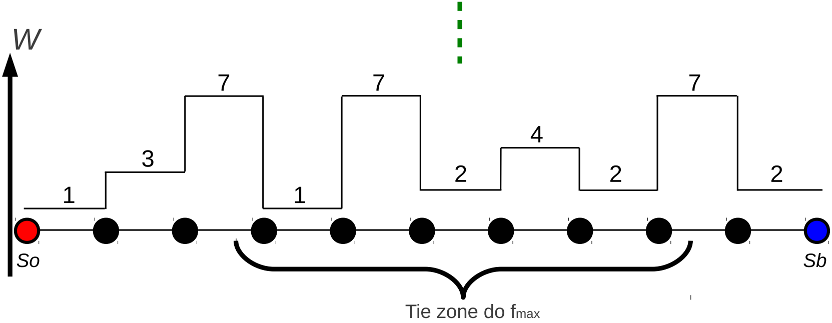
Possíveis bordas de corte da IFT com f_{max}:



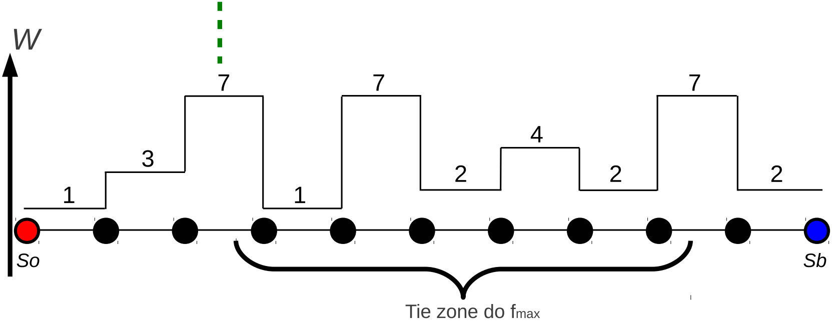
Possíveis bordas de corte da IFT com f_{max} (desempate LIFO):



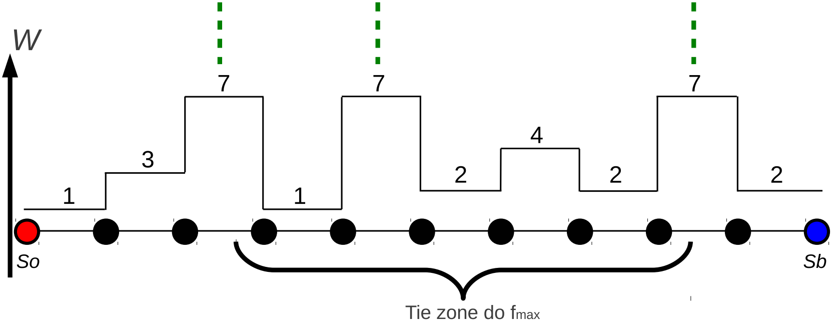
Possíveis bordas de corte da IFT com f_{max} (desempate FIFO):



Possíveis bordas de corte da IFT com f_{IRFC}:



Possíveis bordas de corte da IFT com f_w:



Relative-fuzzy connectedness (RFC)

Dois mapas de conexidade separados são calculados:

- $V_o(q)$ que leva em conta apenas as sementes em $\mathcal{S}_{obj}$.
- $V_b(q)$ que leva em conta apenas as sementes em $\mathcal{S}_{bkg}$.

$$V_o(q) = \min_{\forall \pi_q \; in \; (V,E) | \mathrm{org}(\pi_q) \in \mathcal{S}_{obj}} \{f_{max}(\pi_q)\}, \tag{1}$$

$$V_b(q) = \min_{\forall \pi_q \; in \; (V,E) | \mathrm{org}(\pi_q) \in \mathcal{S}_{bkg}} \{f_{max}(\pi_q)\}. \tag{2}$$

A segmentação final é obtida por comparação dos dois mapas de conexidade $V_o(q)$ e $V_b(q)$, tal que cada pixel $q \in V$ é rotulado como sendo do objeto somente se $V_o(q) < V_b(q)$.

Diagrama das relações entre métodos

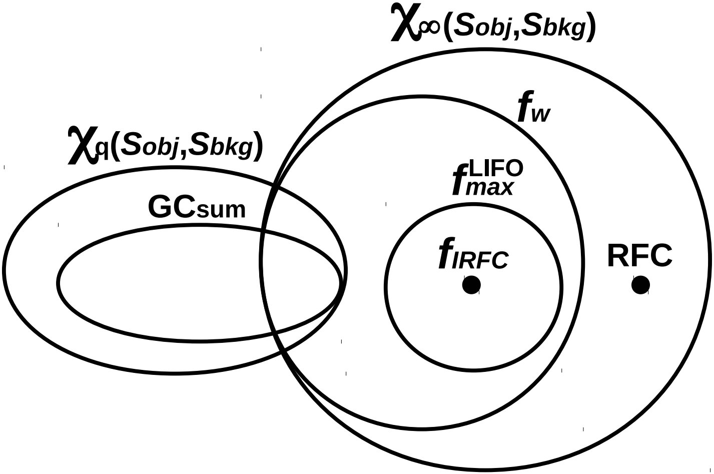
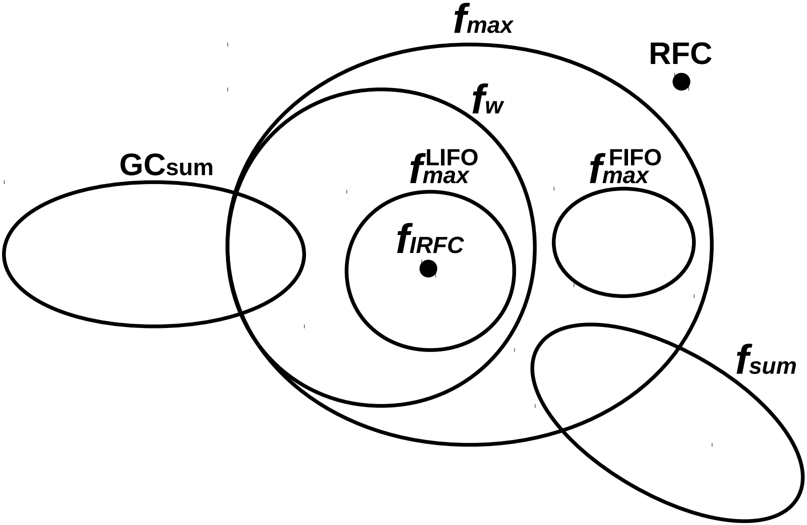


Diagrama das relações entre métodos



Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

(a) *RFC*

(b) *IRFC*

(c) $IFT_{f_{max}}$

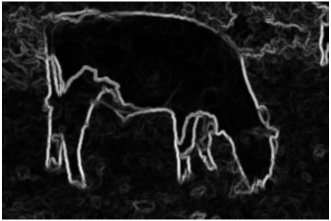


Imagem de pesos e o resultado usando $f_{max}(\pi)$.

Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

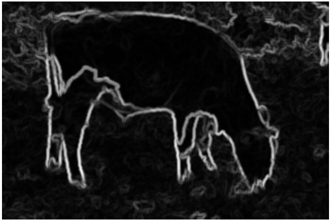


Imagem de pesos e o resultado usando $f_{sum}(\pi)$ **(β pequeno)**.

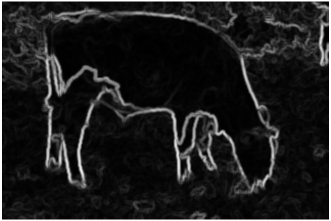


Imagem de pesos e o resultado usando $f_{sum}(\pi)$ **(β elevado)**.

Bibliografia

- *P.A.V. Miranda, and A.X. Falcão*,
  Elucidating the relations among seeded image segmentation methods and their possible extensions,
  Sibgrapi 2011 (XXIV Conference on Graphics, Patterns and Images),
  Maceió, AL, Brazil, pp. 289-296, 2011.
  http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6134744
- *Krzysztof Chris Ciesielski, J.K. Udupa, A.X. Falcão, and P.A.V. Miranda*,
  Fuzzy Connectedness image segmentation in Graph Cut formulation: A linear-time algorithm and a comparative analysis,
  Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 44, no. 3, 2012.
  http://www.springerlink.com/content/f443573w41785464/?MUD=MP