

# Processamento de Imagens usando Grafos (MAC6903)

Prof. Dr. Paulo A. V. de Miranda  
Instituto de Matemática e Estatística (IME),  
Universidade de São Paulo (USP)  
[pmiranda@vision.ime.usp.br](mailto:pmiranda@vision.ime.usp.br)



# Imagem Digital

## Imagem Digital

Imagem em tons de cinza

Imagem multidimensional

Imagem multibanda

Imagem como grafo

Relação de conexidade

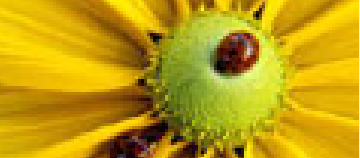
Componente Conexo

Rotulação de componentes conexos

Algoritmo de rotulação

Rotulação por conjuntos disjuntos

Uma imagem digital genérica  $\hat{I}$  é um par  $(\mathcal{D}_I, \vec{I})$ , onde  $\mathcal{D}_I$  é um conjunto de pontos do  $Z^n$  (domínio da imagem), denominados *spels* (*space elements*), e  $\vec{I}$  é um mapeamento vetorial que associa a cada spel  $p$  em  $\mathcal{D}_I$  um vetor  $\vec{I}(p) = \{I_1(p), I_2(p), \dots, I_k(p)\} \in Z^k$  de valores escalares, associados a um conjunto de  $k$  propriedades físicas. O valor de  $n$  refere-se à dimensão da imagem e o valor de  $k$  ao número de bandas.



# Imagem em tons de cinza

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conexidade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

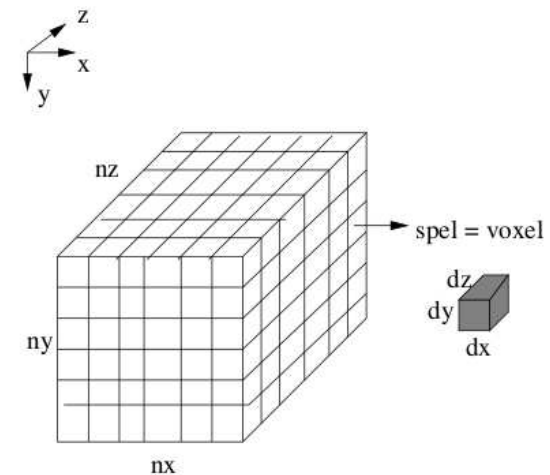
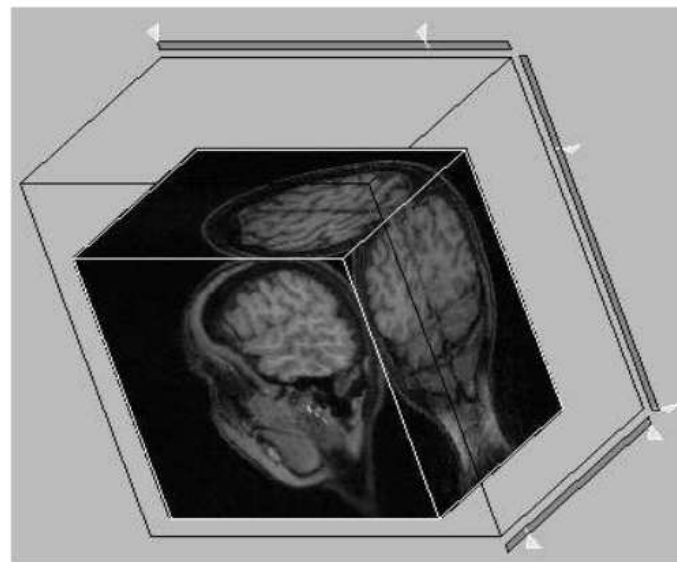
Uma imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$  em tons de cinza (e.g. foto, imagem de ultrassom, fatia tomográfica) e bidimensional ( $\mathcal{D}_I \subset \mathbb{Z}^2$ ) possui apenas uma banda  $I$  ( $k = 1$ ), onde os spels são chamados pixels (*picture elements*). A imagem bidimensional é portanto uma matriz de tamanho  $N \times M$  pixels ( $N$  linhas e  $M$  colunas).



# Imagem multidimensional

- Imagem Digital
- Imagem em tons de cinza
- Imagem multidimensional**
- Imagem multibanda
- Imagem como grafo
- Relação de conectividade
- Componente Conexo
- Rotulação de componentes conexos
- Algoritmo de rotulação
- Rotulação por conjuntos disjuntos

Uma imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$  em tons de cinza e multidimensional define o domínio de amostragem  $\mathcal{D}_I \subset Z^n$ , para  $n > 2$ . Por exemplo, uma sequência espacial de fatias tomográficas é uma imagem tridimensional ( $n = 3$ ), e uma sequência espacial e temporal de fatias tomográficas é uma imagem tetradimensional ( $n = 4$ ). No primeiro caso, os spels são chamados de *voxels* (*volume element*) e a imagem é chamada de *volume*.





# Imagem multibanda

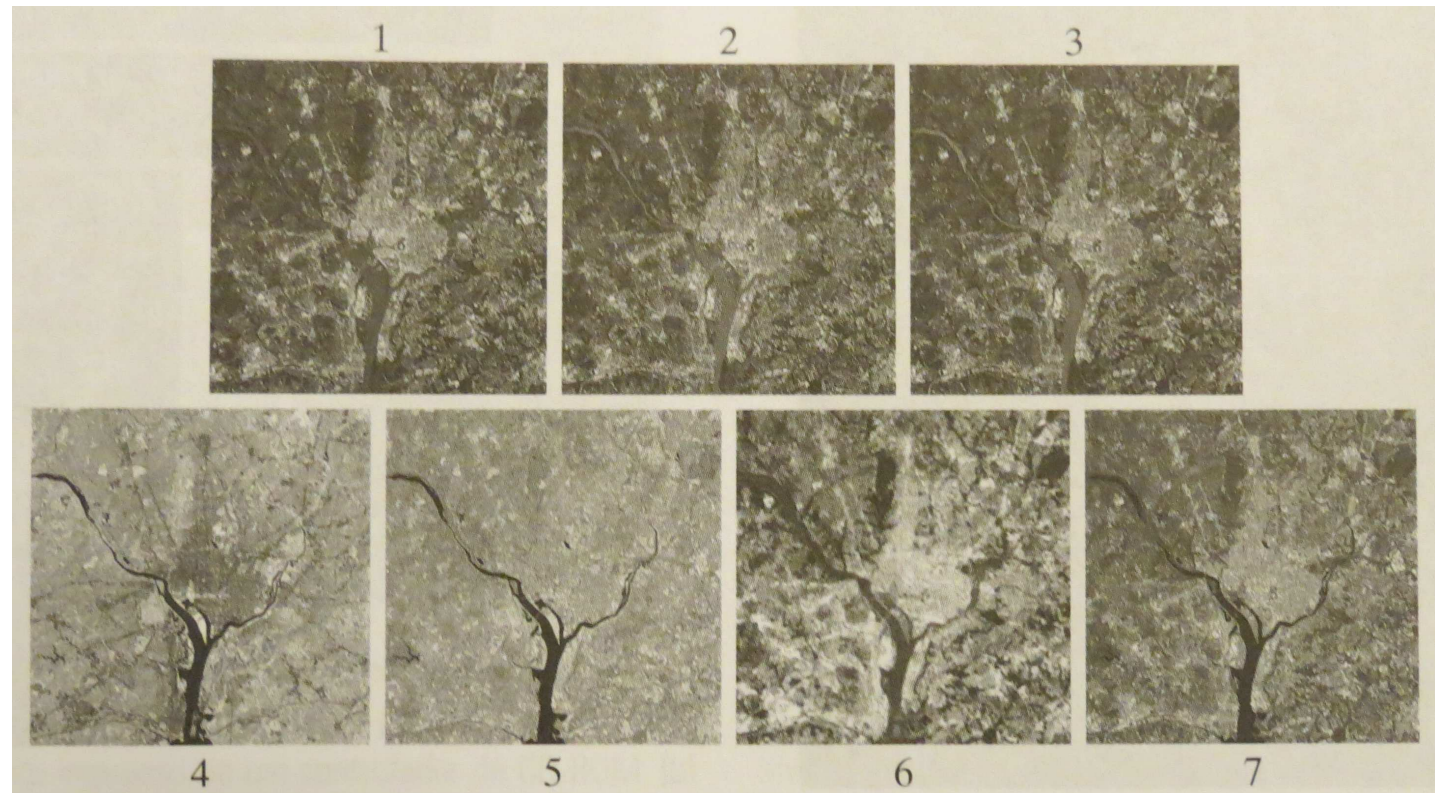
- Imagem Digital
- Imagem em tons de cinza
- Imagem multidimensional
- Imagem multibanda**
- Imagem como grafo
- Relação de conexidade
- Componente Conexo
- Rotulação de componentes conexos
- Algoritmo de rotulação
- Rotulação por conjuntos disjuntos

Uma imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, \vec{I})$  é multibanda quando o mapeamento vetorial  $\vec{I}$  associa a cada spel  $p$  obrigatoriamente mais de um valor escalar ( $\vec{I}(p) = \{I_1(p), \dots, I_k(p)\}$ , para  $k > 1$ ). Imagens de satélite, por exemplo, possuem bandas que correspondem a imagens cinza obtidas nos comprimentos de onda do azul, vermelho, verde, infravermelho, infravermelho próximo, termal e ultravioleta. O intervalo de amostragem define a resolução espectral. No caso de uma foto colorida temos  $k = 1, 2, 3$  correspondendo aos componentes vermelho, verde e azul. Observe que o vídeo colorido é uma imagem multidimensional e multibanda.



# Imagem multibanda

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
**Imagem multibanda**  
Imagem como grafo  
Relação de conectividade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos



Imagens da área de Washington, D.C., vistas pelo satélite Landsat (Livro Gonzalez).





# Imagem multibanda

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
**Imagem multibanda**  
Imagem como grafo  
Relação de conectividade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

Bandas temáticas no satélite Landsat, da Nasa.

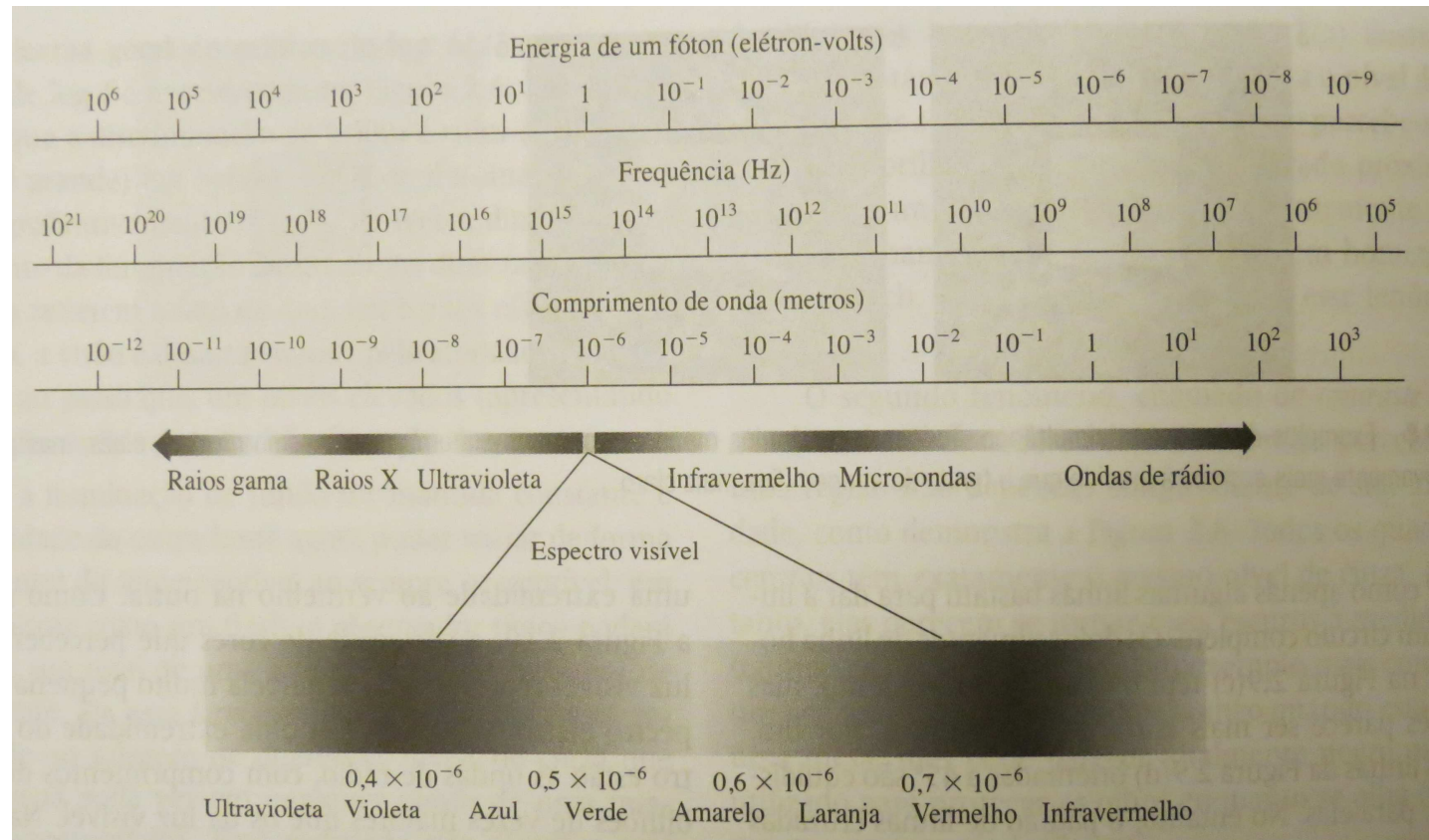
Número da banda	Nome	Comprimento de onda ( $\mu\text{m}$ )	Características e utilizações
1	Azul visível	0,45-0,52	Máxima penetração na água
2	Verde visível	0,52-0,60	Bom para a mensuração do vigor de plantas
3	Vermelho visível	0,63-0,69	Discriminação de vegetação
4	Infravermelho próximo	0,76-0,90	Mapeamento de biomassa e linha costeira
5	Infravermelho médio	1,55-1,75	Conteúdo de umidade do solo e vegetação
6	Infravermelho termal	10,4-12,5	Umidade do solo, mapeamento térmico
7	Infravermelho médio	2,08-2,35	Mapeamento mineral

Imagens da área de Washington, D.C., vistas pelo satélite Landsat (Livro Gonzalez).



# Imagem multibanda

- Imagem Digital
- Imagem em tons de cinza
- Imagem multidimensional
- Imagem multibanda**
- Imagem como grafo
- Relação de conectividade
- Componente Conexo
- Rotulação de componentes conexos
- Algoritmo de rotulação
- Rotulação por conjuntos disjuntos



Espectro eletromagnético.





# Imagem como um grafo

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
**Imagem como grafo**  
Relação de conectividade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

Existem várias formas de modelar um grafo a partir de uma imagem, definindo os nós do grafo e uma relação de adjacência entre eles.

- Dependendo do problema, pixels, vértices de pixels, arestas de pixels, ou regiões da imagem podem ser os nós.
- A relação de adjacência pode levar em conta a posição relativa entre os nós, bem como propriedades da imagem.

Podemos ainda estender a idéia para grafos onde os nós são objetos de uma imagem ou objetos (ou imagens) de um banco de dados.

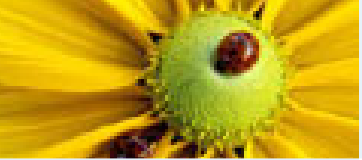


# Imagem como um grafo

- Imagem Digital
- Imagem em tons de cinza
- Imagem multidimensional
- Imagem multibanda
- Imagem como grafo**
- Relação de conexidade
- Componente Conexo
- Rotulação de componentes conexos
- Algoritmo de rotulação
- Rotulação por conjuntos disjuntos

Inicialmente, vamos considerar o caso em que a imagem é interpretada como um grafo cujos nós são os pixels  $p = (x_p, y_p)$  e os arcos são definidos por uma **relação de adjacência**  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_I \times \mathcal{D}_I$ .

Se  $(p, q) \in \mathcal{A}$  (ou  $q \in A(p)$ ), dizemos que  $q$  é **adjacente** a  $p$ .

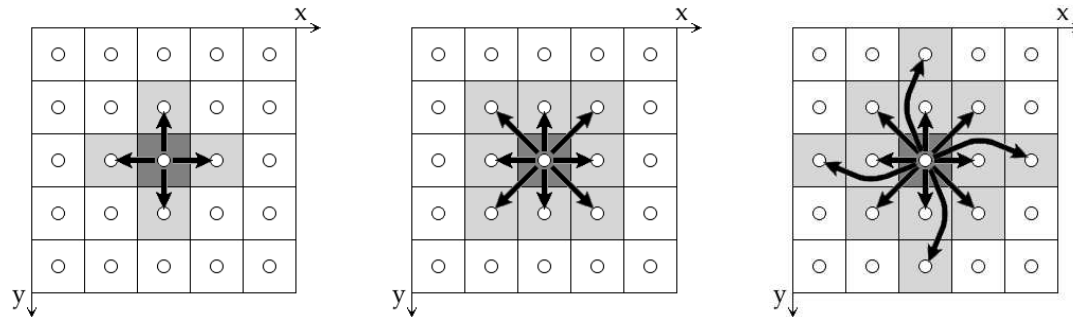


# Imagem como um grafo

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conexidade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

Exemplos de relação de adjacência para o caso de uma imagem 2D:

- **1. Circular:**  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $d(p, q) \leq \rho$ , onde  $d$  é a distância Euclideana e  $\rho$  é um escalar.



Adjacências euclidianas. (a) 2D de raio  $\rho = 1$  (vizinhos-4), (b) raio  $\rho = \sqrt{2}$  (vizinhos-8), (c) raio  $\rho = 2$ .



# Imagem como um grafo

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conexidade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

Exemplos de relação de adjacência para o caso de uma imagem 2D:

- **2. Retangular:**  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $|x_q - x_p| \leq \frac{a}{2}$  e  $|y_q - y_p| \leq \frac{b}{2}$ , onde  $a$  e  $b$  são os comprimentos dos lados do retângulo com centro em  $(x_p, y_p)$ .
- **3. Baseada em conjunto:**  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $q - p \in \{(-1, -1), (1, -1)\}$ .
- **4. Baseada em propriedades locais:**  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $d(p, q) \leq \rho_i$  e  $d(\vec{I}(p), \vec{I}(q)) \leq \rho_a$ , onde  $d()$  é o operador de distância Euclideana e  $\rho_i$  e  $\rho_a$  são os raios nos espaços imagem e de atributos (paramétrico), respectivamente.



## Relação de conexidade

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo

Relação de conexidade

Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

- Um caminho  $\pi$  no grafo  $G = (\mathcal{D}_I, \mathcal{A})$  é uma sequência de pixels distintos  $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ , onde  $(p_i, p_{i+1}) \in \mathcal{A}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .
- O pixel  $p_1$  é a origem  $org(\pi)$  do caminho, e  $p_n$  é o destino  $dst(\pi)$ .
- O caminho  $\pi$  é dito **trivial** se  $\pi = \langle p_1 \rangle$ .
- Seja  $\pi$  um caminho que termina em um pixel  $p$  e  $(p, q) \in \mathcal{A}$ , então  $\pi \cdot \langle p, q \rangle$  é dito o caminho resultante da concatenação de  $\pi$  e  $\langle p, q \rangle$  com as duas instâncias de  $p$  se fundindo em uma.
- Um pixel  $q$  é dito **conexo** a um pixel  $p$  se existir um caminho de  $p$  a  $q$  em  $G = (\mathcal{D}_I, \mathcal{A})$ .





# Componente Conexo

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conexidade

## Componente Conexo

Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

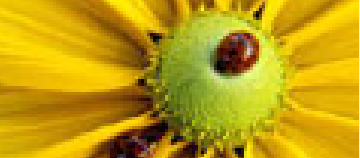
- Um **componente fortemente conexo** em  $G$  é um subconjunto maximal de  $\mathcal{D}_I$ , onde todos os pares  $(p, q)$  de pixels são fortemente conexos (i.e., existe um caminho de  $p$  a  $q$  e um caminho de  $q$  a  $p$ , que não são necessariamente os mesmos).
- O conjunto de componentes fortemente conexos forma uma partição de  $\mathcal{D}_I$  (i.e., os componentes fortemente conexos são disjuntos, e sua união é o conjunto  $\mathcal{D}_I$ ).
- Em muitas situações desejamos particionar uma imagem, identificando individualmente cada componente fortemente conexo. Por exemplo, podemos enumerar todos os componentes 1's de uma imagem binária ou definir componentes fortemente conexos em uma imagem cinza a partir de uma relação de dissimilaridade local entre pixels.



## Rotulação de componentes conexos

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conexidade  
Componente Conexo  
**Rotulação de componentes conexos**  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

Considere o problema de obter uma partição da imagem, onde cada componente fortemente conexo recebe um rótulo  $l = 1, 2, \dots, c$  e o número  $c$  de componentes depende da relação de adjacência  $\mathcal{A}$ . Os componentes fortemente conexos podem ser determinados usando o algoritmo de Tarjan. No caso em que  $\mathcal{A}$  é uma relação simétrica ( $(p, q) \in \mathcal{A} \implies (q, p) \in \mathcal{A}$ ), uma solução simples é aplicar a seguinte busca em largura no grafo  $G$ .



# Algoritmo de rotulação

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conexidade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

**Algoritmo 1** — ALGORITMO DE ROTULAÇÃO DE COMPONENTES CONEXOS

ENTRADA: Imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, \vec{I})$ , e relação de adjacência  $\mathcal{A}$  simétrica.

SAÍDA: Imagem rotulada  $\hat{L} = (\mathcal{D}_I, L)$ , onde  $L(p) = 0$  inicialmente  $\forall p \in \mathcal{D}_I$ .

AUXILIARES: Fila FIFO  $Q$  e variável inteira  $l = 1$ .

1. **Para Cada** pixel  $p \in \mathcal{D}_I$ , tal que  $L(p) = 0$ , **Faça**
2.      $L(p) \leftarrow l$  e insira  $p$  em  $Q$ .
3.     **Enquanto**  $Q \neq \emptyset$ , **Faça**
4.         Remova um pixel  $q$  de  $Q$ .
5.         **Para Cada**  $t \in \mathcal{A}(q)$ , tal que  $L(t) = 0$ , **Faça**
6.              $L(t) \leftarrow l$  e insira  $t$  em  $Q$ .
7.      $l \leftarrow l + 1$

# Rotulação de componentes



Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conectividade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

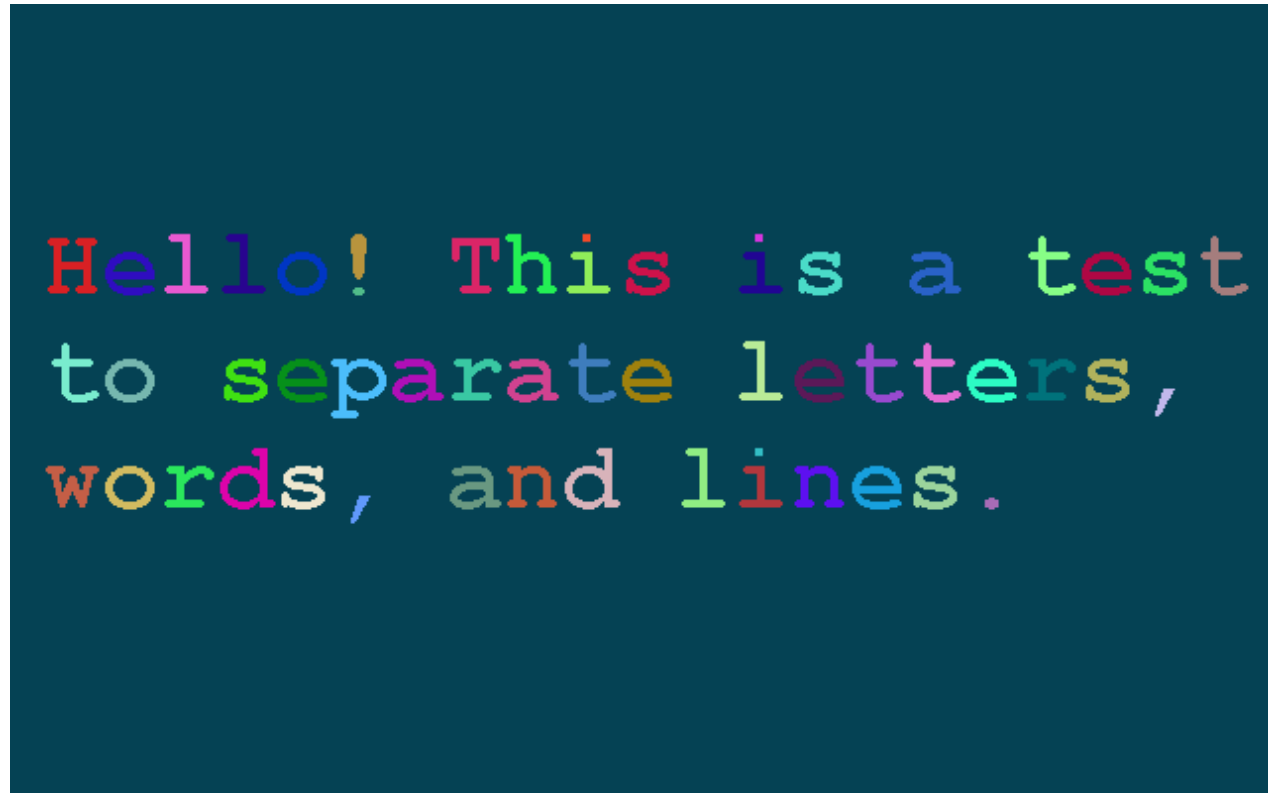
Hello! This is a test  
to separate letters,  
words, and lines.

Rotulação de componentes binários em uma imagem de  $640 \times 400$  pixels.

# Rotulação de componentes



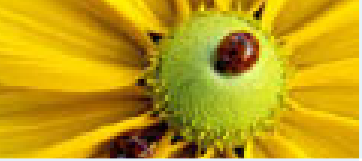
- Imagem Digital
- Imagem em tons de cinza
- Imagem multidimensional
- Imagem multibanda
- Imagem como grafo
- Relação de conectividade
- Componente Conexo
- Rotulação de componentes conexos
- Algoritmo de rotulação
- Rotulação por conjuntos disjuntos



Por exemplo, considere uma adjacência euclidiana circular com raio  $\rho = \sqrt{2}$  (vizinhos-8) para rotular as **letras** do texto binário.



# Rotulação de componentes



- Imagem Digital
- Imagem em tons de cinza
- Imagem multidimensional
- Imagem multibanda
- Imagem como grafo
- Relação de conectividade
- Componente Conexo
- Rotulação de componentes conexos
- Algoritmo de rotulação
- Rotulação por conjuntos disjuntos

Hello! This is a test  
to separate letters,  
words, and lines.

Adjacência euclidiana circular de raio  $\rho = 12$  para rotular as **palavras** do texto.



# Rotulação de componentes

- Imagem Digital
- Imagem em tons de cinza
- Imagem multidimensional
- Imagem multibanda
- Imagem como grafo
- Relação de conexidade
- Componente Conexo
- Rotulação de componentes conexos
- Algoritmo de rotulação
- Rotulação por conjuntos disjuntos

Hello! This is a test  
to separate letters,  
words, and lines.

Adjacência retangular com lados  $a = 100$  e  $b = 20$  para rotular as **linhas** do texto.

# Rotulação por conjuntos disjuntos

O problema de rotulação de componentes conexos também pode ser visto como um problema de manutenção de conjuntos disjuntos (algoritmo *union-find*). A rotulação pode levar em conta propriedades mais globais dos componentes, como o brilho médio, por exemplo.

**Algoritmo 2** - Rotulação por conjuntos disjuntos:

ENTRADA: Imagem cinza  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$ , relação de adjacência  $\mathcal{A}$  simétrica e limiar  $T$ .

SAÍDA: Imagem rotulada  $\hat{L} = (\mathcal{D}_I, L)$ .

AUXILIAR: Imagem de representantes  $\hat{R} = (\mathcal{D}_I, R)$  de cada componente, imagem  $\hat{S} = (\mathcal{D}_I, S)$  onde cada representante guarda a soma dos brilhos dos pixels do componente, imagem  $\hat{N} = (\mathcal{D}_I, N)$  onde cada representante guarda o número de pixels de seu componente, e variável inteira  $l = 1$ .

# Rotulação por conjuntos disjuntos

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conectividade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

**Algoritmo 2** — ROTULAÇÃO POR CONJUNTOS DISJUNTOS (CONT.)

1. **Para Cada** *pixel*  $p \in \mathcal{D}_I$ , **Faça**  $R(p) \leftarrow p$ ,  $S(p) \leftarrow I(p)$ , e  $N(p) \leftarrow 1$ .
2. **Para Cada** *pixel*  $p \in \mathcal{D}_I$ , **Faça**
  3.  $r_p \leftarrow \text{Representante}(\hat{R}, p)$ .
  4. **Para Cada** *pixel*  $q \in \mathcal{A}(p)$ , **Faça**
    5.  $r_q \leftarrow \text{Representante}(\hat{R}, q)$ .
    6. **Se**  $r_q \neq r_p$ , **Então**
      7. **Se**  $\left| \frac{S(r_p)}{N(r_p)} - \frac{S(r_q)}{N(r_q)} \right| \leq T$ , **Então**
        8.  $\text{Junte}(\hat{R}, r_p, r_q, \hat{S}, \hat{N})$ .
9. **Para Cada** *pixel*  $p \in \mathcal{D}_I$ , **Faça**
  10.  $R(p) \leftarrow \text{Representante}(\hat{R}, p)$ .
  11. **Se**  $R(p) = p$ , **Então**  $L(p) \leftarrow l$  e  $l \leftarrow l + 1$ .
12. **Para Cada** *pixel*  $p \in \mathcal{D}_I$ , **Faça**  $L(p) \leftarrow L(R(p))$ .



# Rotulação por conjuntos disjuntos

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conexidade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

Algoritmo para encontrar o representante com compressão:

**Algoritmo 3** —  $Representante(\hat{R}, p)$

1. **Se**  $R(p) = p$ , **Então**
2.      $\perp$  *retorne*  $p$ .
3. **Senão**
4.      $\perp$  *retorne*  $R(p) \leftarrow Representante(\hat{R}, R(p))$ .



# Rotulação por conjuntos disjuntos

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conexidade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos

## Algoritmo de união de componentes com otimização:

**Algoritmo 4** —  $Junte(\hat{R}, r_p, r_q, \hat{S}, \hat{N})$

1. **Se**  $N(r_p) \geq N(r_q)$ , **Então**
2.      $\perp$   $N(r_p) \leftarrow N(r_p) + N(r_q)$ ,  $S(r_p) \leftarrow S(r_p) + S(r_q)$ , e  $R(r_q) \leftarrow r_p$ .
3. **Senão**
4.      $\perp$   $N(r_q) \leftarrow N(r_q) + N(r_p)$ ,  $S(r_q) \leftarrow S(r_q) + S(r_p)$ ,  $R(r_p) \leftarrow r_q$ , e  $r_p \leftarrow r_q$ .

Observe que  $r_p$  pode ser atualizado na linha 4 da função *Junte*, portanto deve ser passado por referência.

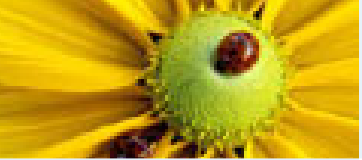


# Rotulação por conjuntos disjuntos

- Imagem Digital
- Imagem em tons de cinza
- Imagem multidimensional
- Imagem multibanda
- Imagem como grafo
- Relação de conectividade
- Componente Conexo
- Rotulação de componentes conexos
- Algoritmo de rotulação
- Rotulação por conjuntos disjuntos



Algoritmo 2 com adjacência euclidiana circular de raio  $\rho = \sqrt{2}$  e limiar  $T = 120$ .



# Rotulação por conjuntos disjuntos

Imagem Digital  
Imagem em tons de cinza  
Imagem multidimensional  
Imagem multibanda  
Imagem como grafo  
Relação de conectividade  
Componente Conexo  
Rotulação de componentes conexos  
Algoritmo de rotulação  
Rotulação por conjuntos disjuntos



Algoritmo 2 com adjacência euclidiana circular de raio  $\rho = \sqrt{2}$  e limiar  $T = 30$ .