

# Transformada Imagem-Floresta (IFT)

Prof. Dr. Paulo A. V. de Miranda  
Instituto de Matemática e Estatística (IME),  
Universidade de São Paulo (USP)  
[pmiranda@vision.ime.usp.br](mailto:pmiranda@vision.ime.usp.br)



# Caminhos no grafo

## Caminhos no grafo

Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo

Transformada

Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas

podem ser

resolvidos?

Floresta de

espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos

caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de

prioridade

- Um caminho  $\pi$  no grafo  $G = (\mathcal{D}_I, \mathcal{A})$  é uma sequência de pixels distintos  $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ , onde  $(p_i, p_{i+1}) \in \mathcal{A}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .  $p_1$  é a origem  $org(\pi)$  do caminho e  $p_n$  é o destino  $dst(\pi)$ .
- $\pi_t = \langle p_1, p_2, \dots, p_n = t \rangle$  é um caminho com término em um pixel  $t$ .
- $\pi_{s \rightsquigarrow t} = \langle p_1 = s, p_2, \dots, p_n = t \rangle$  é um caminho com origem em  $s$  e término em  $t$ .
- O caminho  $\pi$  é dito **trivial** se  $\pi = \langle p_1 \rangle$ .
- Seja  $\pi$  um caminho que termina em um pixel  $p$  e  $(p, q) \in \mathcal{A}$ , então  $\pi \cdot \langle p, q \rangle$  é dito o caminho resultante da concatenação de  $\pi$  e  $\langle p, q \rangle$  com as duas instâncias de  $p$  se fundindo em uma.
- Um pixel  $q$  é dito **conexo** a um pixel  $p$  se existir um caminho de  $p$  a  $q$  em  $G = (\mathcal{D}_I, \mathcal{A})$ .



# Funções de conectividade

Caminhos no grafo

Funções de conectividade

Caminho Ótimo

Transformada

Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas

podem ser

resolvidos?

Floresta de

espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos

caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de

prioridade

- Uma função de conectividade  $f(\pi)$  associa um valor escalar a qualquer caminho no grafo  $G = (\mathcal{D}_I, \mathcal{A})$ , com base em propriedades da imagem ao longo deste caminho.
- Em segmentação, por exemplo, propriedades locais da imagem (vetor de atributos) e globais do objeto desejado (textura, cor e forma) podem ser exploradas no cálculo de  $f(\pi)$  para indicar a força de conectividade entre seus nós terminais através do caminho  $\pi$ .



# Funções de conexão

As funções de conexão são especificadas por uma regra de inicialização e uma regra de extensão de caminho.

$$f_{\max}(\langle t \rangle) = H(t)$$

$$f_{\max}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \max\{f_{\max}(\pi_s), w(s, t)\} \quad (1)$$

$$f_{\text{sum}}(\langle t \rangle) = H(t)$$

$$f_{\text{sum}}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = f_{\text{sum}}(\pi_s) + w(s, t) \quad (2)$$

$$f_{\text{euc}}(\langle t \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \in \mathcal{S} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{\text{euc}}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \|t - R(s)\|^2 \quad (3)$$

onde  $H(t)$  é um valor inicial,  $R(s) = \text{org}(\pi_s)$ ,  $w(s, t)$  é um peso de arco ( $w(s, t) \geq 0$  em  $f_{\text{sum}}$ ), e  $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_I$  é um conjunto de sementes.

Caminhos no grafo

Funções de conexão

Caminho Ótimo

Transformada

Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas

podem ser

resolvidos?

Floresta de

espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos

caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de

prioridade



# Funções de conexidade

Caminhos no grafo

Funções de conexidade

Caminho Ótimo

Transformada

Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas

podem ser

resolvidos?

Floresta de

espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos

caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de

prioridade

As funções  $f_{\max}$  e  $f_{\text{sum}}$  são casos particulares de funções  $f_{mi}$  monotonicamente incrementais.

$$\begin{aligned} f_{mi}(\langle t \rangle) &= H(t), \\ f_{mi}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) &= f_{mi}(\pi_s) \odot (s, t), \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $\odot : \mathcal{V} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$  é uma operação binária entre o valor de um caminho e um arco que satisfaz as condições:

- **(M1)**  $a \geq b \Rightarrow a \odot (s, t) \geq b \odot (s, t)$ ,
- **(M2)**  $a \odot (s, t) \geq a$ ,

para  $a, b \in \mathcal{V}$  e quaisquer arcos  $(s, t) \in \mathcal{A}$ . Uma característica essencial deste modelo de função é que  $\odot$  depende apenas do valor de  $\pi_s$ , e não de qualquer outra propriedade deste caminho.



# Caminho Ótimo

Caminhos no grafo  
Funções de  
conexidade

**Caminho Ótimo**

Transformada  
Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

Floresta de  
espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos  
caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de  
prioridade

- Um caminho  $\pi_t$  é **ótimo** se  $f(\pi_t) \leq f(\tau_t)$  para qualquer outro caminho  $\tau_t$ , independentemente de sua raiz.
- Para cada nó  $t \in \mathcal{D}_I$ , temos um valor único  $V(t)$  que armazena o valor de um caminho ótimo com término em  $t$ :

$$V(t) = \min_{\forall \pi_t \in (\mathcal{D}_I, \mathcal{A})} \{f(\pi_t)\}. \quad (5)$$



# Transformada Imagem-Floresta

Caminhos no grafo

Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo

Transformada  
Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

Floresta de  
espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos  
caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de  
prioridade

A transformada imagem-floresta (IFT - *Image Foresting Transform*) reduz problemas de processamento de imagem baseados em conexidade ao cálculo:

- de uma **floresta de caminhos ótimos** no grafo derivado da imagem,
- seguido de um pós-processamento simples de atributos da floresta resultante.



# Motivação

Caminhos no grafo  
Funções de  
conexidade  
Caminho Ótimo  
Transformada  
Imagem-Floresta

## Motivação

Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?  
Floresta de  
espalhamento  
Algoritmo da IFT  
Algoritmo da IFT  
Propagação dos  
caminhos  
Resolvendo empates  
Estrutura da fila de  
prioridade

- **Unificação:** Vários operadores de imagem são derivados de um algoritmo geral. Isto favorece
  - ◆ implementações baseadas em hardware,
  - ◆ compreender a relação entre alguns operadores de imagem,
  - ◆ possíveis extensões



# Motivação

Caminhos no grafo  
Funções de  
conexidade  
Caminho Ótimo  
Transformada  
Imagem-Floresta

## Motivação

Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?  
Floresta de  
espalhamento  
Algoritmo da IFT  
Algoritmo da IFT  
Propagação dos  
caminhos  
Resolvendo empates  
Estrutura da fila de  
prioridade

- **Eficiência:** A maioria dos operadores de imagem podem ser implementados em tempo linear e otimizações adicionais são possíveis com cálculo diferencial, e paralelo, e para algumas aplicações específicas.
- **Simplicidade:** Os operadores de imagem são reduzidos a escolha de poucos parâmetros no algoritmo da IFT e um processamento local de sua saída.



# Quais problemas podem ser resolvidos?

Caminhos no grafo

Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo

Transformada

Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

Floresta de

espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos

caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de

prioridade

- **Transformadas de distância e operadores relacionados:**  
*Euclidean distance transform, multiscale skeletonization, fractal dimensions, filtragem de formas, shape saliences, descritores de forma, geodesic paths, etc.*
- **Filtragem e segmentação de imagens:**  
*Morphological reconstructions, segmentação via watershed transforms, perseguição de bordas (live wire, riverbed), growcut por autômato celular, e fuzzy-connected components.*
- **Reconhecimento de padrões:**  
*Data clustering e classificação supervisionada de padrões.*



# Floresta de espalhamento

Caminhos no grafo

Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo

Transformada

Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas

podem ser  
resolvidos?

Floresta de  
espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos  
caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de  
prioridade

- Um *mapa de predecessores* é um função  $P$  que atribui para cada nó  $t$  em  $\mathcal{D}_I$  algum outro nó adjacente em  $\mathcal{D}_I$ , ou uma marca distintiva  $nil \notin \mathcal{D}_I$  — caso em que  $t$  é dito ser uma *raiz* do mapa.
- Uma *floresta de espalhamento* “é” um mapa de predecessores que não contém ciclos — isto é, um que leva cada pixel para  $nil$  em um número finito de iterações.
- Para qualquer pixel  $t \in \mathcal{D}_I$ , uma floresta de espalhamento  $P$  define um caminho  $\pi_t^P$  recursivamente como  $\langle t \rangle$  se  $P(t) = nil$  e  $\pi_s^P \cdot \langle s, t \rangle$  se  $P(t) = s \neq nil$ .

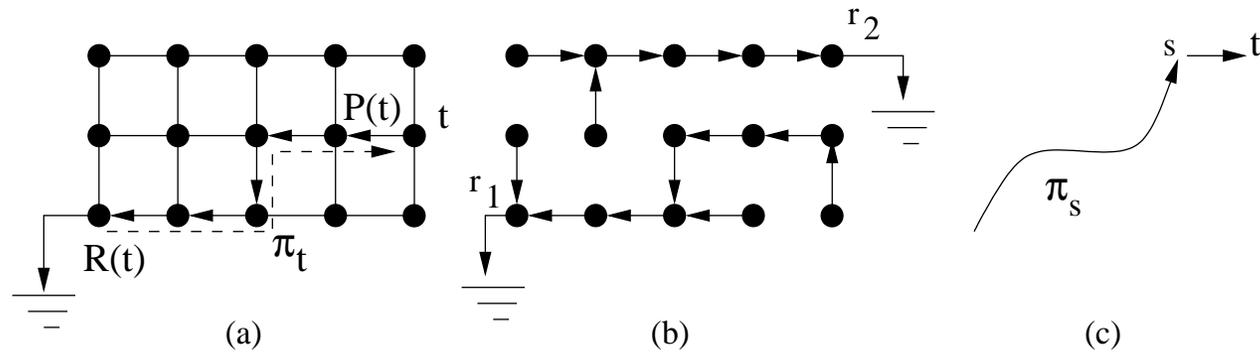


# Floresta de espalhamento

Caminhos no grafo  
Funções de  
conexidade  
Caminho Ótimo  
Transformada  
Imagem-Floresta  
Motivação  
Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

## Floresta de espalhamento

Algoritmo da IFT  
Algoritmo da IFT  
Propagação dos  
caminhos  
Resolvendo empates  
Estrutura da fila de  
prioridade



- O predecessor  $P(t)$  de cada nó  $t$  leva a um nó raiz  $R(t)$  e  $P(R(t)) = nil$ .
- Um caminho  $\pi_t$  é *trivial* quando  $\pi_t = \langle t \rangle$  (i.e.,  $P(t) = nil$ ).



# Transformada Imagem-Floresta

Caminhos no grafo  
Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo  
Transformada  
Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

Floresta de  
espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos  
caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de  
prioridade

A IFT essencialmente generaliza o algoritmo de Dijkstra para funções de conectividade mais gerais.



# Transformada Imagem-Floresta

Caminhos no grafo

Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo

Transformada  
Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

Floresta de  
espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos  
caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de  
prioridade

Para uma dada função de custo de caminho  $f$ :

- **Caminho hereditariamente ótimo:** Um caminho  $\pi_{t_n} = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$  é *hereditariamente ótimo* se todos caminhos  $\pi_{t_i} = \langle t_1, t_2, \dots, t_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são caminhos ótimos.
- **Função de caminho monotônica:** A função  $f$  é *monotônica* se para qualquer caminho  $\pi_{t_n} = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$  em  $G$  temos que  $f(\langle t_1, \dots, t_i \rangle) \leq f(\langle t_1, \dots, t_j \rangle)$  sempre que  $i \leq j \leq n$ .
- **Propriedade de substituição:** A função  $f$  tem a propriedade de substituição se para quaisquer caminhos  $\pi_s$  e  $\pi'_s$  terminando em  $s$  tal que  $f(\pi_s) = f(\pi'_s)$ , temos que  $f(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = f(\pi'_s \cdot \langle s, t \rangle)$ , para qualquer  $s \in \mathcal{D}_I$  e  $\langle s, t \rangle \in \mathcal{A}$ .



# Transformada Imagem-Floresta

Caminhos no grafo

Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo

Transformada  
Imagem-Floresta

Motivação

Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

Floresta de  
espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos  
caminhos

Resolvendo empates

Estrutura da fila de  
prioridade

Para um dado grafo de imagem  $G = \langle \mathcal{D}_I, \mathcal{A} \rangle$ , considere uma função de caminho monotônica  $f$  com a propriedade de substituição. Seja  $\mathcal{O}$  o conjunto de todos pixels  $t \in \mathcal{D}_I$ , tal que existe um caminho hereditariamente ótimo  $\pi_t$  para  $f$ . Em qualquer floresta de espalhamento  $P$  calculada em  $G$  pelo algoritmo da IFT para  $f$ , todos os caminhos  $\tau_t^P$  com  $t \in \mathcal{O}$  são caminhos ótimos.



# Algoritmo da IFT

Caminhos no grafo  
 Funções de  
 conectividade  
 Caminho Ótimo  
 Transformada  
 Imagem-Floresta  
 Motivação  
 Quais problemas  
 podem ser  
 resolvidos?  
 Floresta de  
 espalhamento

## Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT  
 Propagação dos  
 caminhos  
 Resolvendo empates  
 Estrutura da fila de  
 prioridade

### Algoritmo 1 — ALGORITMO GERAL DA IFT COM DESEMPATE FIFO

ENTRADA: Imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, \vec{I})$ , adjacência  $\mathcal{A}$ , e função de conectividade  $f$ .

SAÍDA: Imagens  $\hat{P} = (\mathcal{D}_I, P)$  de predecessores, e  $\hat{V} = (\mathcal{D}_I, V)$  de conectividade.

AUXILIARES: Fila de prioridade  $Q$  com política de desempate FIFO, variável  $tmp$ , e vetor de *estado* inicialmente zerado.

1. Para Cada  $t \in \mathcal{D}_I$ , Faça  $P(t) \leftarrow nil$  e  $V(t) \leftarrow f(\langle t \rangle)$ . Se  $V(t) \neq +\infty$ , Então insira  $t$  em  $Q$ .
2. Enquanto  $Q \neq \emptyset$ , Faça
  3. Remova um pixel  $s$  de  $Q$  cujo valor  $V(s)$  seja mínimo.
  4.  $estado(s) \leftarrow 1$ .
  5. Para Cada  $t \in \mathcal{A}(s)$ , tal que  $estado(t) = 0$ , Faça
    6.  $tmp \leftarrow f(\pi_s^P \cdot \langle s, t \rangle)$ .
    7. Se  $tmp < V(t)$ , Então
      8. Se  $V(t) \neq +\infty$ , Então remova  $t$  de  $Q$ .
      9.  $P(t) \leftarrow s$ ,  $V(t) \leftarrow tmp$ , e insira  $t$  em  $Q$ .



# Algoritmo da IFT

Caminhos no grafo  
 Funções de  
 conectividade  
 Caminho Ótimo  
 Transformada  
 Imagem-Floresta  
 Motivação  
 Quais problemas  
 podem ser  
 resolvidos?  
 Floresta de  
 espalhamento  
 Algoritmo da IFT  
**Algoritmo da IFT**  
 Propagação dos  
 caminhos  
 Resolvendo empates  
 Estrutura da fila de  
 prioridade

## Algoritmo 2 — ALGORITMO GERAL DA IFT COM DESEMPATE LIFO

ENTRADA: Imagem  $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, \vec{I})$ , adjacência  $\mathcal{A}$ , e função de conectividade  $f$ .

SAÍDA: Imagens  $\hat{P} = (\mathcal{D}_I, P)$  de predecessores, e  $\hat{V} = (\mathcal{D}_I, V)$  de conectividade.

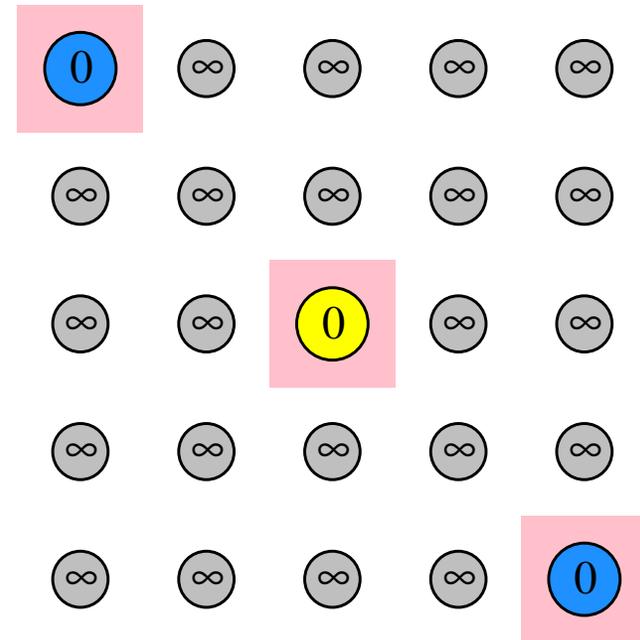
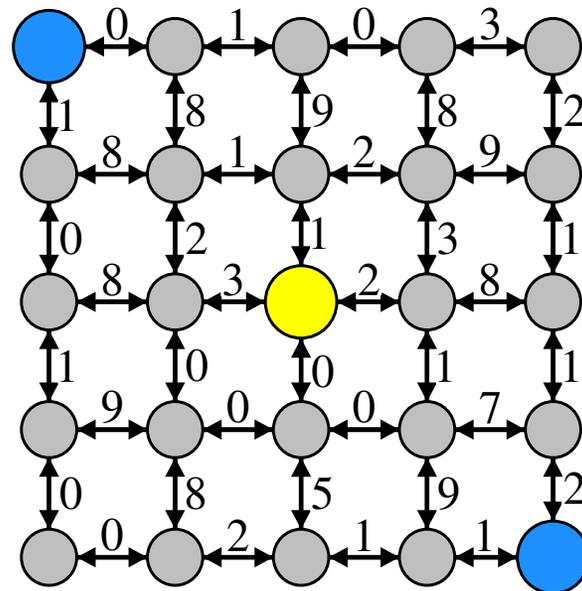
AUXILIARES: Fila de prioridade  $Q$  com política de desempate LIFO, variável  $tmp$ , e vetor de *estado* inicialmente zerado.

1. Para Cada  $t \in \mathcal{D}_I$ , Faça  $P(t) \leftarrow nil$  e  $V(t) \leftarrow f(\langle t \rangle)$ . Se  $V(t) \neq +\infty$ , Então insira  $t$  em  $Q$ .
2. Enquanto  $Q \neq \emptyset$ , Faça
  3. Remova um pixel  $s$  de  $Q$  cujo valor  $V(s)$  seja mínimo.
  4.  $estado(s) \leftarrow 1$ .
  5. Para Cada  $t \in \mathcal{A}(s)$ , tal que  $estado(t) = 0$ , Faça
    6.  $tmp \leftarrow f(\pi_s^P \cdot \langle s, t \rangle)$ .
    7. Se  $tmp \leq V(t)$ , Então
      8. Se  $V(t) \neq +\infty$ , Então remova  $t$  de  $Q$ .
      9.  $P(t) \leftarrow s$ ,  $V(t) \leftarrow tmp$ , e insira  $t$  em  $Q$ .



# Propagação dos caminhos

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade



# Propagação dos caminhos

Caminhos no grafo  
Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo  
Transformada  
Imagem-Floresta

Motivação  
Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

Floresta de  
espalhamento

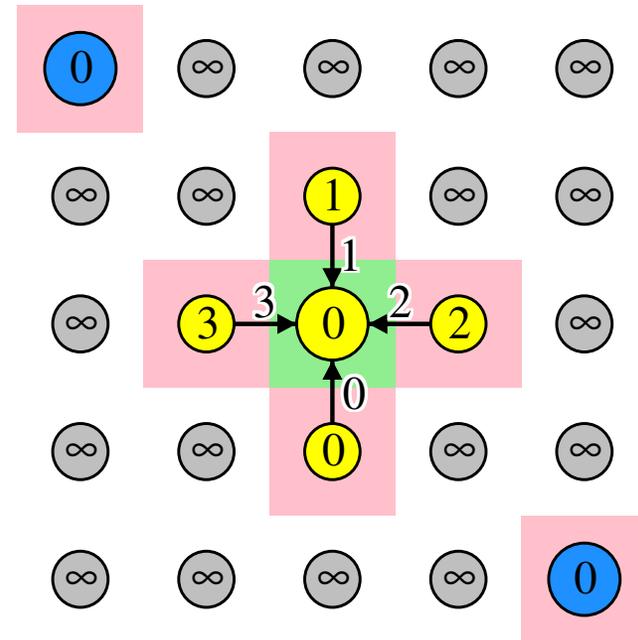
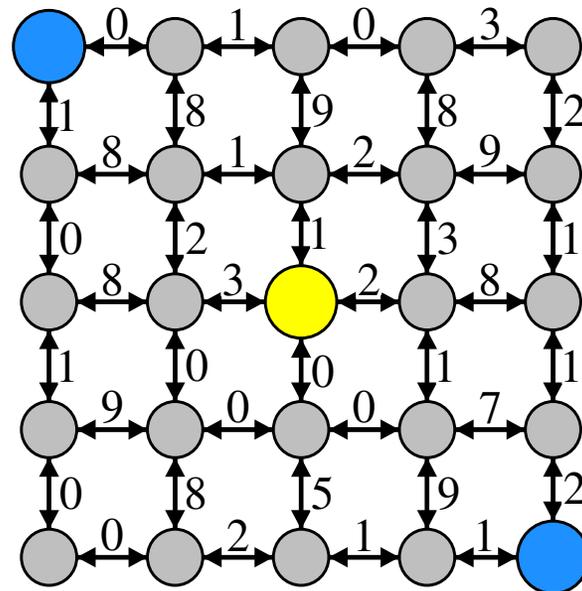
Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos  
caminhos

Resolvendo empates  
Estrutura da fila de  
prioridade

IFT com função de conexidade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



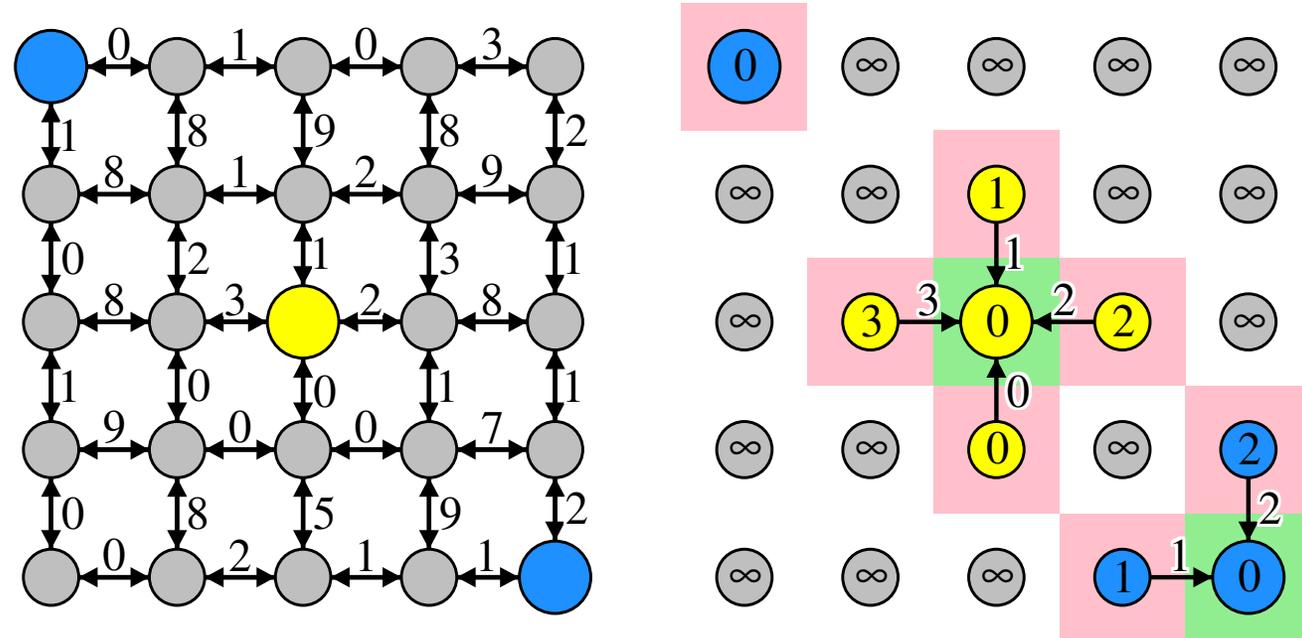
após 1 iteração.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



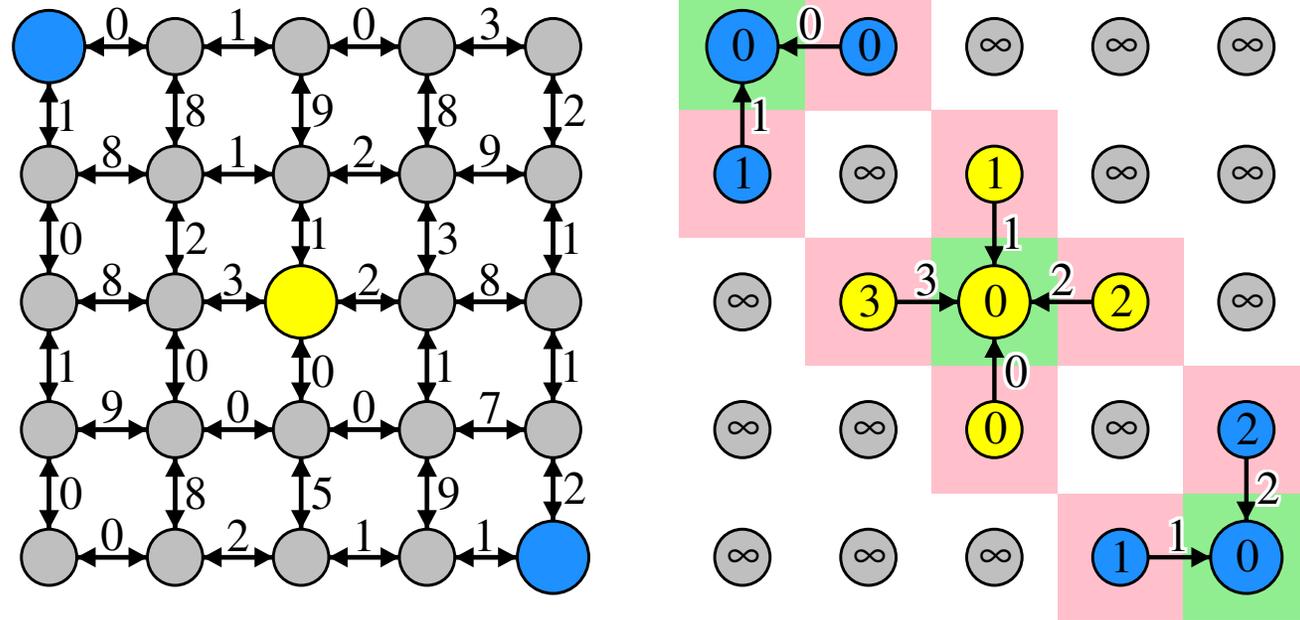
após 2 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



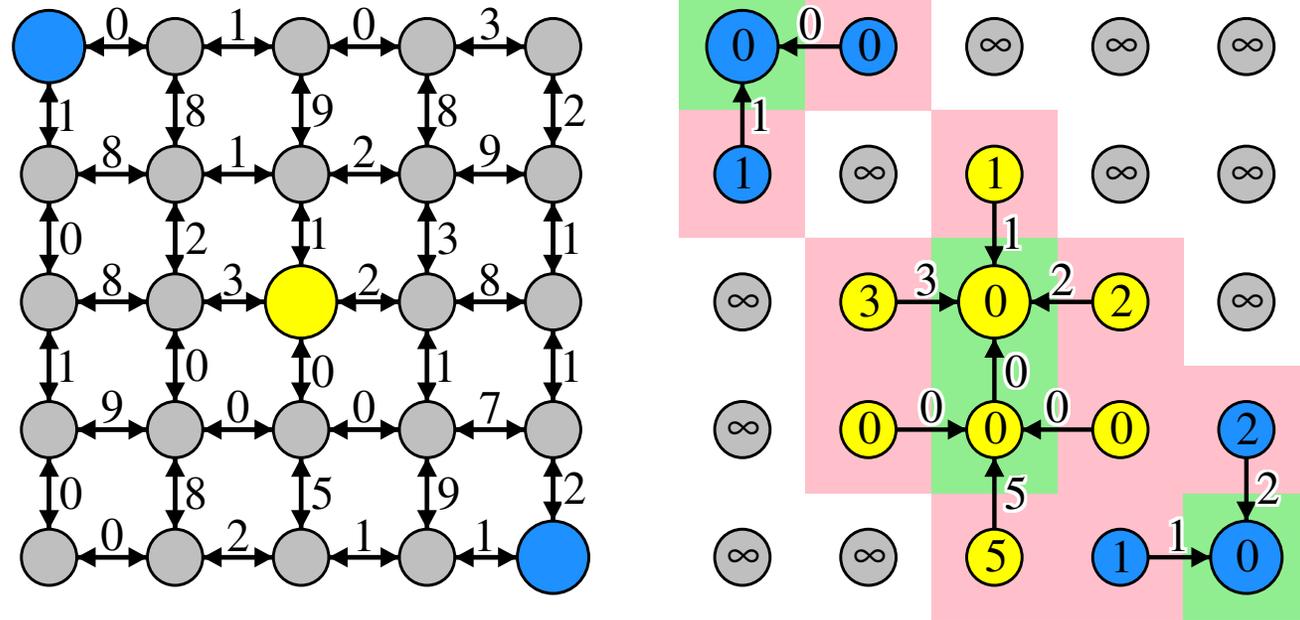
após 3 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



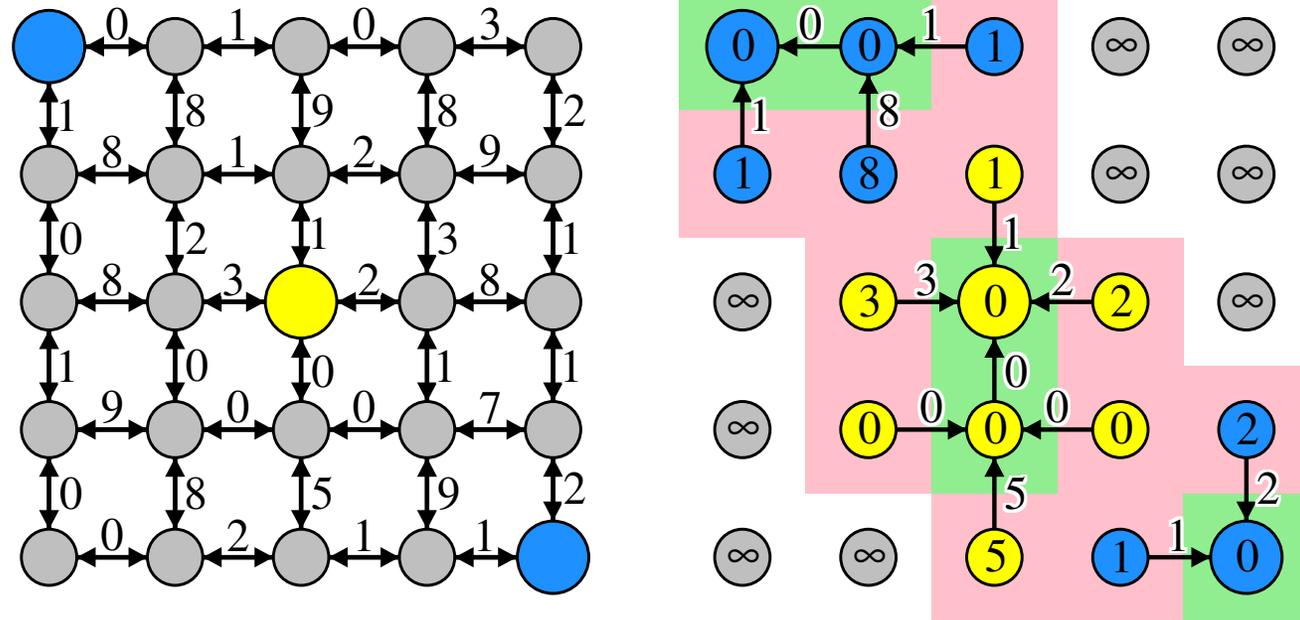
após 4 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



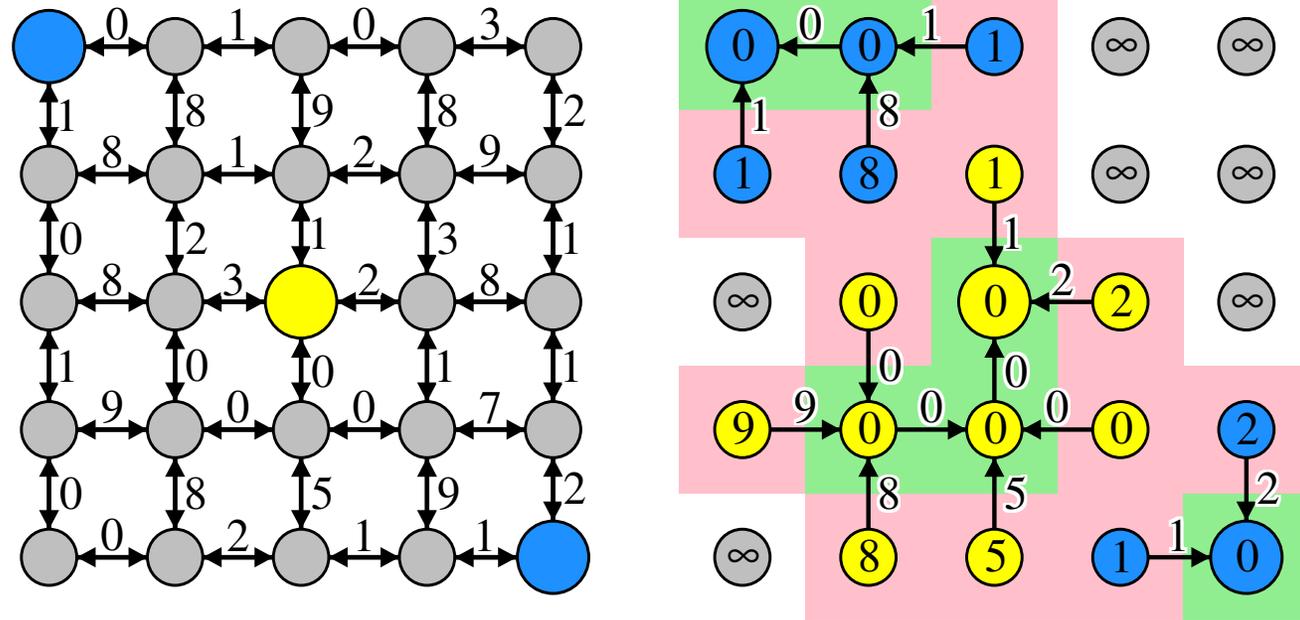
após 5 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



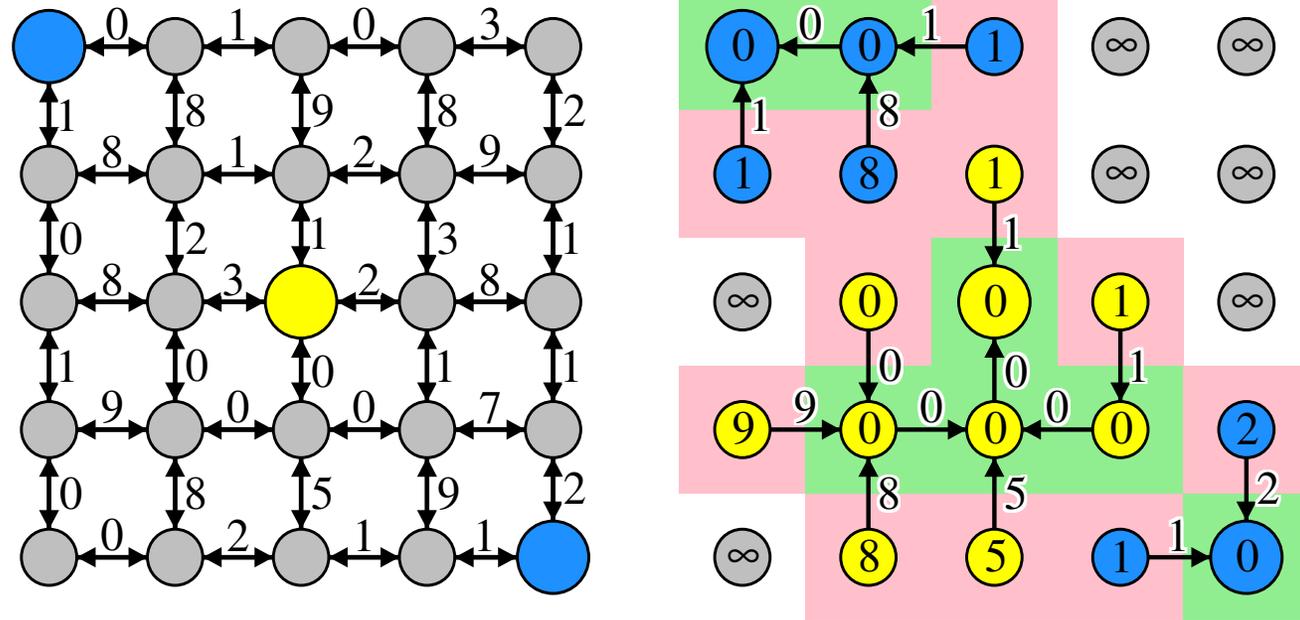
após 6 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



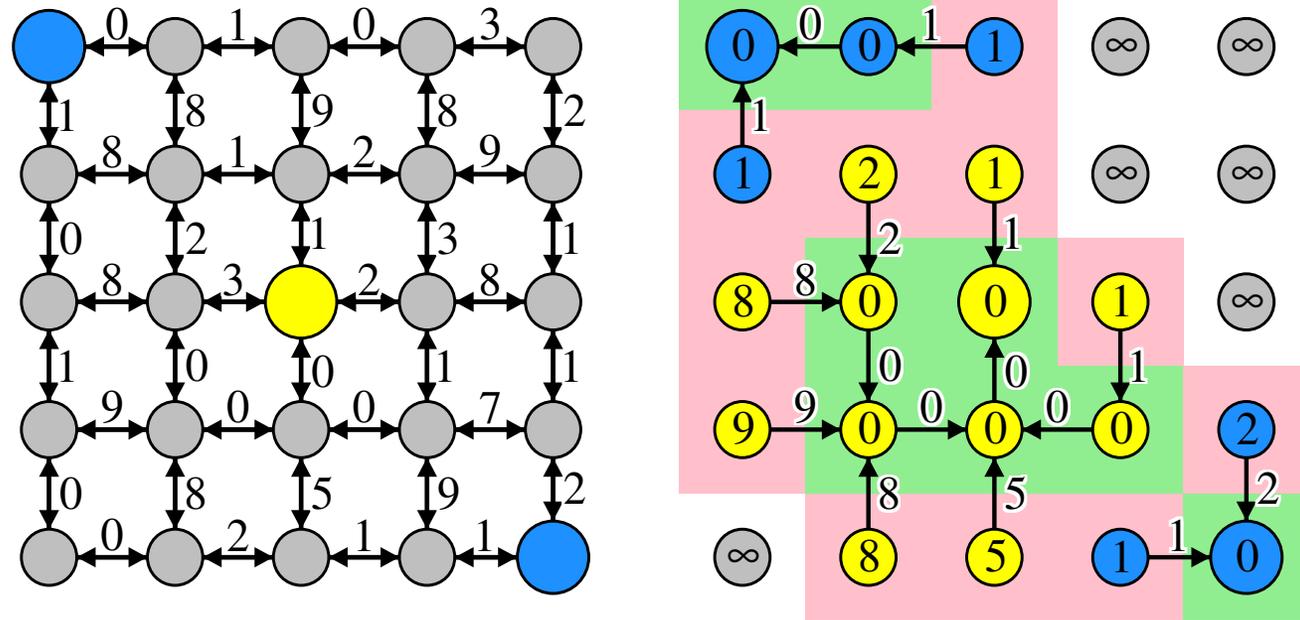
após 7 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



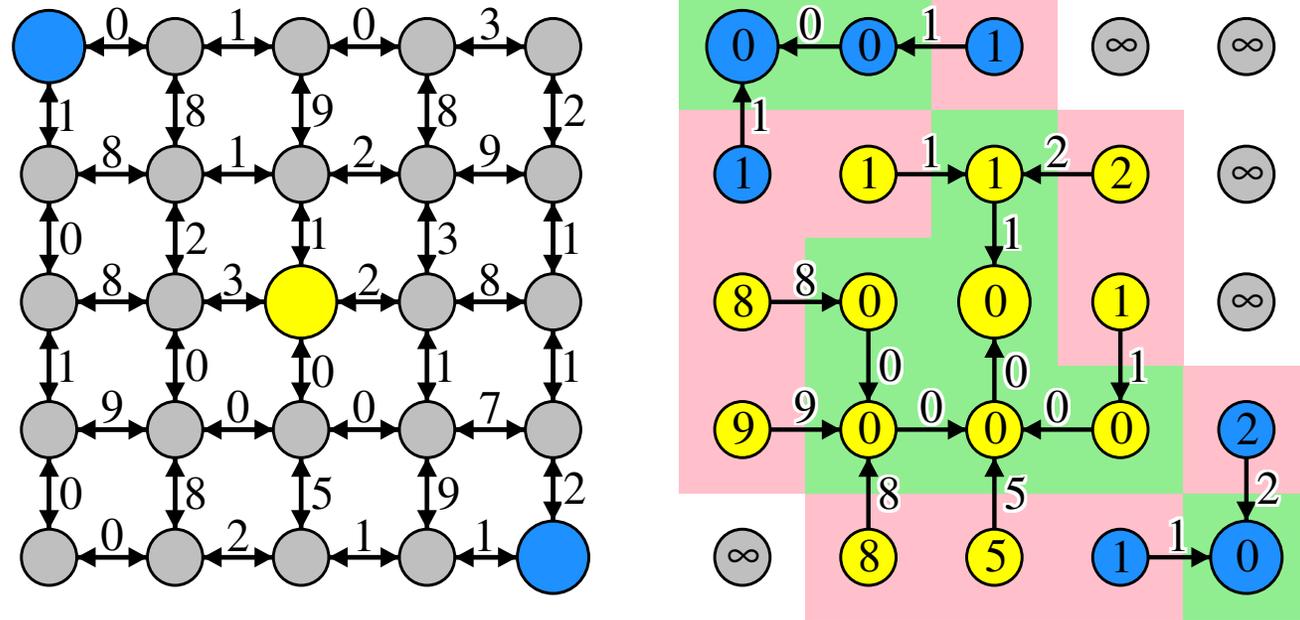
após 8 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



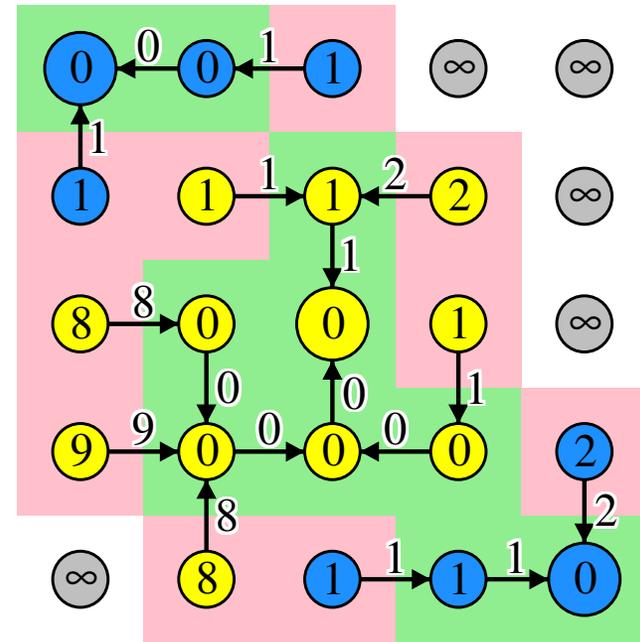
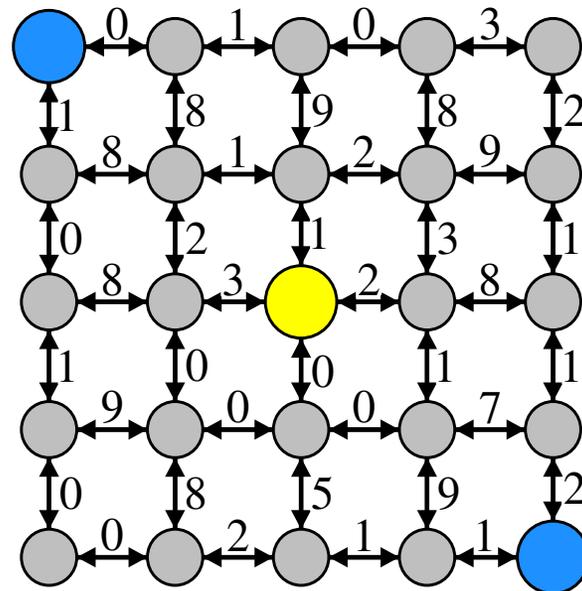
após 9 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



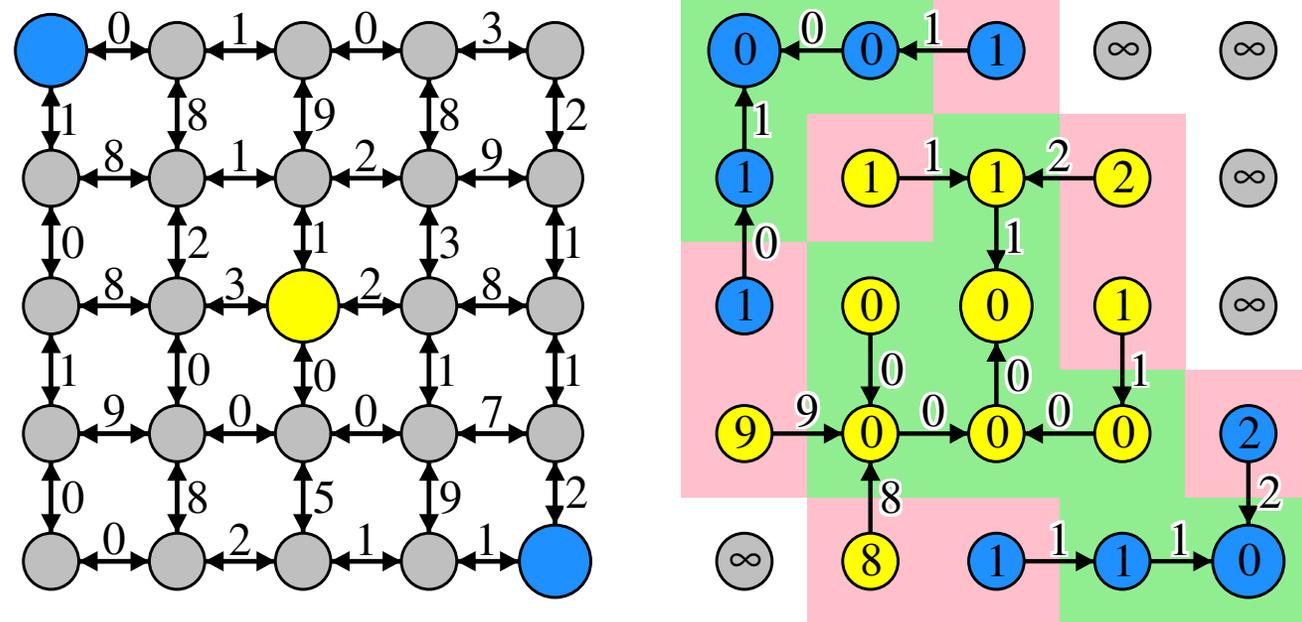
após 10 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



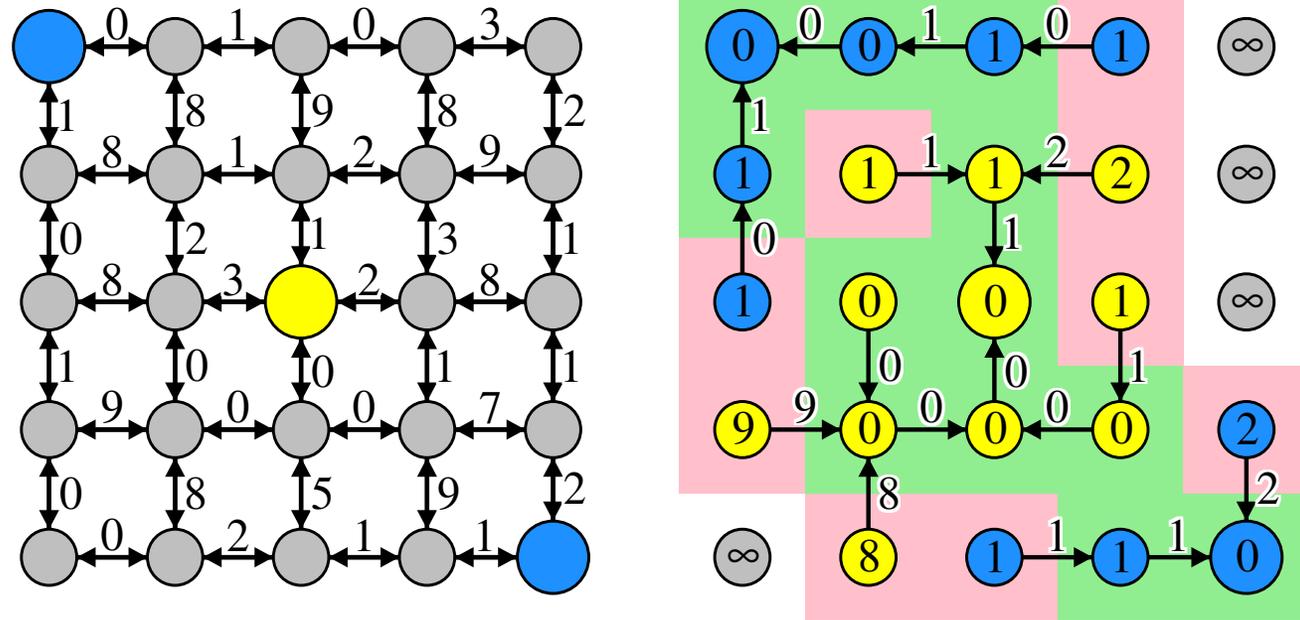
após 11 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



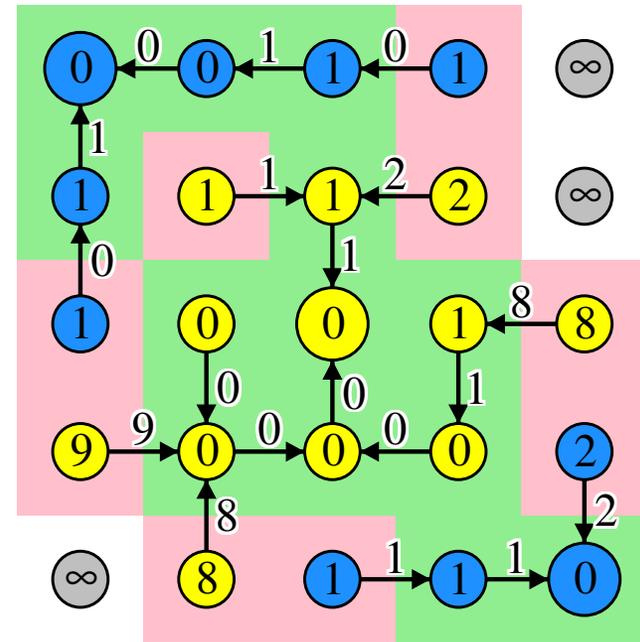
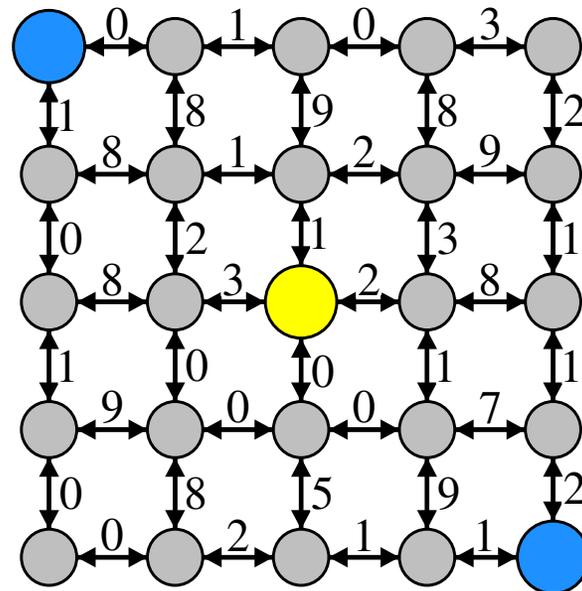
após 12 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



após 13 iterações.



# Propagação dos caminhos

Caminhos no grafo  
Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo  
Transformada  
Imagem-Floresta

Motivação  
Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

Floresta de  
espalhamento

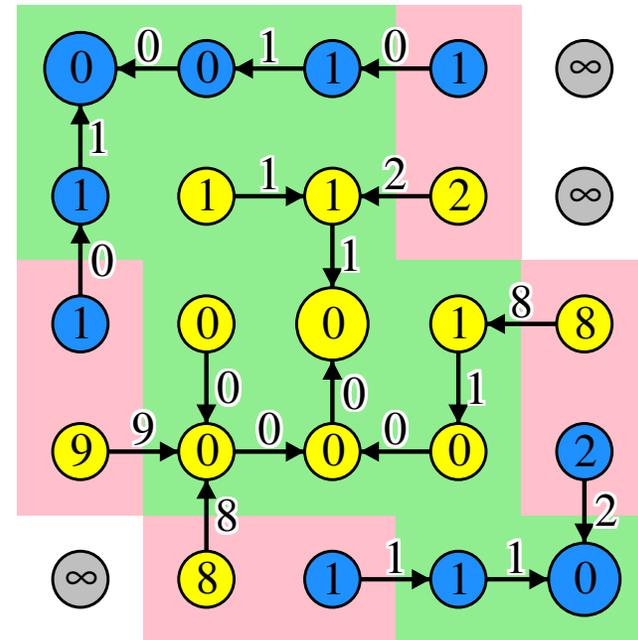
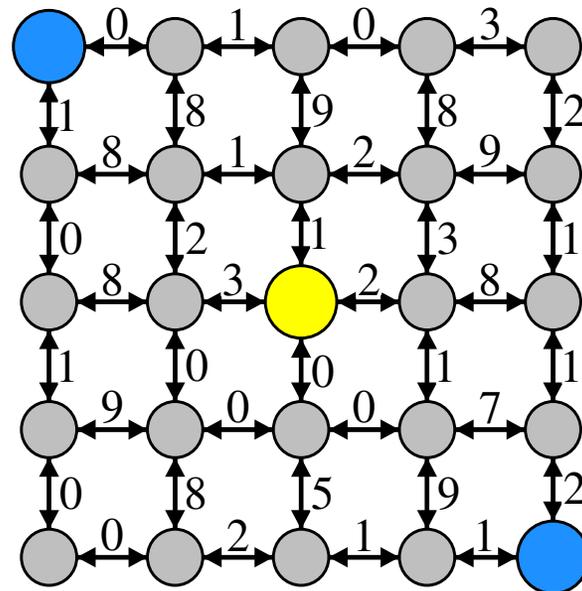
Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos  
caminhos

Resolvendo empates  
Estrutura da fila de  
prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



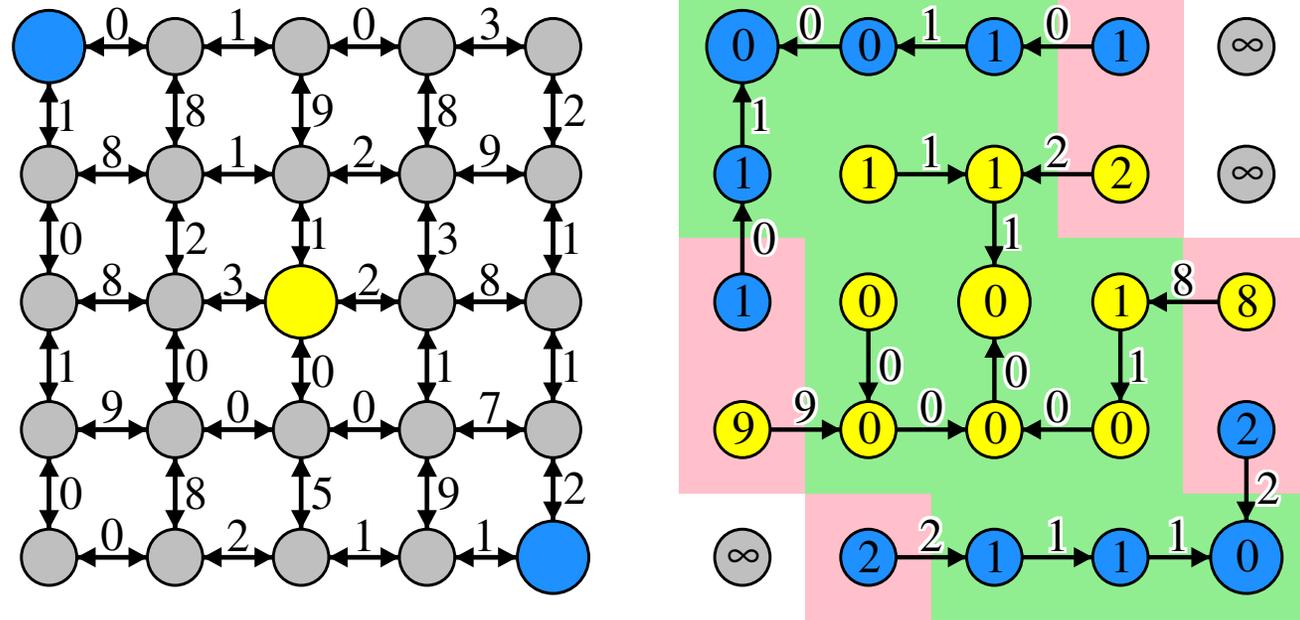
após 14 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



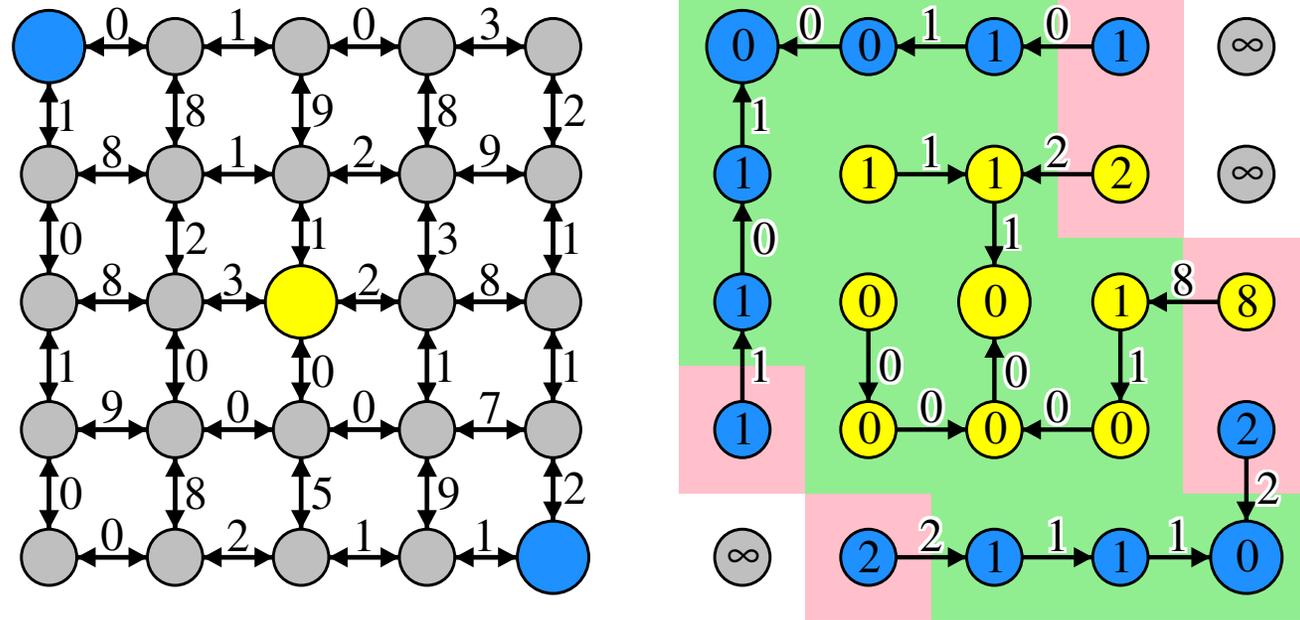
após 15 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



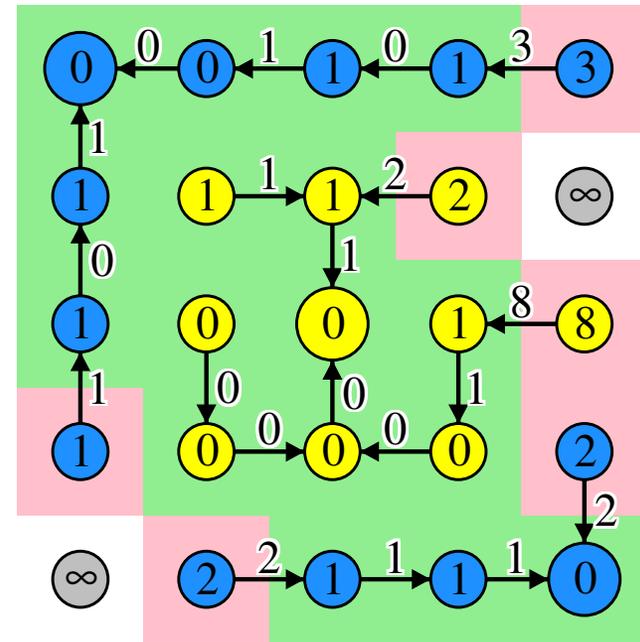
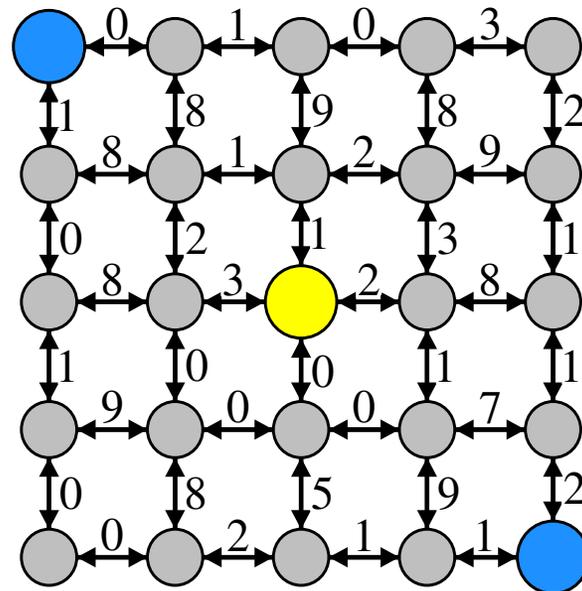
após 16 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



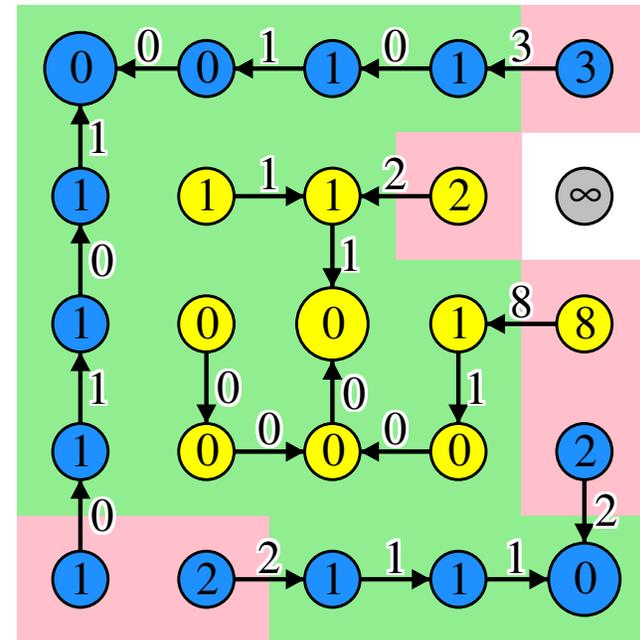
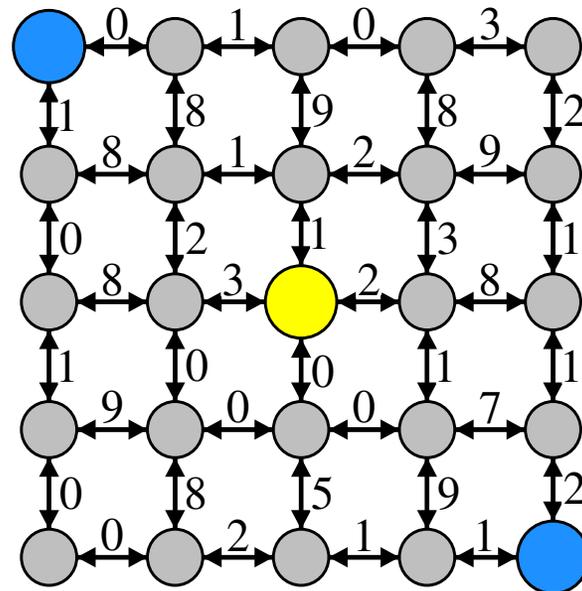
após 17 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



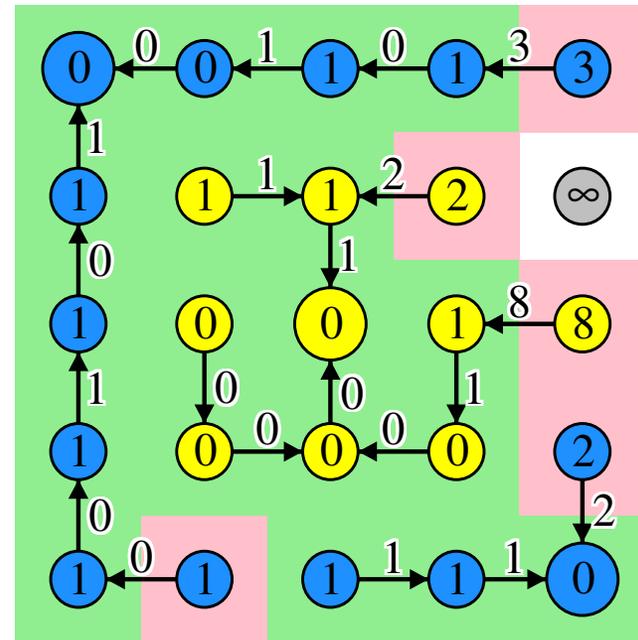
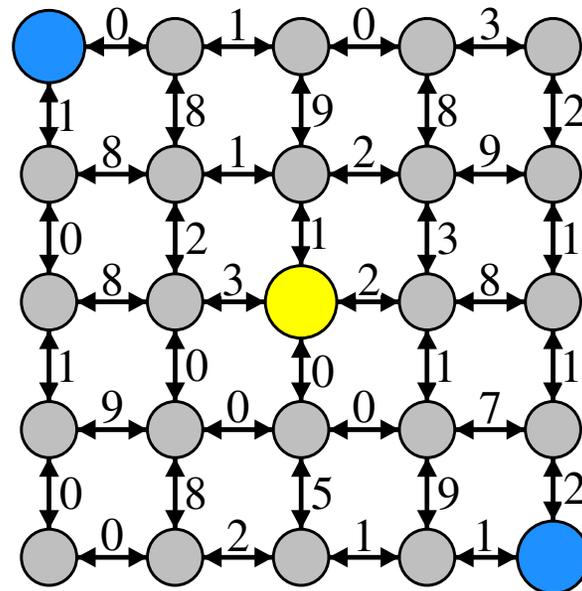
após 18 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{max}$  (desempate FIFO):



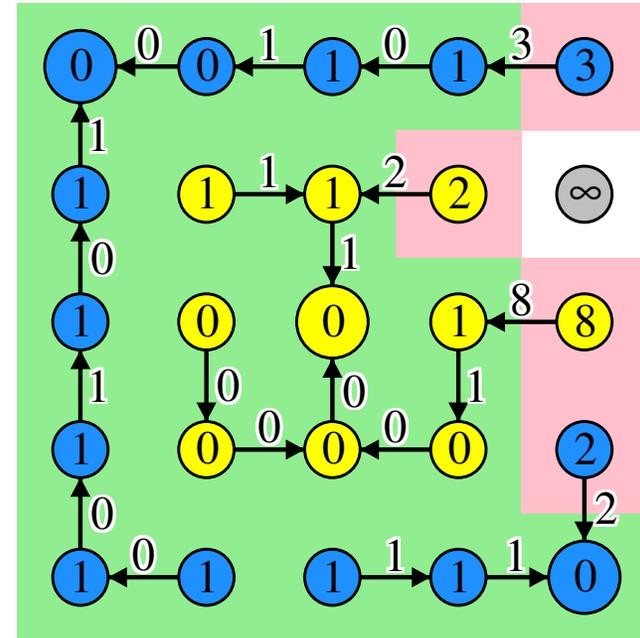
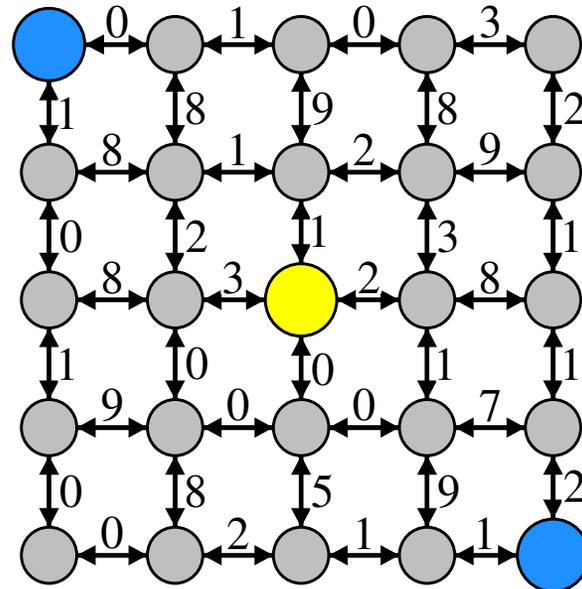
após 19 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



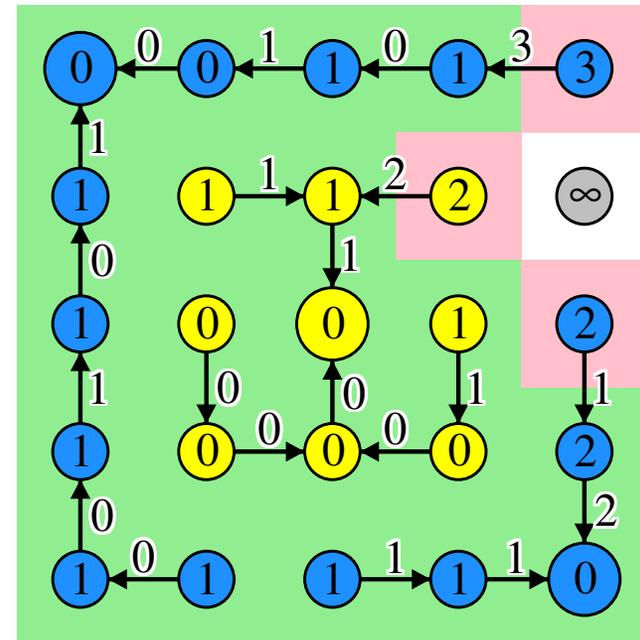
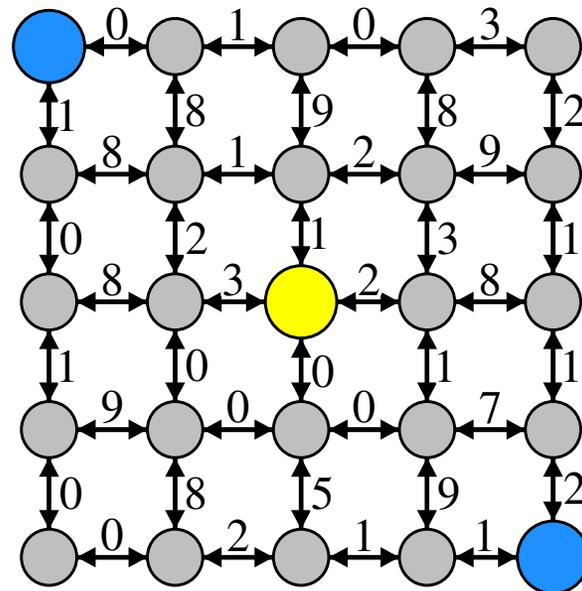
após 20 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



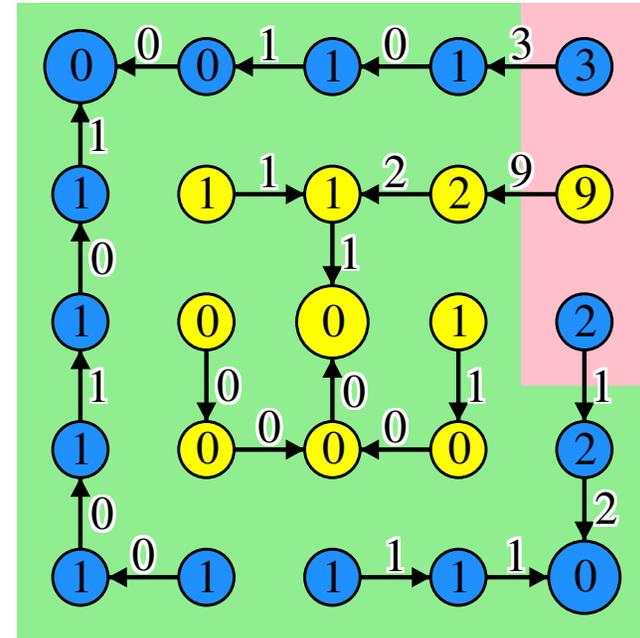
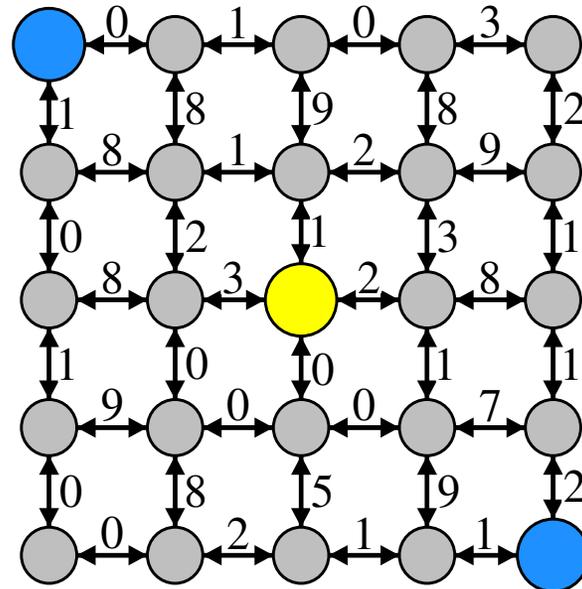
após 21 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



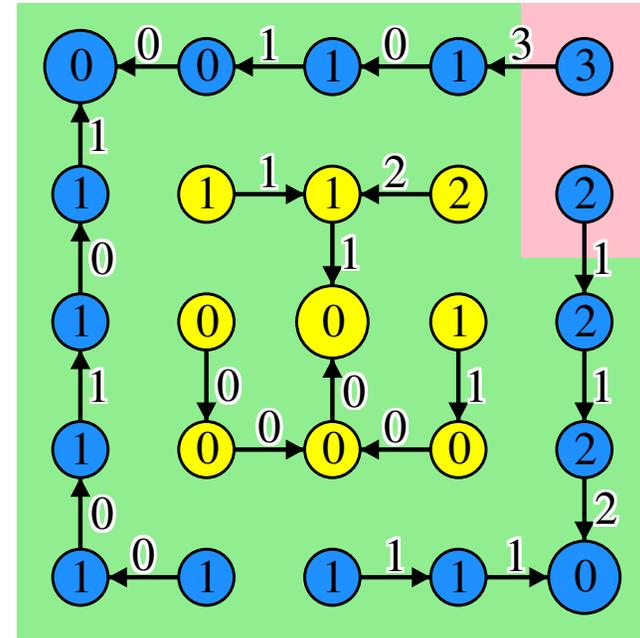
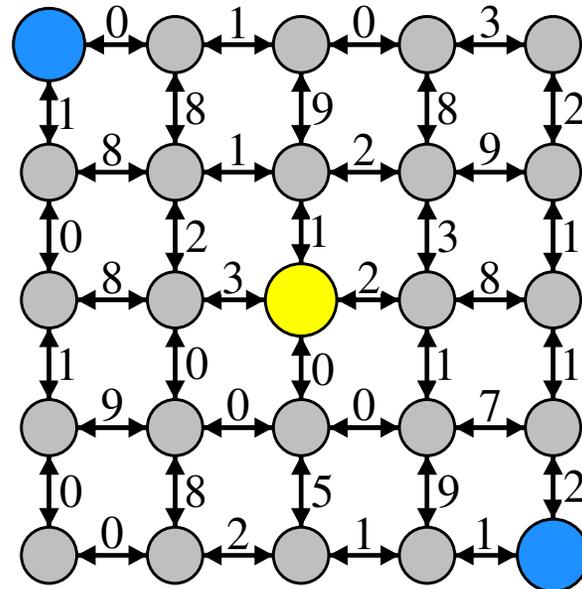
após 22 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



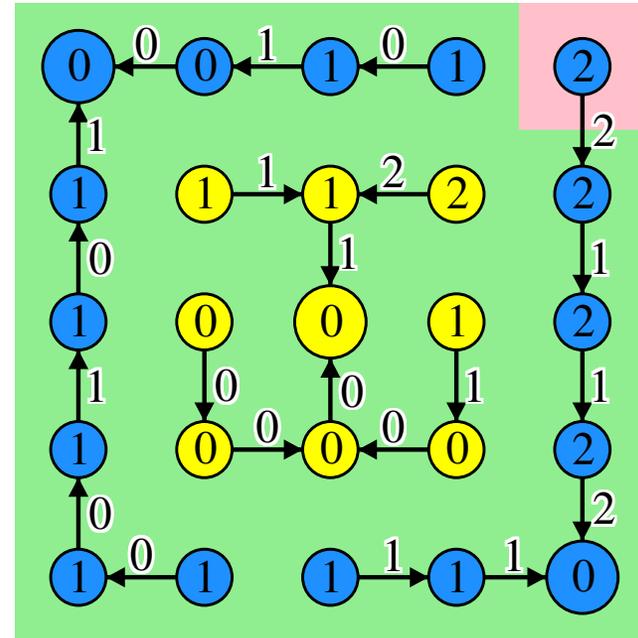
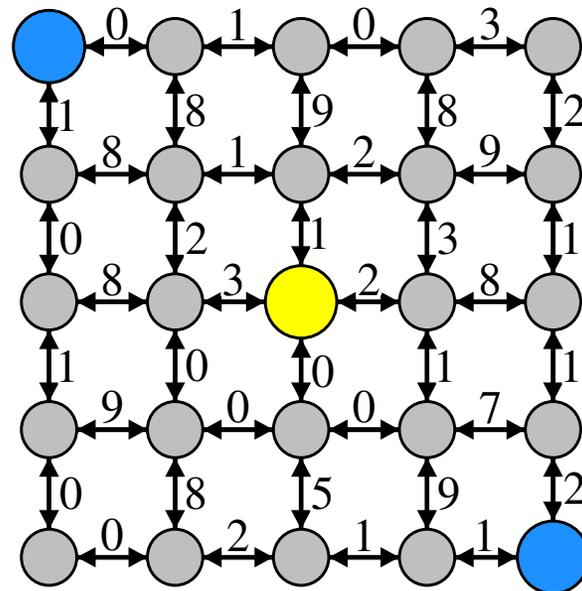
após 23 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):



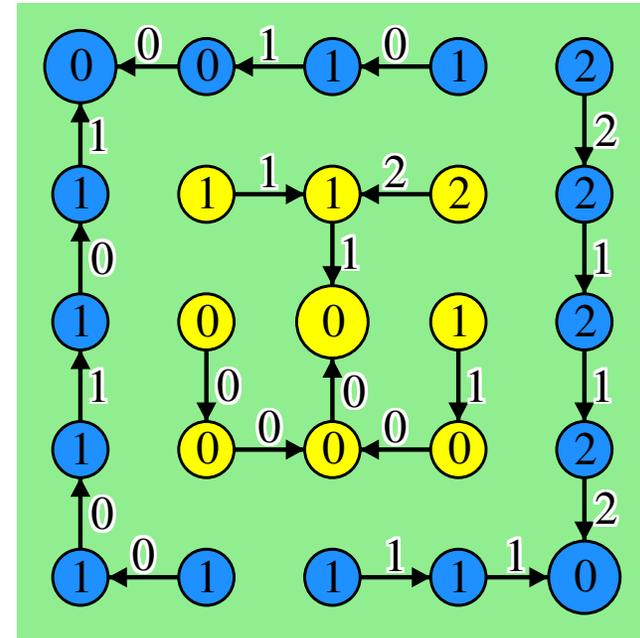
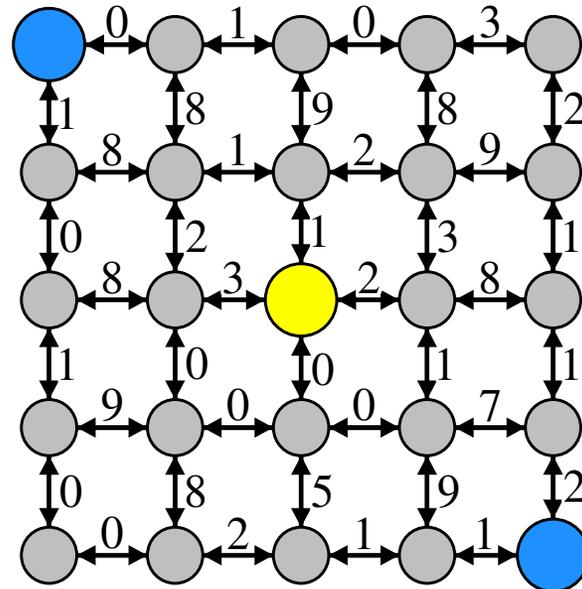
após 24 iterações.



# Propagação dos caminhos

- Caminhos no grafo
- Funções de conectividade
- Caminho Ótimo Transformada
- Imagem-Floresta
- Motivação
- Quais problemas podem ser resolvidos?
- Floresta de espalhamento
- Algoritmo da IFT
- Algoritmo da IFT
- Propagação dos caminhos**
- Resolvendo empates
- Estrutura da fila de prioridade

IFT com função de conectividade  $f_{\max}$  (desempate FIFO):

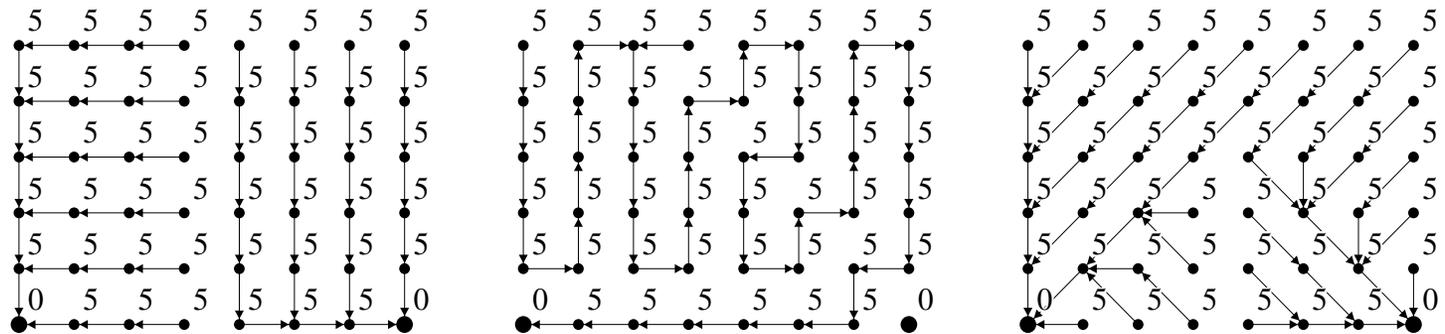


após 25 iterações.



# Resolvendo empates

O que fazer quando um pixel é alcançado por dois ou mais caminhos de mesmo custo?



Exemplos de *tie-breaking*. (a) Política FIFO. (b) Política LIFO. (c) Política FIFO com adjacência vizinhos-8.

Caminhos no grafo  
Funções de  
conexidade

Caminho Ótimo  
Transformada  
Imagem-Floresta

Motivação  
Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?

Floresta de  
espalhamento

Algoritmo da IFT

Algoritmo da IFT

Propagação dos  
caminhos

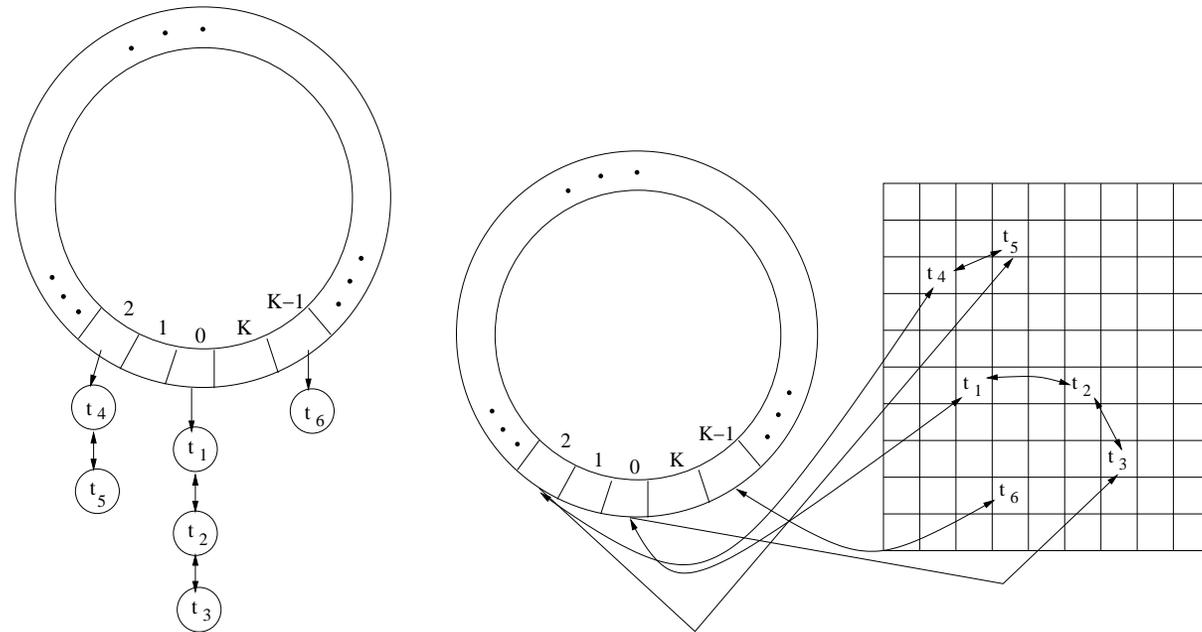
**Resolvendo empates**

Estrutura da fila de  
prioridade



# Estrutura da fila de prioridade

Caminhos no grafo  
Funções de  
conexidade  
Caminho Ótimo  
Transformada  
Imagem-Floresta  
Motivação  
Quais problemas  
podem ser  
resolvidos?  
Floresta de  
espalhamento  
Algoritmo da IFT  
Algoritmo da IFT  
Propagação dos  
caminhos  
Resolvendo empates  
Estrutura da fila de  
prioridade



(a) Estrutura de Dial para a fila Q. (b) Estrutura proposta por Falcão.