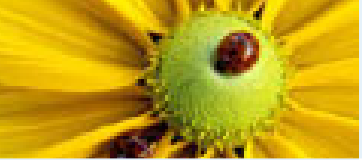


Filtragem Conexa

Prof. Dr. Paulo A. V. de Miranda
Instituto de Matemática e Estatística (IME),
Universidade de São Paulo (USP)
pmiranda@vision.ime.usp.br



Operador conexo

Operador conexo

Filtragem Conexa

Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias

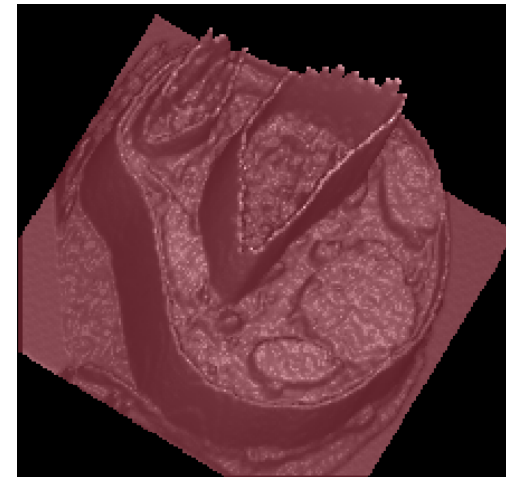
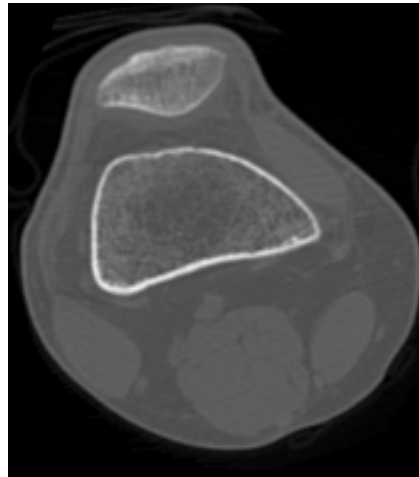
Fechamento por
reconstrução

Transformada de
watershed

Reconstrução
superior e Watershed

Artigo para leitura

Considere uma imagem em níveis de cinza $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$ representada por uma superfície topográfica em que os níveis $I(p)$ indicam a altitude do ponto p no relevo.



Exemplo de imagem de entrada vista como uma superfície topográfica.



Operador conexo

Operador conexo

Filtragem Conexa

Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias

Fechamento por
reconstrução

Transformada de
watershed

Reconstrução
superior e Watershed

Artigo para leitura

- Este relevo possui domos, bacias e platôs.
- Um platô (*flat zone*) neste relevo é um componente conexo maximal, onde todos os pixels possuem o mesmo valor (mesma altitude).
- Um operador ψ é dito conexo se e somente se qualquer par de pixels pertencentes a um dado platô em \hat{I} também pertencem a um mesmo platô em $\psi(\hat{I})$.
- A principal vantagem é que a operação conexa não cria falsas bordas, como a filtragem linear, apenas elimina bordas entre platôs.



Operador conexo

Operador conexo

Filtragem Conexa

Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias

Fechamento por
reconstrução

Transformada de
watershed

Reconstrução

superior e Watershed

Artigo para leitura

Outra forma de visualizar uma operação conexa é através da decomposição por limiar:

- A imagem \hat{I} decomposta por limiar forma um conjunto $\mathcal{T}_{\hat{I}}$ de imagens binárias $\hat{B}_l = (\mathcal{D}_I, B_l), l = 0, 1, \dots, I_{max}$, onde $B_l(p) = 1$ se $I(p) \geq l$, e 0 no caso contrário ($I_{max} = \max_{\forall p \in \mathcal{D}_I} \{I(p)\}$).
- Operadores conexos apenas eliminam ou unem componentes conexos deste conjunto.

Um platô é dito mínimo regional (máximo regional) se a intensidade dos pixels nos platôs vizinhos for estritamente maior (menor) que a intensidade no platô.



Operador conexo

Operador conexo

Filtragem Conexa

Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias

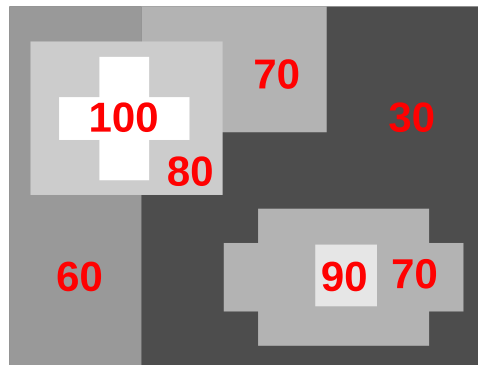
Fechamento por
reconstrução

Transformada de
watershed

Reconstrução
superior e Watershed

Artigo para leitura

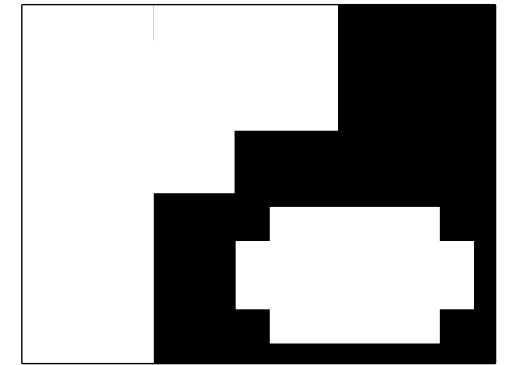
Exemplo de decomposição por limiar:



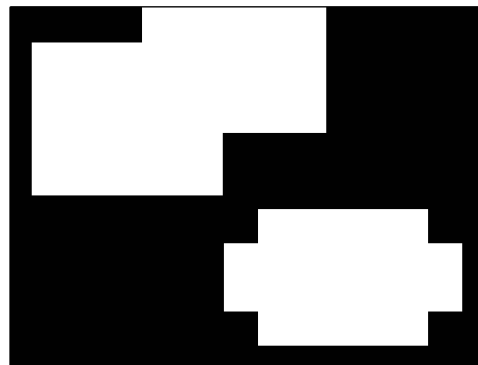
\hat{I}



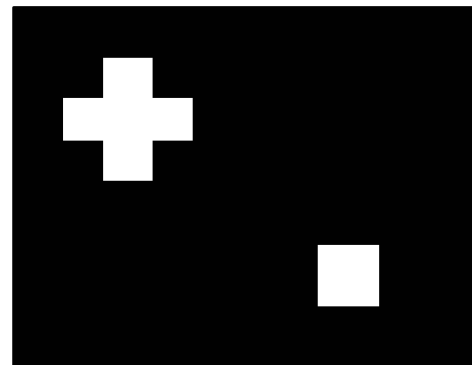
\hat{B}_0



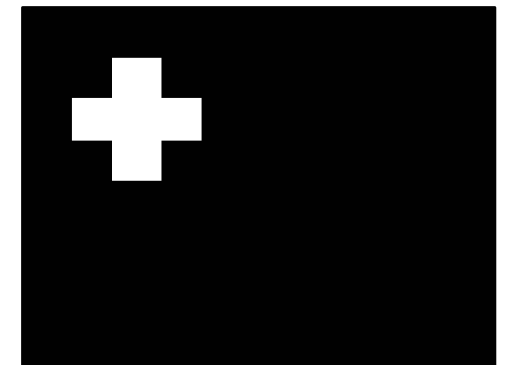
\hat{B}_{60}



\hat{B}_{70}



\hat{B}_{90}



\hat{B}_{100}



Filtragem Conexa

Operador conexo

Filtragem Conexa

Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias

Fechamento por
reconstrução

Transformada de
watershed

Reconstrução
superior e Watershed

Artigo para leitura

Filtros conexos para preenchimento de bacias podem ser obtidos usando a IFT com função de custo de caminho:

$$\begin{aligned}f_{peak}(\langle t \rangle) &= H(t) \\ f_{peak}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) &= \max\{f_{peak}(\pi_s), I(t)\}\end{aligned}$$

onde $H(t) = I(t)$, se $t \in \mathcal{S}$, e $H(q) = +\infty$ no caso contrário.

- O mapa de custo gera uma imagem filtrada \hat{V} , que simplifica a imagem por preencher as bacias não marcadas por \mathcal{S} .
- Diferentes filtros/operadores podem ser obtidos dependendo da escolha das sementes.



Filtragem Conexa

Operador conexo

Filtragem Conexa

Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias

Fechamento por
reconstrução

Transformada de
watershed

Reconstrução
superior e Watershed

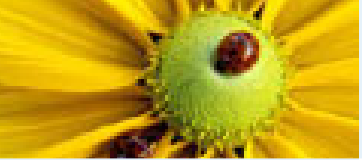
Artigo para leitura

Filtros conexos para preenchimento de bacias podem ser obtidos usando a IFT com função de custo de caminho:

$$f_{peak}(\langle t \rangle) = H(t)$$
$$f_{peak}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \max\{f_{peak}(\pi_s), I(t)\}$$

onde $H(t) = I(t)$, se $t \in \mathcal{S}$, e $H(q) = +\infty$ no caso contrário.

- No caso de política FIFO, existe uma simplificação que pode ser adotada. Quando um pixel p encontra um adjacente q e lhe oferece um caminho de melhor conexidade, este adjacente q nunca foi inserido na fila. Então, não é necessária a remoção da fila para atualização de atributos.



Filtragem Conexa

Operador conexo

Filtragem Conexa

Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias

Fechamento por
reconstrução

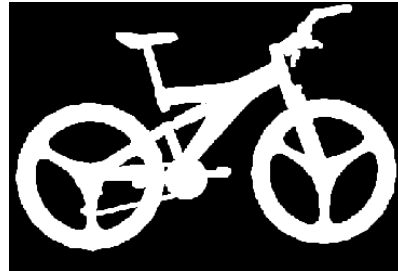
Transformada de
watershed

Reconstrução
superior e Watershed

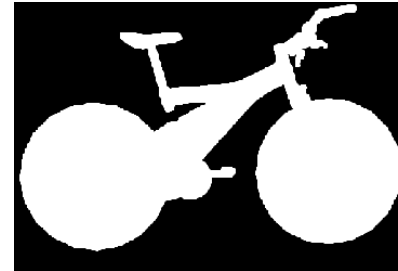
Artigo para leitura

Fechamento de buracos (closing of holes):

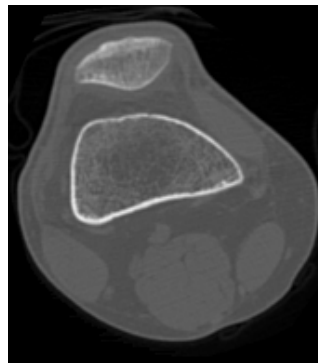
- Caso em que S é a borda da imagem.
- Buracos escuros de objetos claros são preenchidos com brilho claro em \hat{V} .



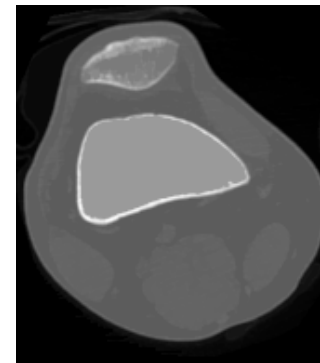
\hat{I}



\hat{V}



\hat{I}



\hat{V}



Filtragem por reconstrução morfológica

Operador conexo
Filtragem Conexa

Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias

Fechamento por
reconstrução

Transformada de
watershed

Reconstrução
superior e Watershed

Artigo para leitura

A reconstrução morfológica é uma operação que envolve duas imagens de entrada, uma máscara $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$ e uma marcadora $\hat{J} = (\mathcal{D}_I, J)$ e um elemento estruturante planar (i.e., relação de adjacência \mathcal{A}). A reconstrução é dita:

- **superior** quando $J(p) \geq I(p)$ para todo $p \in \mathcal{D}_I$, e
- **inferior** quando $J(p) \leq I(p)$ para todo $p \in \mathcal{D}_I$.



Reconstrução superior

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

Dependendo de como a imagem \hat{J} é gerada a partir da imagem \hat{I} , temos origem a diferentes métodos:

■ Filtragem de h-bacias:

- ◆ \hat{J} é obtido somando-se um valor $h > 0$ às intensidades de \hat{I} (i.e., $J(p) = I(p) + h$),
- ◆ preenche bacias de profundidade menor ou igual a h .

■ Fechamento por reconstrução:

- ◆ \hat{J} é obtido aplicando-se em \hat{I} um fechamento morfológico (dilatação seguida de erosão por \mathcal{A}).
- ◆ bacias menores que o elemento estruturante são fechadas.



Reconstrução superior

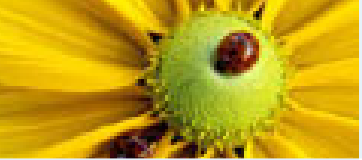
Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

A implementação da reconstrução superior é uma IFT com minimização de V (resultado da reconstrução) usando função f_{rsup} :

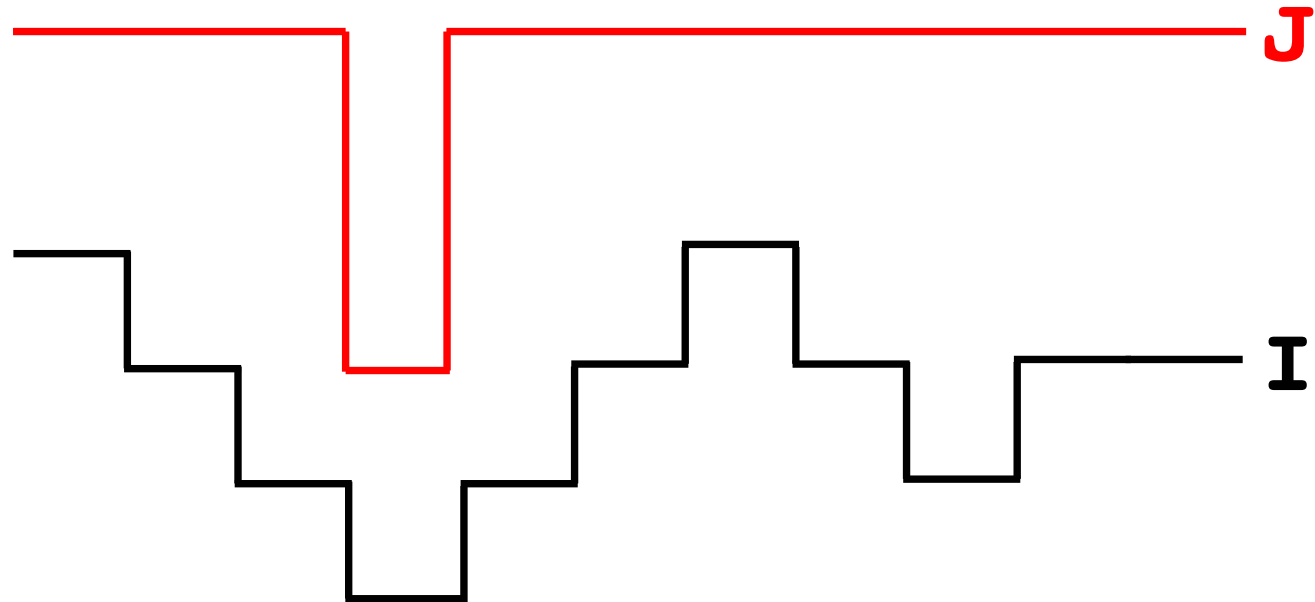
$$f_{rsup}(\langle t \rangle) = J(t)$$
$$f_{rsup}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \max\{f_{rsup}(\pi_s), I(t)\}$$



Reconstrução superior

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior**
- Filtragem de h-bacias
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo:

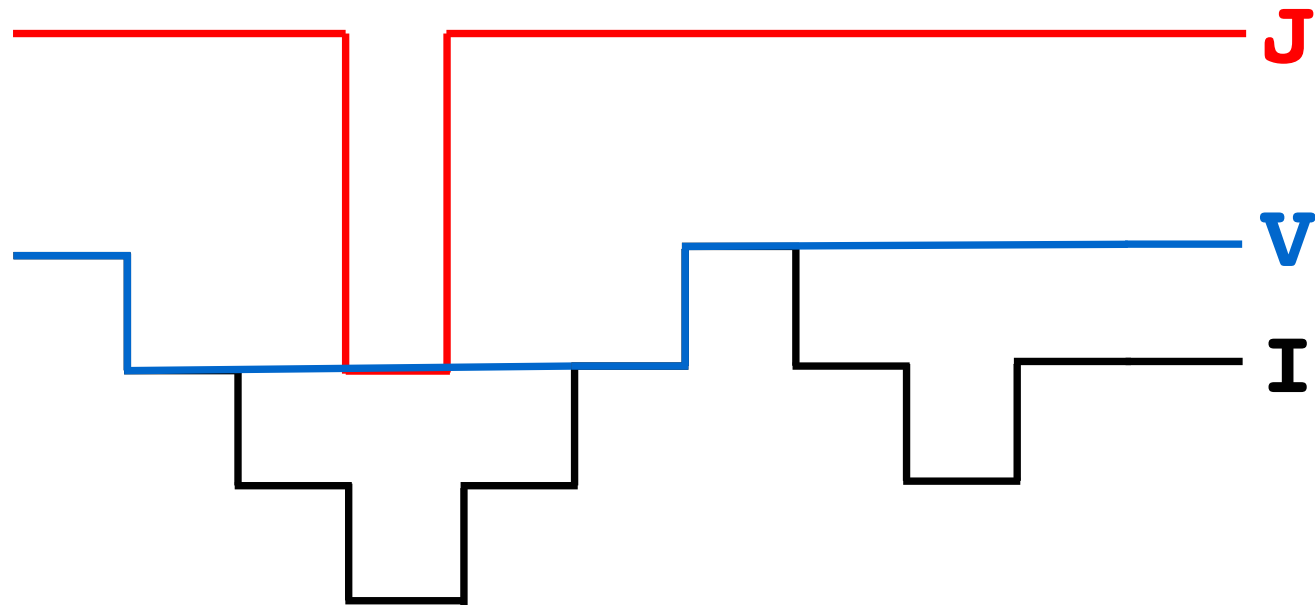




Reconstrução superior

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

Exemplo:

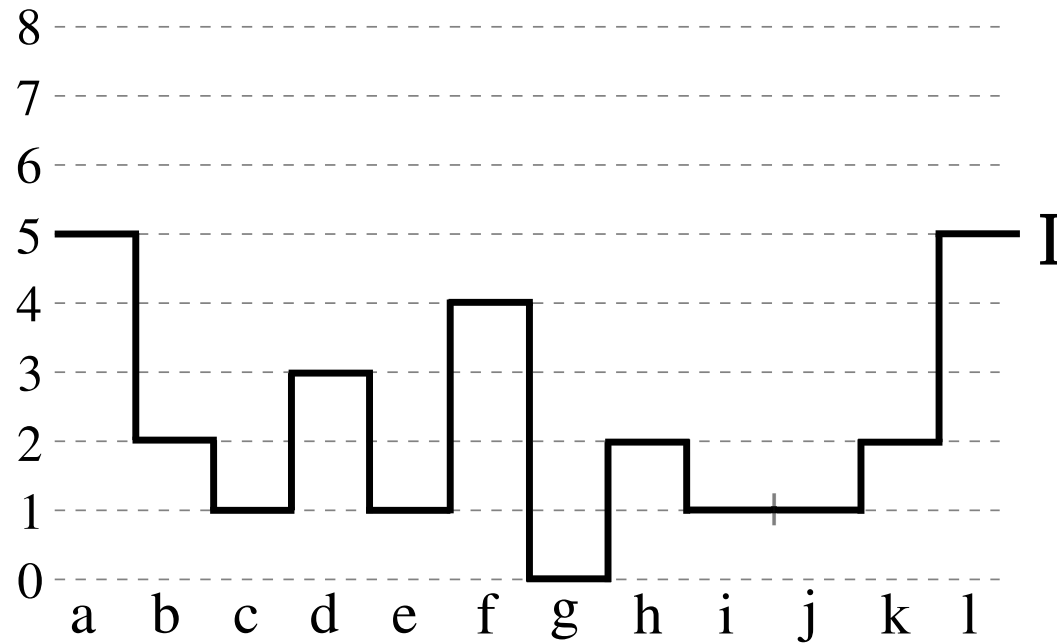


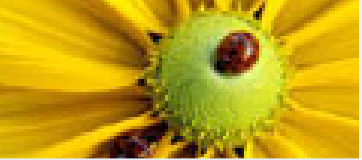


Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 1$:

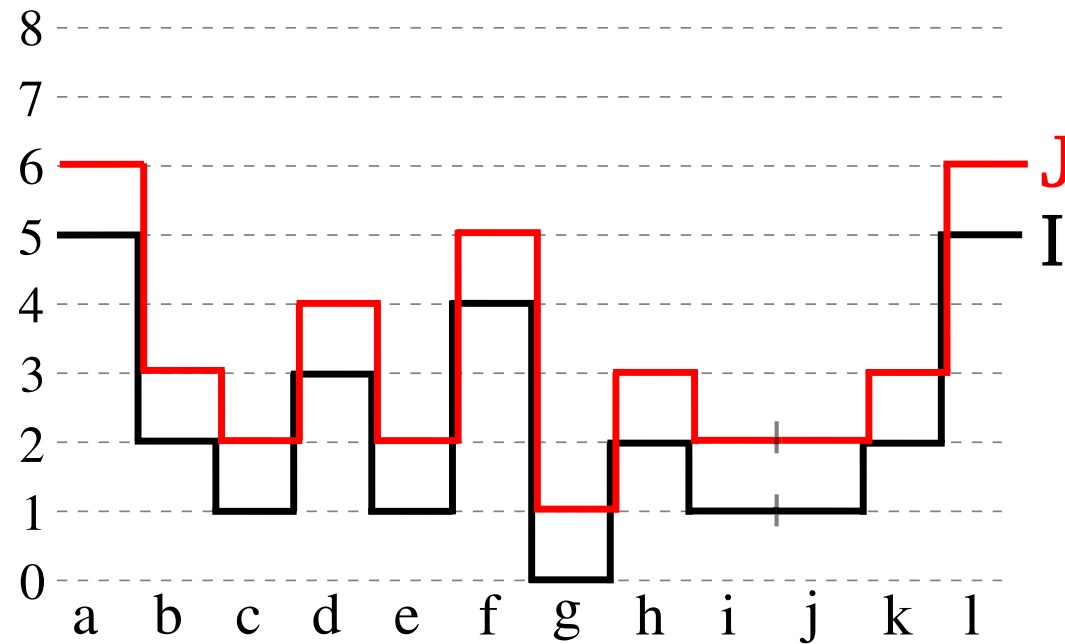




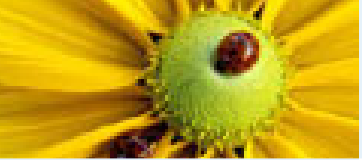
Filtragem de h-bacias

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

Exemplo para $h = 1$:



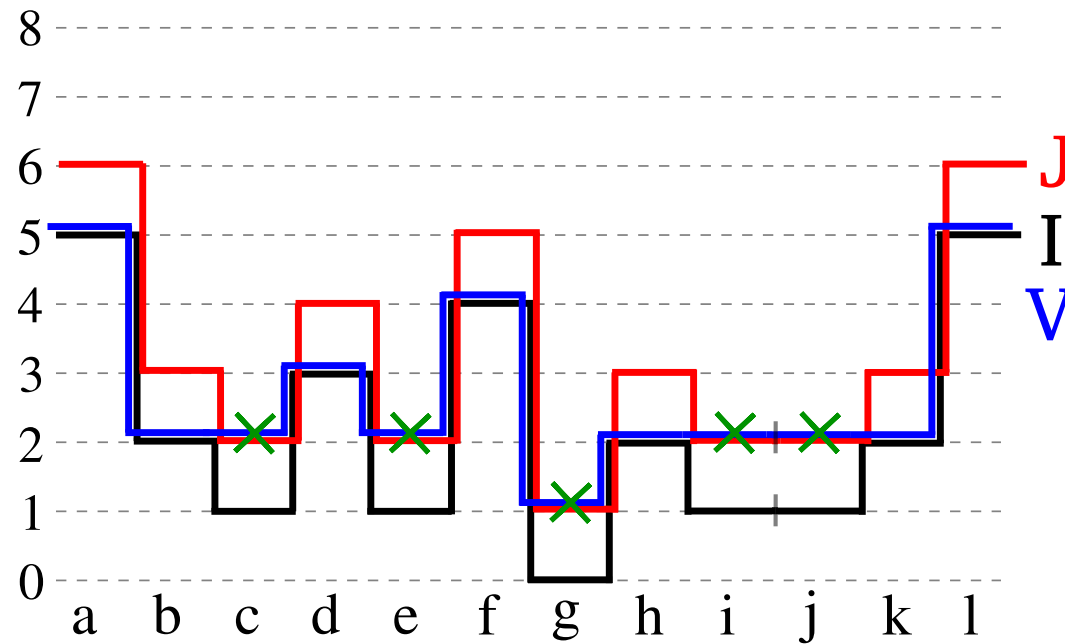
\hat{J} é obtido somando-se h às intensidades de \hat{I} (i.e., $J(p) = I(p) + h$).



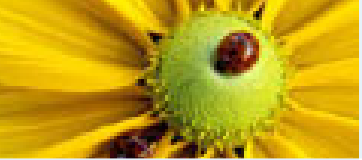
Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 1$:



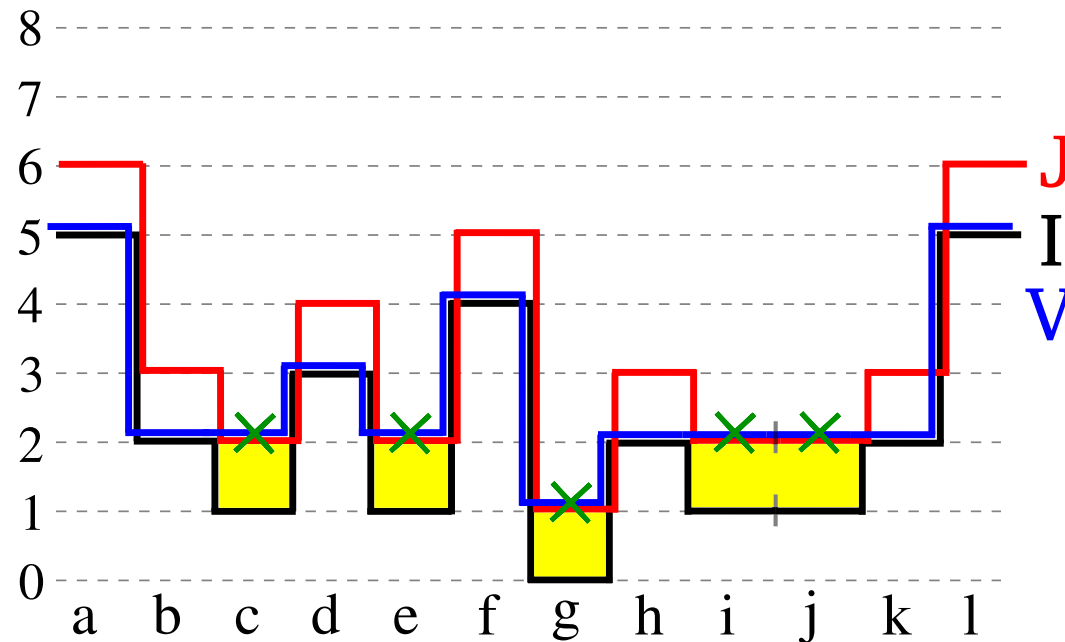
Com a política de desempate FIFO obtemos os pixels marcados por "X" como raízes da floresta.



Filtragem de h-bacias

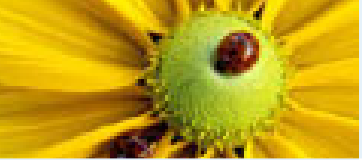
- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 1$:



Bacias de profundidade menor ou igual a h são preenchidas no mapa de custos V .

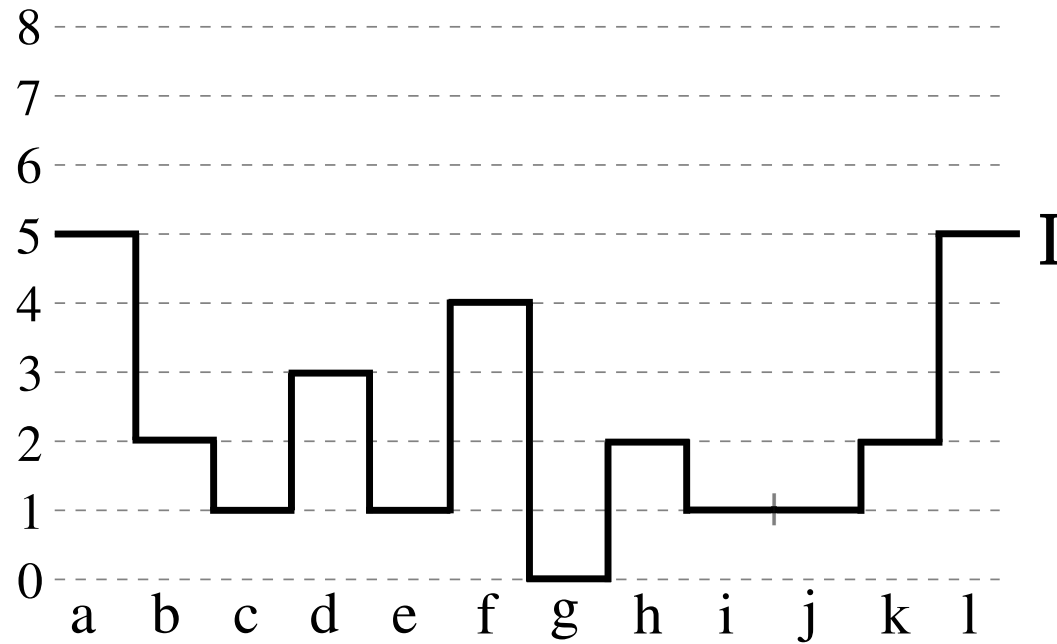
Note que para $h = 1$, uma imagem binária dos mínimos regionais de \hat{I} pode ser obtida através do resíduo $V - I$.

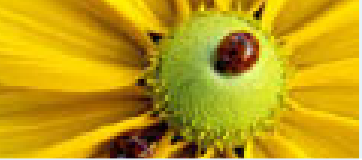


Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 2$:

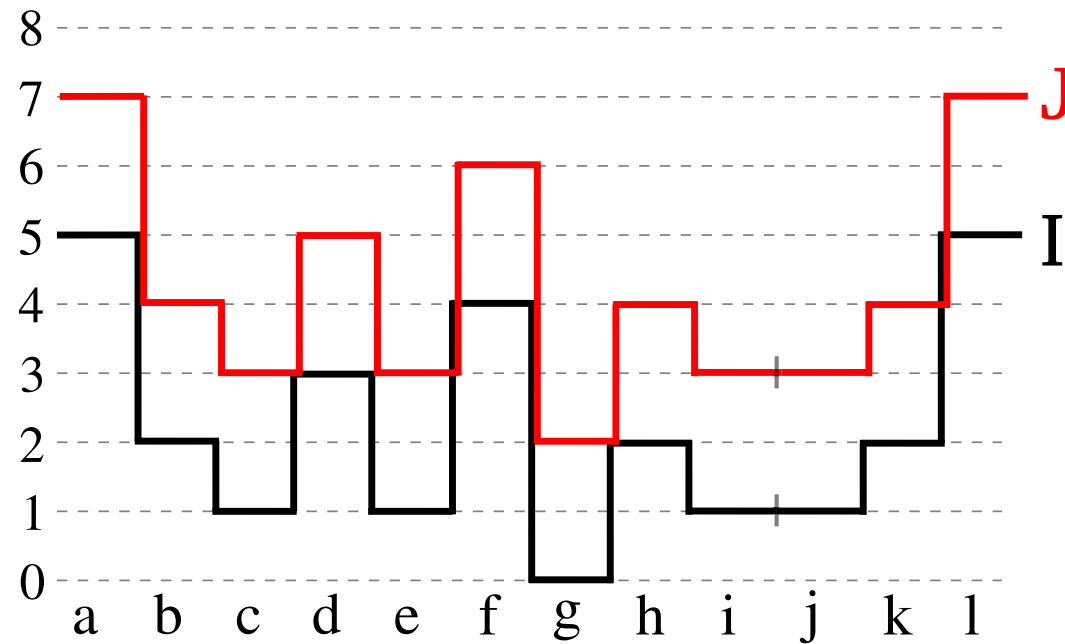




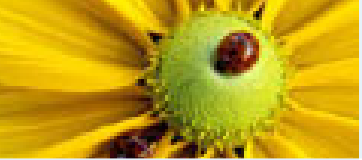
Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 2$:



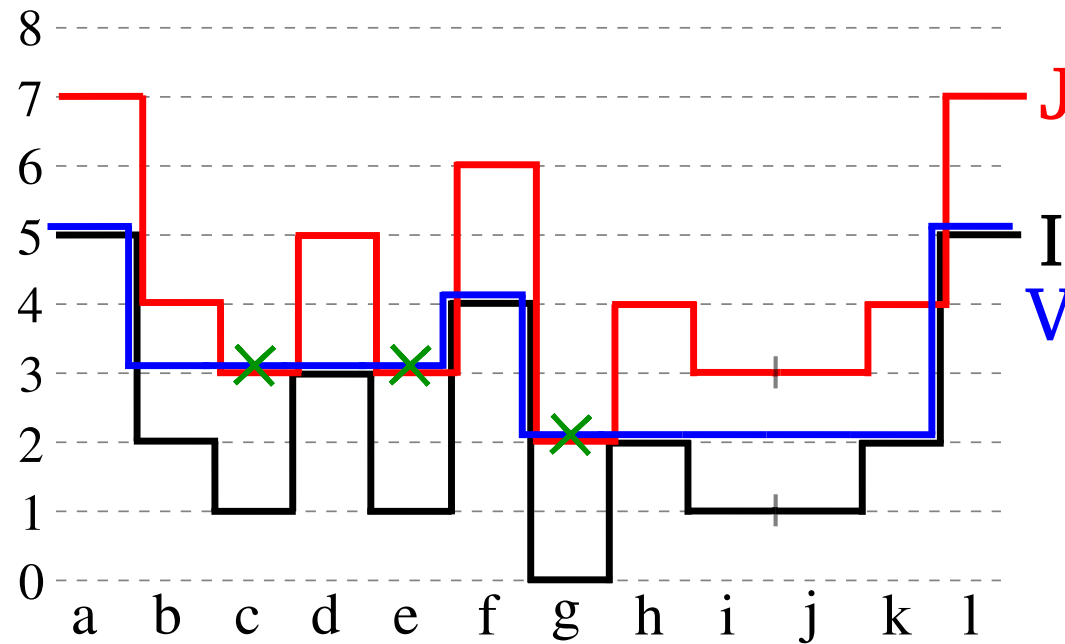
\hat{J} é obtido somando-se h às intensidades de \hat{I} (i.e., $J(p) = I(p) + h$).



Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 2$:



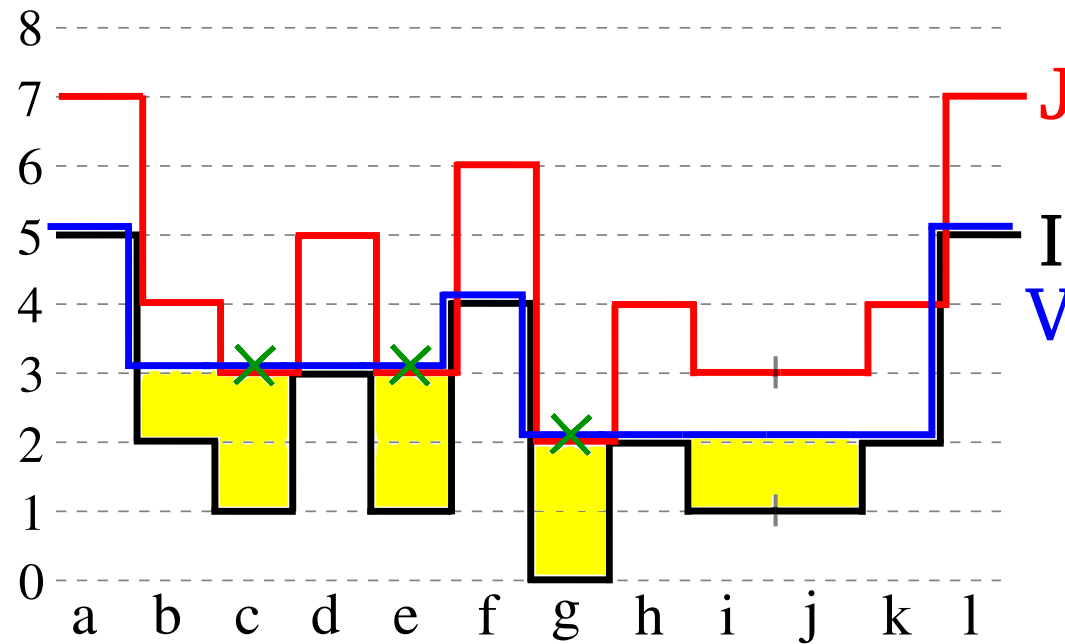
Com a política de desempate FIFO obtemos os pixels marcados por "X" como raízes da floresta.



Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 2$:



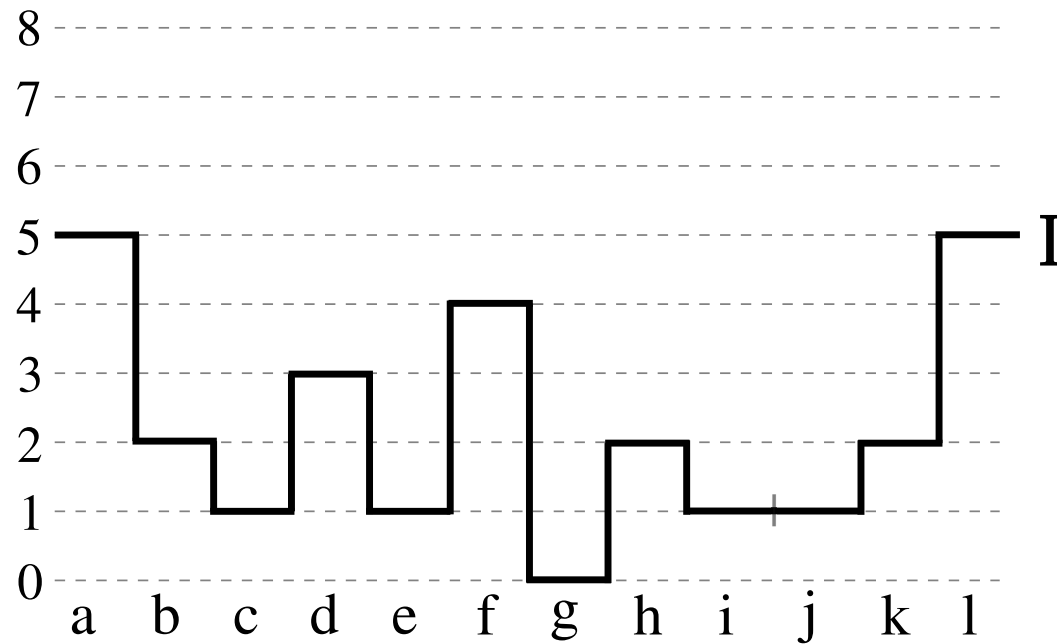
Bacias de profundidade menor ou igual a h são preenchidas no mapa de custos V .

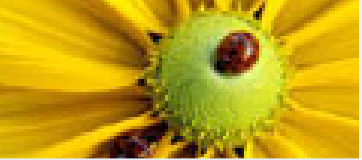


Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 3$:

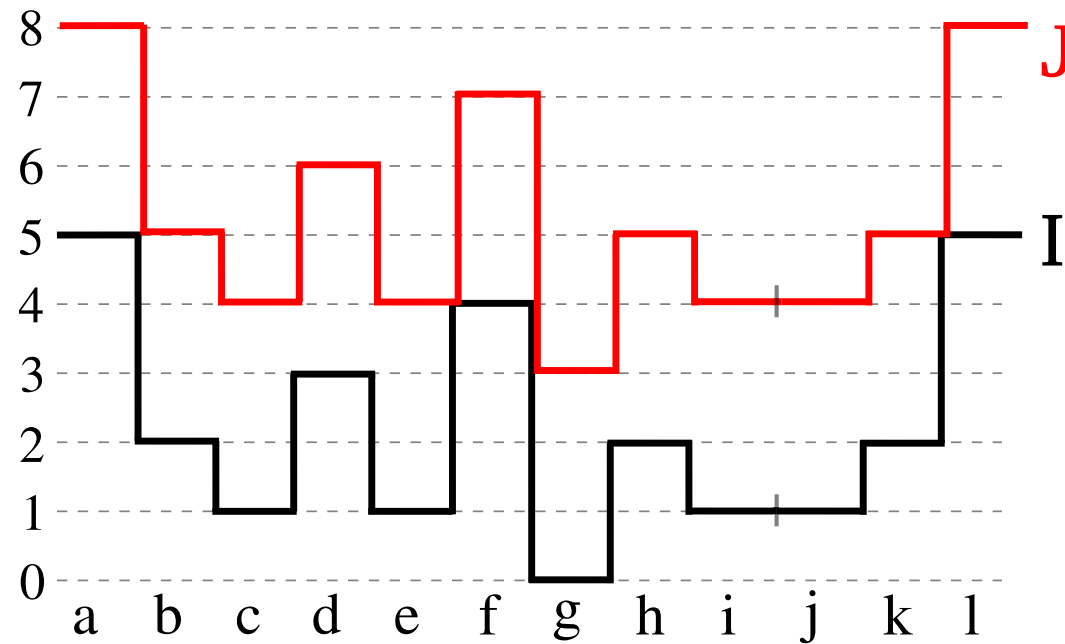




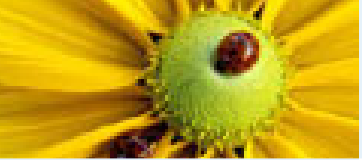
Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 3$:



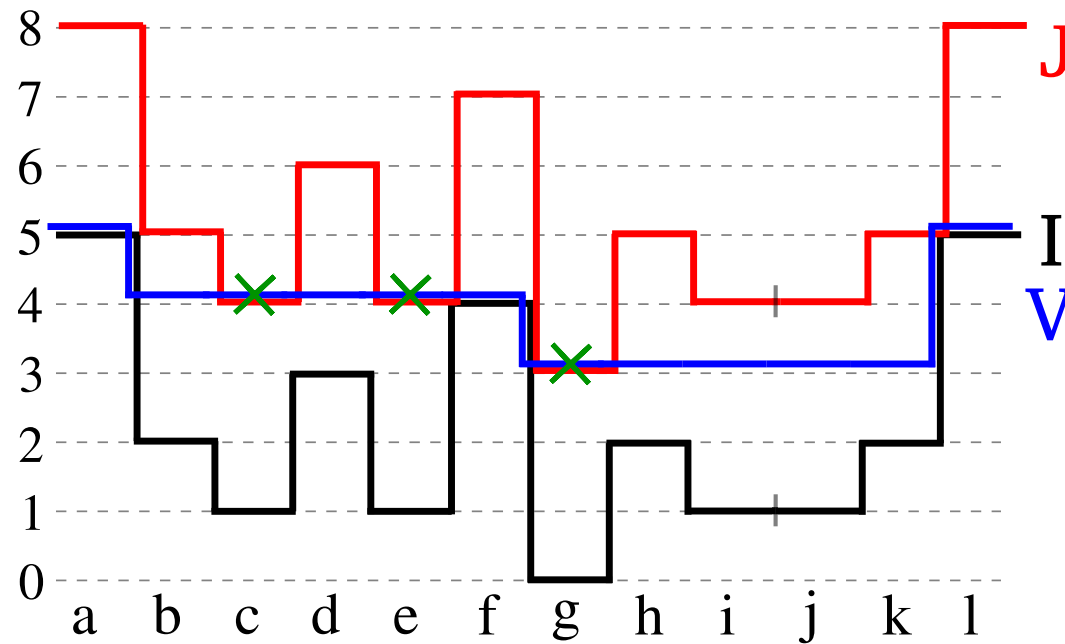
\hat{J} é obtido somando-se h às intensidades de \hat{I} (i.e., $J(p) = I(p) + h$).



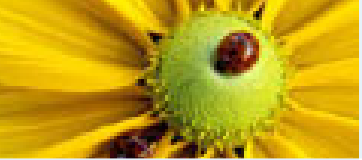
Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 3$:



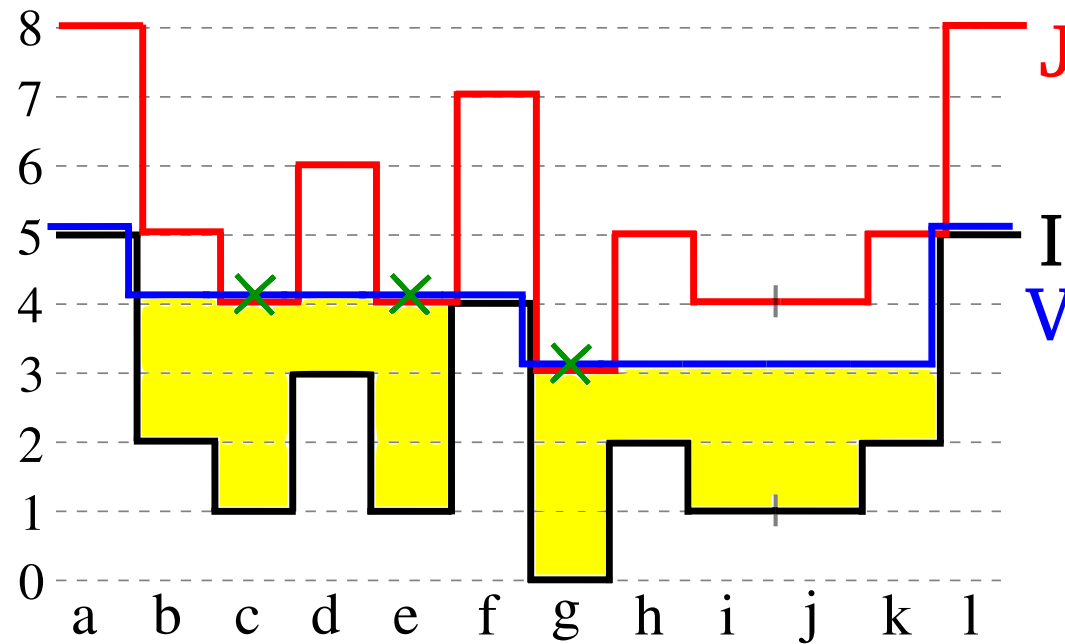
Com a política de desempate FIFO obtemos os pixels marcados por "X" como raízes da floresta.



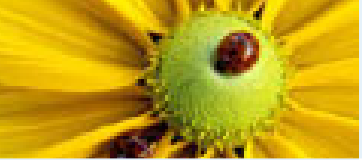
Filtragem de h-bacias

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias**
- Fechamento por reconstrução
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura

Exemplo para $h = 3$:

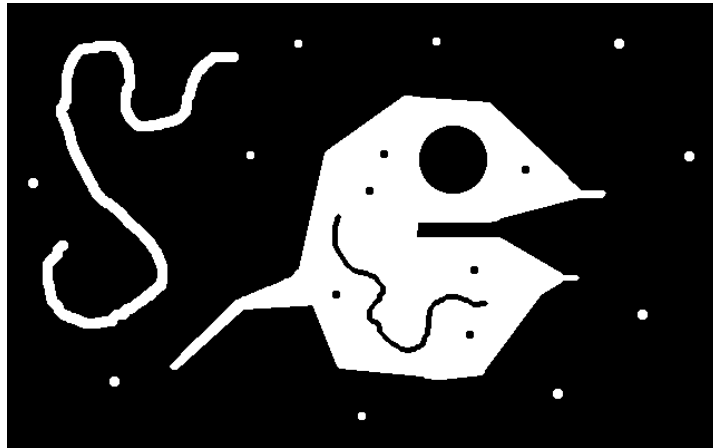


Bacias de profundidade menor ou igual a h são preenchidas no mapa de custos V .

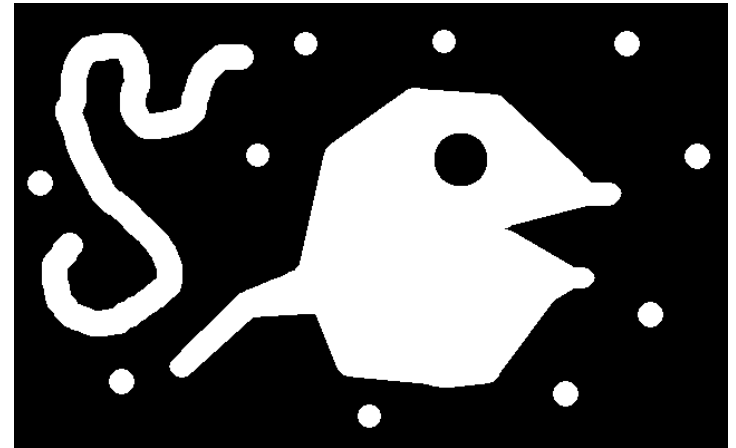


Fechamento por reconstrução

- Operador conexo
- Filtragem Conexa
- Filtragem por reconstrução morfológica
- Reconstrução superior
- Filtragem de h-bacias
- Fechamento por reconstrução**
- Transformada de watershed
- Reconstrução superior e Watershed
- Artigo para leitura



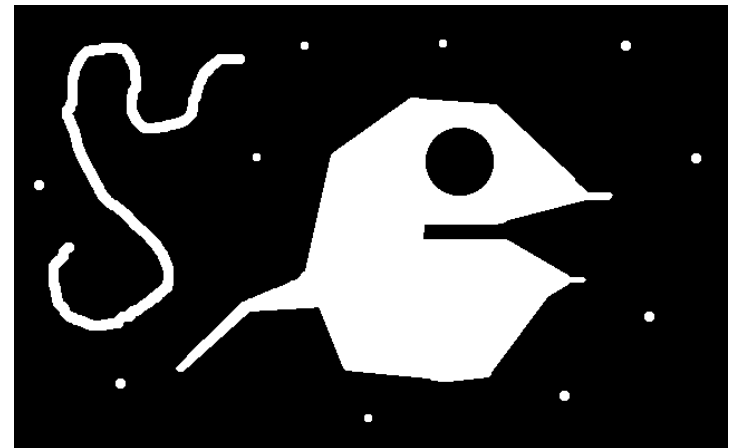
\hat{I}



dilatação



fechamento



fechamento por reconstrução



Transformada de watershed

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

A transformada de watershed pode ser vista como uma IFT com função de custo de caminho:

$$f_{peak}(\langle t \rangle) = H(t)$$
$$f_{peak}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \max\{f_{peak}(\pi_s), I(t)\}$$

onde $H(t) < I(t)$ (imposição de marcadores), se $t \in \mathcal{S}$, e $H(q) = +\infty$ no caso contrário.

- As bacias sem sementes se transformam em platôs na imagem \hat{V} de custos, com valores iguais à altura das águas que as encontram.
- As raízes da floresta serão os pixels sementes, que estarão em mínimos regionais da imagem de custos.



Transformada de watershed

A transformada de watershed pode ser vista como uma IFT com função de custo de caminho:

$$f_{peak}(\langle t \rangle) = H(t)$$
$$f_{peak}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \max\{f_{peak}(\pi_s), I(t)\}$$

onde $H(t) < I(t)$ (imposição de marcadores), se $t \in \mathcal{S}$, e $H(q) = +\infty$ no caso contrário.

- Note que as linhas de watershed podem ser obtidas da imagem \hat{R} de raízes (e.g., a linha composta por todos os pixels p com raiz $R(p) \neq R(q)$ para algum q vizinho-4 de p , gera espessura máxima de 2 pixels).

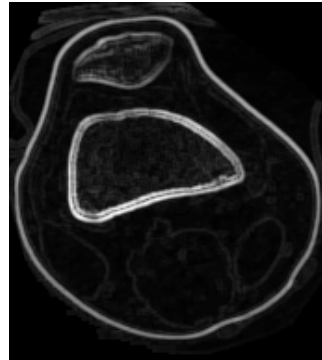
Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura



Transformada de watershed

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

Exemplo onde as sementes são os mínimos regionais.



\hat{I}



\hat{L}



linhas de watershed

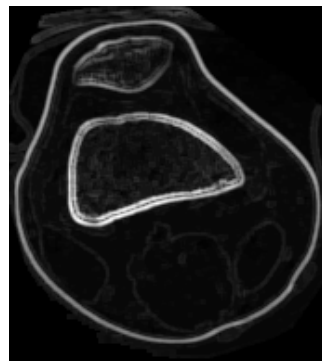
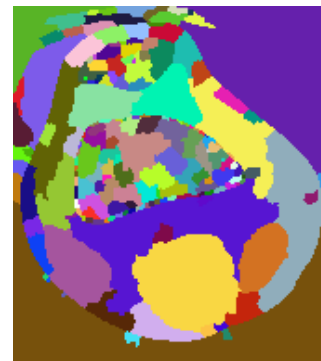


Imagem \hat{I} filtrada



\hat{L}

linhas de watershed



Transformada de watershed

Operador conexo
Filtragem Conexa

Filtragem por
reconstrução
morfológica

Reconstrução
superior

Filtragem de
h-bacias

Fechamento por
reconstrução

Transformada de
watershed

Reconstrução
superior e Watershed

Artigo para leitura

Os mínimos podem ser obtidos via IFT com função f_{ini} :

$$f_{ini}(\langle t \rangle) = I(t), \text{ para todo } t \in \mathcal{D}_I,$$
$$f_{ini}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \begin{cases} f_{ini}(\pi_s), & \text{se } I(s) \leq I(t), \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Com a política FIFO, uma imagem binária dos mínimos regionais pode ser gerada associando 1 a pixels raízes e 0 aos demais.
- Com a política LIFO, vamos obter exatamente um pixel por mínimo regional.



Reconstrução superior e Watershed

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

Vamos apresentar um algoritmo de IFT com política FIFO que calcula a reconstrução superior em V , e associa em L um rótulo distinto para cada mínimo de V :

$$f_{rsws}(\langle t \rangle) = \begin{cases} J(t), & \text{se } t \in \mathcal{R}, \\ J(t) + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$f_{rsws}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \max\{f_{rsws}(\pi_s), I(t)\},$$

onde $J(t) \geq I(t)$, e \mathcal{R} é o conjunto de raízes da floresta, que é descoberto durante o algoritmo da seguinte forma: se $P(s) = nil$ quando s é removido de Q , então s é raiz da floresta. Quando as raízes s são encontradas, nós baixamos o valor delas $V(s)$ para $J(s)$.



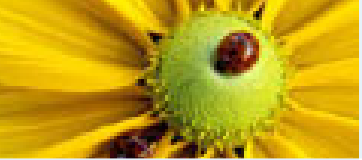
Reconstrução superior e Watershed

Operador conexo
 Filtragem Conexa
 Filtragem por reconstrução morfológica
 Reconstrução superior
 Filtragem de h-bacias
 Fechamento por reconstrução
 Transformada de watershed
Reconstrução superior e Watershed
 Artigo para leitura

Algoritmo 1 — ALGORITMO DE RECONSTRUÇÃO SUPERIOR COM WATERSHED

ENTRADA: Imagens $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$, $\hat{J} = (\mathcal{D}_I, J)$, com $J(q) \geq I(q)$ para $\forall q \in \mathcal{D}_I$, e adjacência \mathcal{A} .
 SAÍDA: Reconstrução superior $\hat{V} = (\mathcal{D}_I, V)$ e rótulo por watershed $\hat{L} = (\mathcal{D}_I, L)$.
 AUXILIARES: Fila de prioridade Q , predecessores $\hat{P} = (\mathcal{D}_I, P)$, variáveis tmp e $l = 1$, e vetor de *estado* inicialmente zerado.

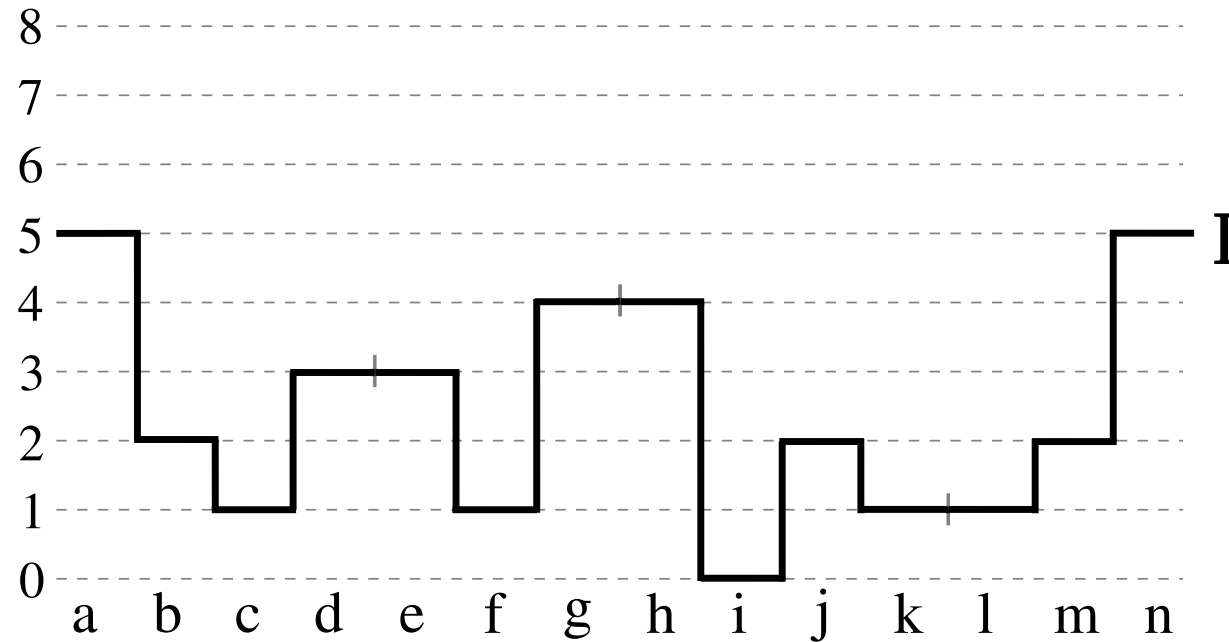
1. Para Cada $t \in \mathcal{D}_I$, Faça $P(t) \leftarrow nil$ e $V(t) \leftarrow J(t) + 1$. Se $V(t) \neq +\infty$, Então insira t em Q .
2. Enquanto $Q \neq \emptyset$, Faça
3. Remova um pixel s de Q cujo valor $V(s)$ seja mínimo, e faça $estado(s) \leftarrow 1$.
4. Se $P(s) = nil$, Então
5. $V(s) \leftarrow J(s)$, $L(s) \leftarrow l$, e $l = l + 1$.
6. Para Cada $t \in \mathcal{A}(s)$, tal que $estado(t) = 0$, Faça
7. $tmp \leftarrow \max\{V(s), I(t)\}$.
8. Se $tmp < V(t)$, Então
9. Se $V(t) \neq +\infty$, Então remova t de Q .
10. $P(t) \leftarrow s$, $V(t) \leftarrow tmp$, $L(t) \leftarrow L(s)$ e insira t em Q .

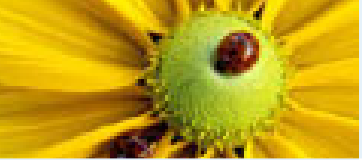


Reconstrução superior e Watershed

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
**Reconstrução
superior e Watershed**
Artigo para leitura

Exemplo para $J(t) = I(t) + 1$ (filtragem de h-bacias com $h = 1$):

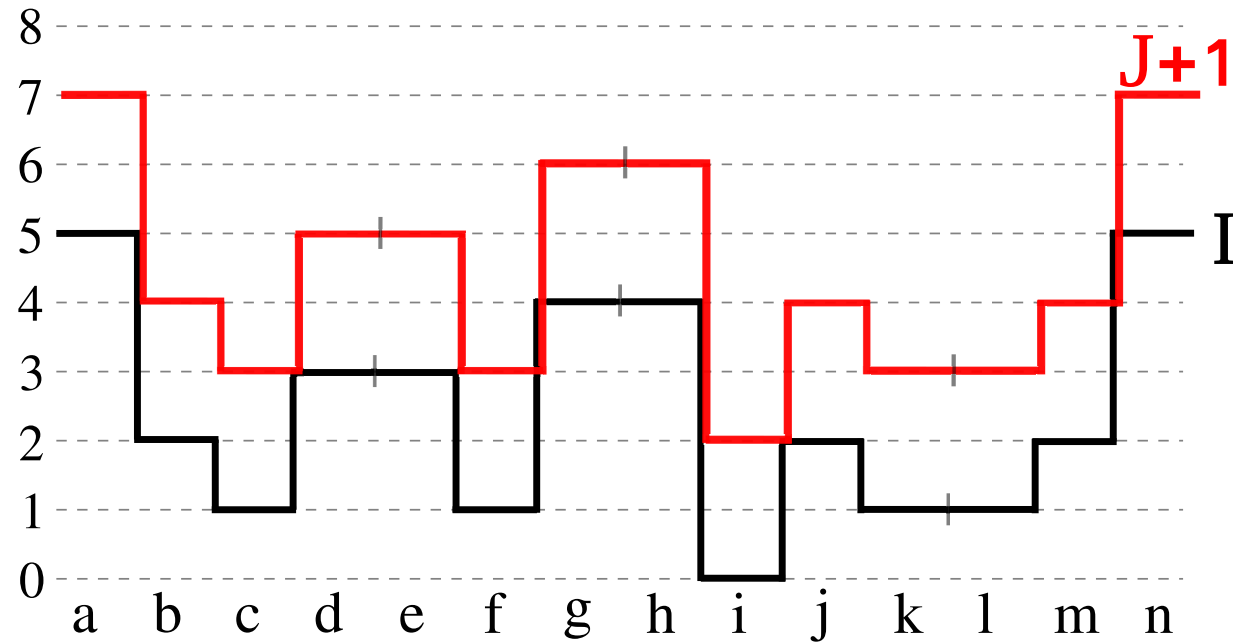




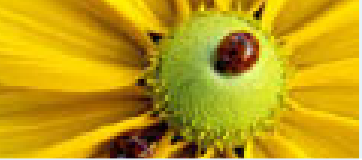
Reconstrução superior e Watershed

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

Exemplo para $J(t) = I(t) + 1$ (filtragem de h-bacias com $h = 1$):



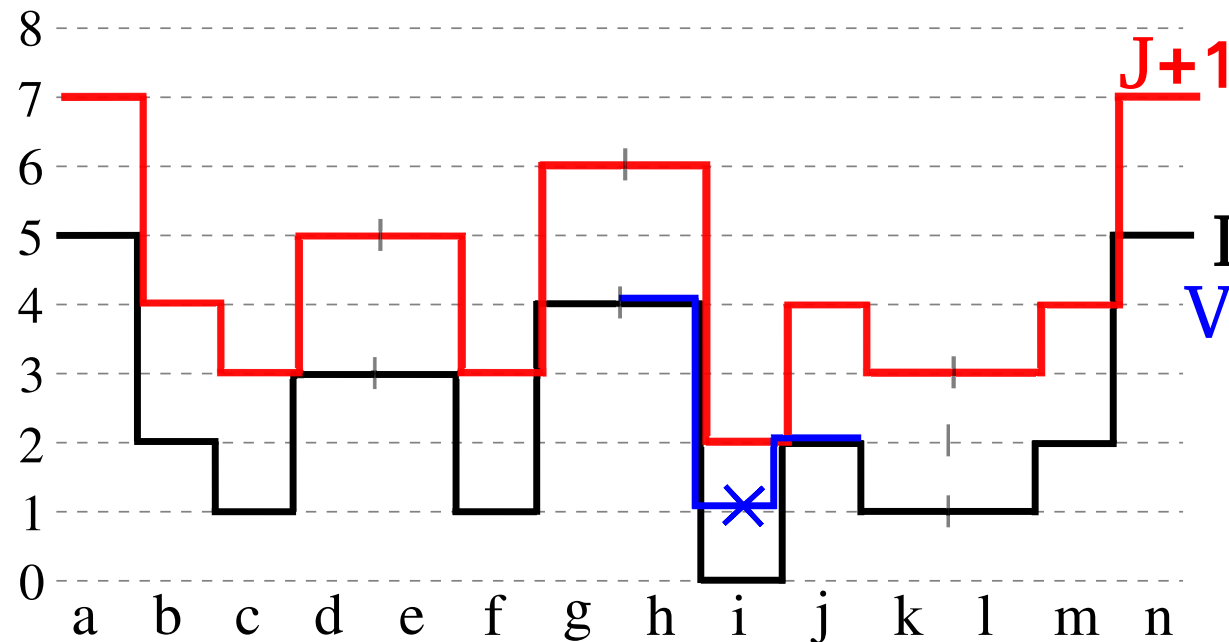
Os caminhos triviais iniciam com custo $J+1$.



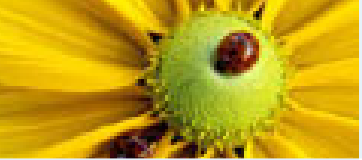
Reconstrução superior e Watershed

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

Exemplo para $J(t) = I(t) + 1$ (filtragem de h-bacias com $h = 1$):



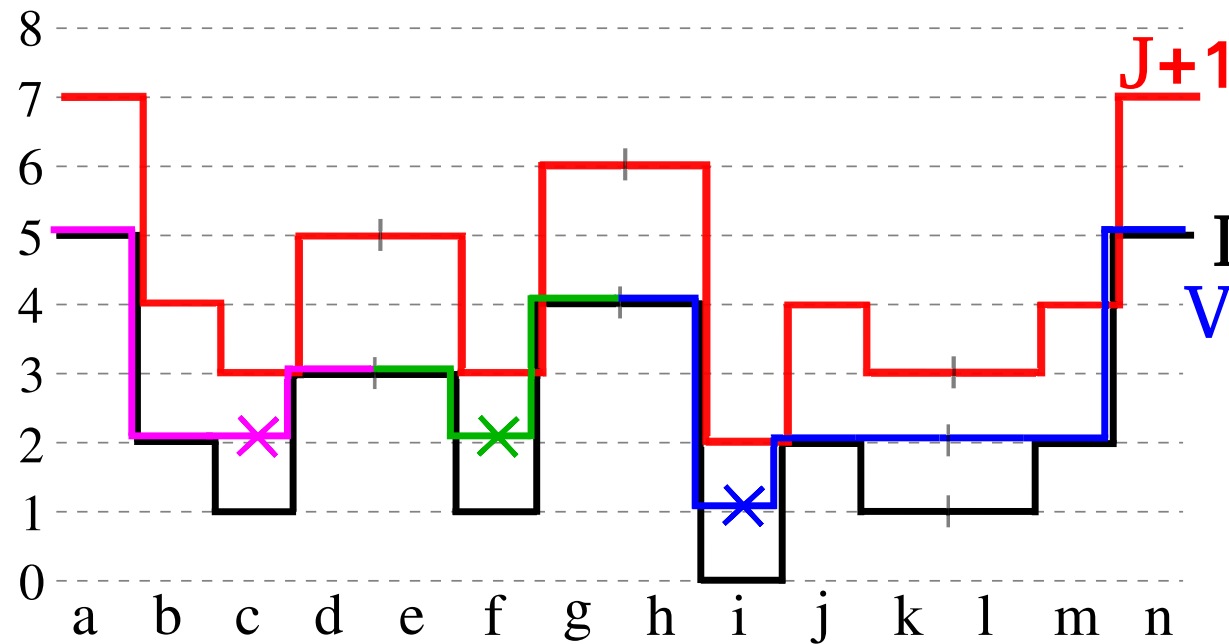
O pixel i é removido de Q e se torna raiz da floresta, logo baixamos o valor de $V(i)$ para $J(i)$. Os custos dos caminhos $f_{rsws}(\langle i, j \rangle) = 2$ e $f_{rsws}(\langle i, h \rangle) = 4$ são melhores do que os dos caminhos triviais $f_{rsws}(\langle j \rangle) = 4$ e $f_{rsws}(\langle h \rangle) = 6$, respectivamente.



Reconstrução superior e Watershed

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

Exemplo para $J(t) = I(t) + 1$ (filtragem de h-bacias com $h = 1$):



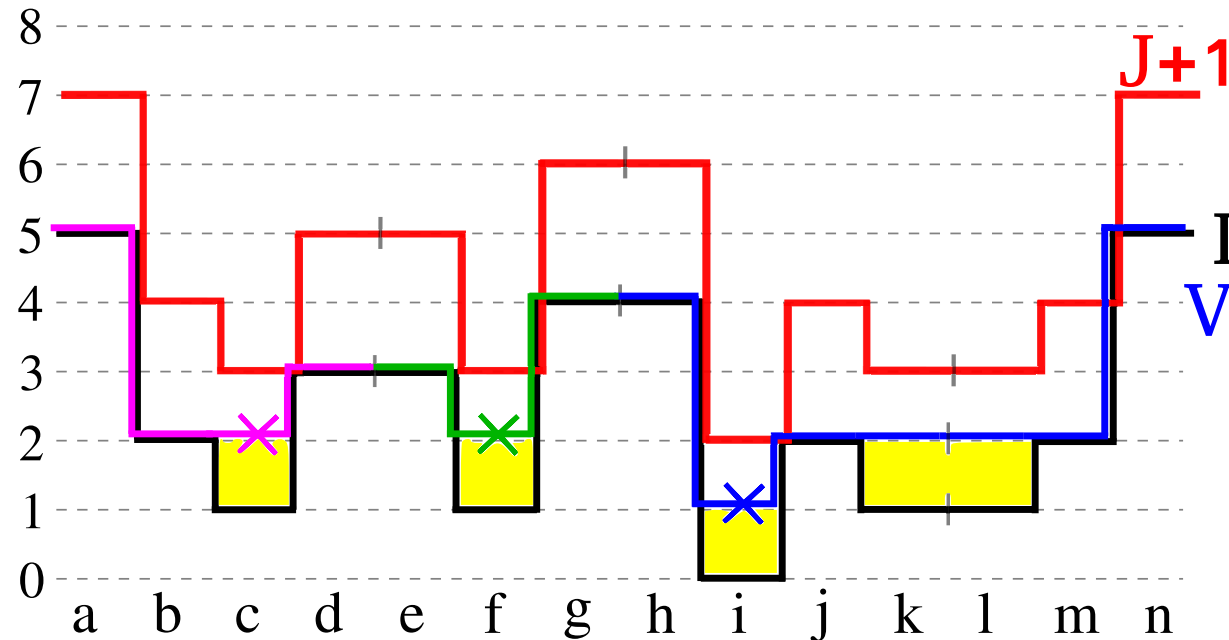
As três bacias da imagem filtrada de custos são rotuladas com diferentes rótulos (cores), gerando uma partição da imagem.



Reconstrução superior e Watershed

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

Exemplo para $J(t) = I(t) + 1$ (filtragem de h-bacias com $h = 1$):



O mínimo regional $\{k, l\}$ de I é eliminado pelo filtro de h-bacias com $h = 1$. Consequentemente, não temos raízes da floresta nos pixels k e l .



Artigo para leitura

Operador conexo
Filtragem Conexa
Filtragem por
reconstrução
morfológica
Reconstrução
superior
Filtragem de
h-bacias
Fechamento por
reconstrução
Transformada de
watershed
Reconstrução
superior e Watershed
Artigo para leitura

A.X. Falcão, B. S. da Cunha, and R. A. Lotufo,
**Design of connected operators using the image foresting
transform,**

In Proc. of SPIE on Medical Imaging, volume 4322, pages
468-479. SPIE, 2001.

<http://proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?articleid=906355>