

Algoritmos de segmentação por corte em grafo generalizado

Prof. Dr. Paulo A. V. de Miranda
Instituto de Matemática e Estatística (IME),
Universidade de São Paulo (USP)
pmiranda@vision.ime.usp.br

Corte em grafo generalizado

Considere um grafo ponderado $G = \langle V, E, w \rangle$ derivado de uma imagem \hat{I} , onde os pesos $w(c, d)$ entre pixels vizinhos são projetados para ter valores elevados nas transições das bordas do objeto de interesse (e.g., $w(c, d) = |I(c) - I(d)|$).

Corte em grafo generalizado

- ▶ Para cada grafo $G = \langle V, E, w \rangle$, considere o espaço $\tilde{\mathcal{X}}$ de todas as funções $x: V \rightarrow [0, 1]$, referido como *subconjuntos "fuzzy"* de V , com o valor $x(c)$ indicando um grau de pertinência com o qual c pertence ao conjunto.
- ▶ A família \mathcal{X} de todas as funções $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ com os valores permitidos somente de 0 e 1 (i.e., $x: V \rightarrow \{0, 1\}$) será referida como a família de todos *subconjuntos "hard"* de V .
- ▶ Cada $x \in \mathcal{X}$ é identificado com o subconjunto $P = \{c \in V: x(c) = 1\}$ de V . Note que, em tal caso, x é a *função característica* χ_P de $P \subset V$.

Corte em grafo generalizado

- ▶ Nós geralmente restringimos a coleção \mathcal{X} de todos os objetos permitidos através de dois conjuntos disjuntos, referidos como *sementes*: $\mathcal{S}_{obj} \subset V$ indicando o objeto e $\mathcal{S}_{bkg} \subset V$ indicando o fundo.
- ▶ Isto restringe o conjunto de saídas admissíveis dos algoritmos para a família $\mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$ de todos $x \in \mathcal{X}$ com $x(s) = 1$ para todo $s \in \mathcal{S}_{obj}$, e $x(t) = 0$ para todo $t \in \mathcal{S}_{bkg}$.
- ▶ Note que $\mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg}) = \{\chi_P : \mathcal{S}_{obj} \subset P \subset V \setminus \mathcal{S}_{bkg}\}$.

Corte em grafo generalizado

Para $q \in [1, \infty]$ considere o funcional de energia $\varepsilon_q: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow [0, \infty)$, onde, para cada $x \in \tilde{\mathcal{X}}$, $\varepsilon_q(x)$ é definido como a q -norma do funcional $F_x: E \rightarrow \mathbb{R}$, dado pela fórmula

$F_x(c, d) = \bar{w}(c, d)|x(c) - x(d)|$ para $\langle c, d \rangle \in E$. Isto é,

$$\varepsilon_\infty(x) = \|F_x\|_\infty = \max_{\langle c, d \rangle \in E} \bar{w}(c, d)|x(c) - x(d)|,$$

$$\varepsilon_q(x) = \|F_x\|_q = \sqrt[q]{\sum_{\langle c, d \rangle \in E} (\bar{w}(c, d)|x(c) - x(d)|)^q}$$

para $q < \infty$, onde $\bar{w}(c, d) = K - w(c, d)$.

Note que $\lim_{q \rightarrow \infty} \varepsilon_q(x) = \varepsilon_\infty(x)$, visto que q -norma converge, quando $q \rightarrow \infty$, para a ∞ -norma.

Corte em grafo generalizado

- ▶ Seja ε_{\min}^q o mínimo da energia $\varepsilon_q(x)$ sobre todos os objetos permitidos $x \in \mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$, isto é,
$$\varepsilon_{\min}^q = \min\{\varepsilon_q(x) : x \in \mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})\}.$$
- ▶ Qualquer elemento de $\mathcal{X}_q(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg}) = \{x \in \mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg}) : \varepsilon_q(x) = \varepsilon_{\min}^q\}$ será referido como uma solução ótima da energia ε_q em $\mathcal{X}(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$.
- ▶ Qualquer algoritmo A que, dada uma imagem \hat{I} e conjuntos de sementes \mathcal{S}_{obj} e \mathcal{S}_{bkg} , retorna um objeto, denotado por $A(\hat{I}, \mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$, de $\mathcal{X}_q(\mathcal{S}_{obj}, \mathcal{S}_{bkg})$ será referido como um *algoritmo de ε_q -minimização*.

Corte em grafo generalizado

- ▶ Note que o algoritmo padrão de *fluxo máximo/corte mínimo* é um algoritmo de ε_1 -minimização. Vamos usar um símbolo GC_{sum} para denotar este algoritmo.
- ▶ Os métodos *Relative Fuzzy Connectedness (RFC)*, *Iterative Relative Fuzzy Connectedness (IRFC)*, Floresta de Espalhamento Mínima, e alguns casos de Floresta de Caminhos Ótimos são todos algoritmos de ε_∞ -minimização. Todos esses métodos podem ser obtidos via a Transformada Imagem-Floresta (IFT).

Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

Por simplicidade, vamos considerar o problema equivalente dual dado pela **maximização** da energia abaixo:

$$\varepsilon_{\infty}^{-}(x) = \min_{\langle c,d \rangle \in E | x(c) \neq x(d)} w(c, d),$$

Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

As funções de conectividade são especificadas por uma regra de inicialização e uma regra de extensão de caminho.

$$f_{sum}(\langle t \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_{obj} \cup \mathcal{S}_{bkg} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{sum}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = f_{sum}(\pi_s) + w^\beta(s, t)$$

$$f_{max}(\langle t \rangle) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_{obj} \cup \mathcal{S}_{bkg} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{max}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \max\{f_{max}(\pi_s), w(s, t)\}$$

Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

$$f_w(\langle t \rangle) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_{obj} \cup \mathcal{S}_{bkg} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_w(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = w(s, t)$$

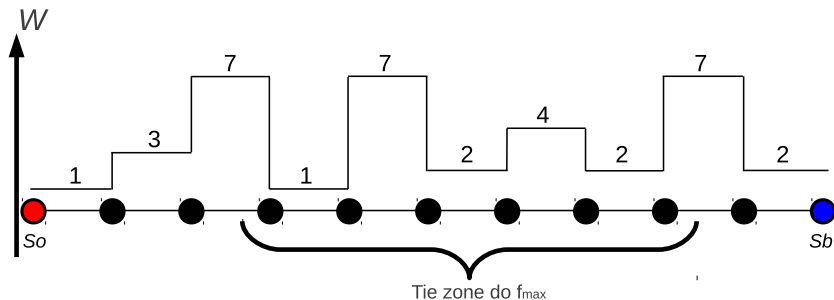
$$f_{IRFC}(\langle t \rangle) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_{obj} \cup \mathcal{S}_{bkg} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{IRFC}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \begin{cases} \max\{f_{IRFC}(\pi_s), 2 \times w(s, t) + 1\} & \text{se } R(s) \in \mathcal{S}_{obj} \\ \max\{f_{IRFC}(\pi_s), 2 \times w(s, t)\} & \text{se } R(s) \in \mathcal{S}_{bkg} \end{cases}$$

onde $R(s) = org(\pi_s)$.

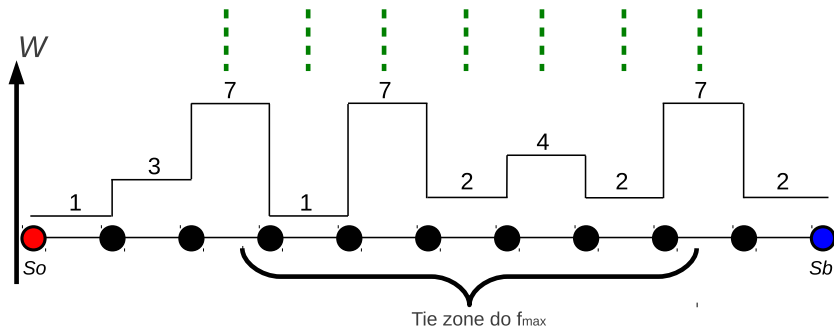
Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

Exemplo:



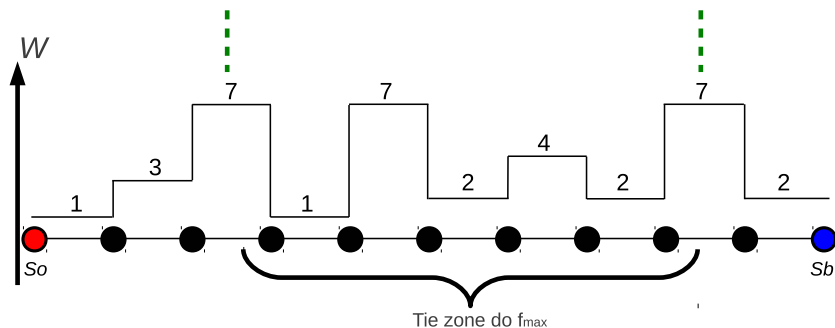
Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

Possíveis bordas de corte da IFT com f_{\max} :



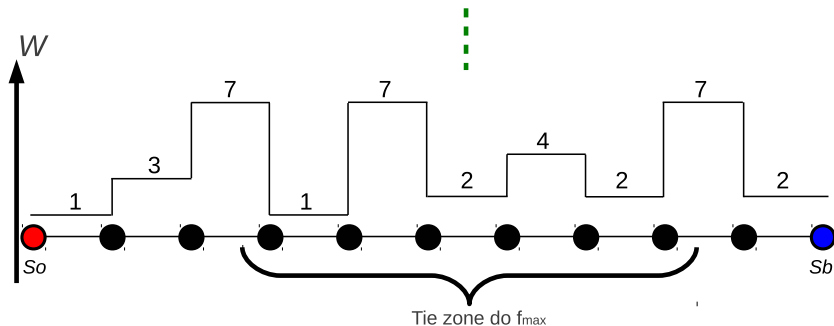
Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

Possíveis bordas de corte da IFT com f_{\max} (desempate LIFO):



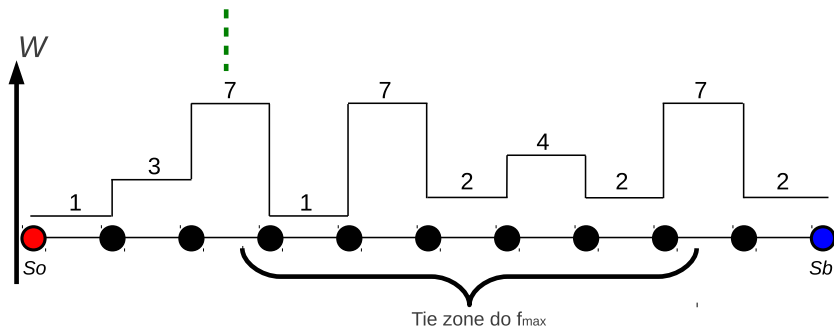
Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

Possíveis bordas de corte da IFT com f_{\max} (desempate FIFO):



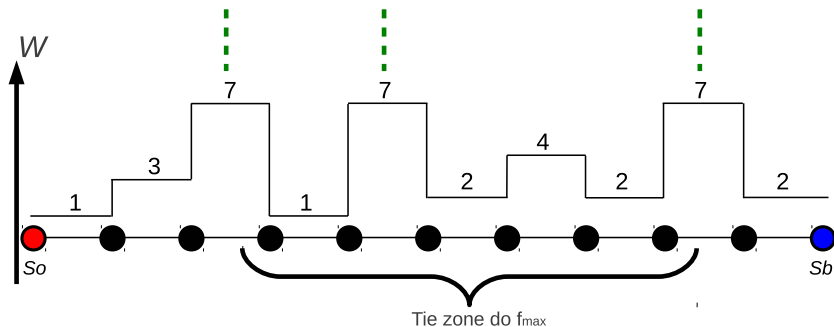
Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

Possíveis bordas de corte da IFT com f_{IRFC} :



Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

Possíveis bordas de corte da IFT com f_w :



Relative-fuzzy connectedness (RFC)

Dois mapas de conectividade separados são calculados:

- ▶ $V_o(q)$ que leva em conta apenas as sementes em S_{obj} .
- ▶ $V_b(q)$ que leva em conta apenas as sementes em S_{bkg} .

$$V_o(q) = \min_{\forall \pi_q \text{ in } (V, E) | \text{org}(\pi_q) \in S_{obj}} \{f_{max}(\pi_q)\}, \quad (1)$$

$$V_b(q) = \min_{\forall \pi_q \text{ in } (V, E) | \text{org}(\pi_q) \in S_{bkg}} \{f_{max}(\pi_q)\}. \quad (2)$$

A segmentação final é obtida por comparação dos dois mapas de conectividade $V_o(q)$ e $V_b(q)$, tal que cada pixel $q \in V$ é rotulado como sendo do objeto somente se $V_o(q) < V_b(q)$.

Diagrama das relações entre métodos

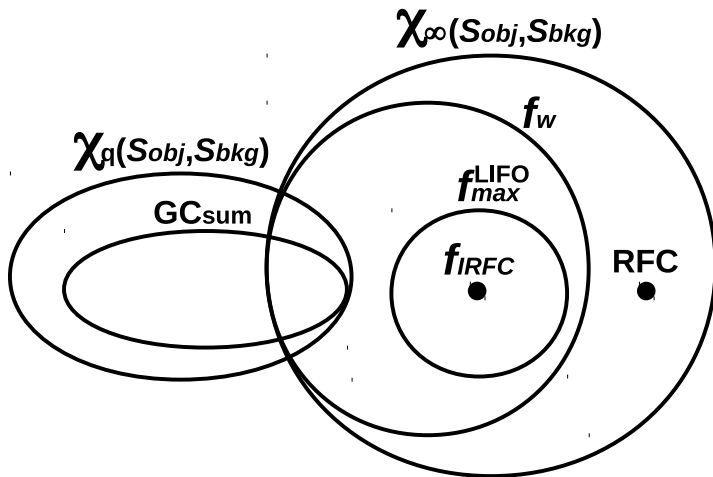
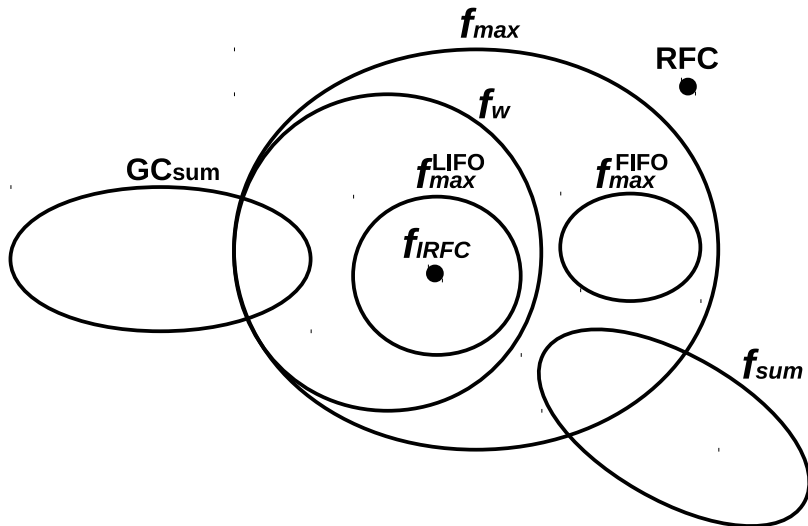


Diagrama das relações entre métodos



Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)



(a) RFC



(b) $IRFC$



(c) $IFT_{f_{max}}$

Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

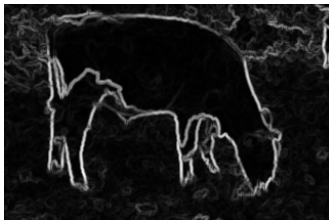


Imagem de pesos e o resultado usando $f_{max}(\pi)$.

Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

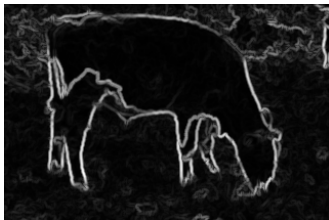


Imagem de pesos e o resultado usando $f_{sum}(\pi)$ (β pequeno).

Métodos via Transformada Imagem-Floresta (IFT)

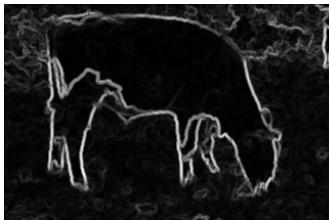


Imagem de pesos e o resultado usando $f_{sum}(\pi)$ (β elevado).

- ▶ *P.A.V. Miranda, and A.X. Falcão,*
Elucidating the relations among seeded image segmentation methods and their possible extensions,
Sibgrapi 2011 (XXIV Conference on Graphics, Patterns and Images),
Maceió, AL, Brazil, pp. 289-296, 2011.
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6134744>
- ▶ *Krzysztof Chris Ciesielski, J.K. Udupa, A.X. Falcão, and P.A.V. Miranda,*
Fuzzy Connectedness image segmentation in Graph Cut formulation: A linear-time algorithm and a comparative analysis,
Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 44, no. 3, 2012.
<http://www.springerlink.com/content/f443573w41785464/?MUD=MP>