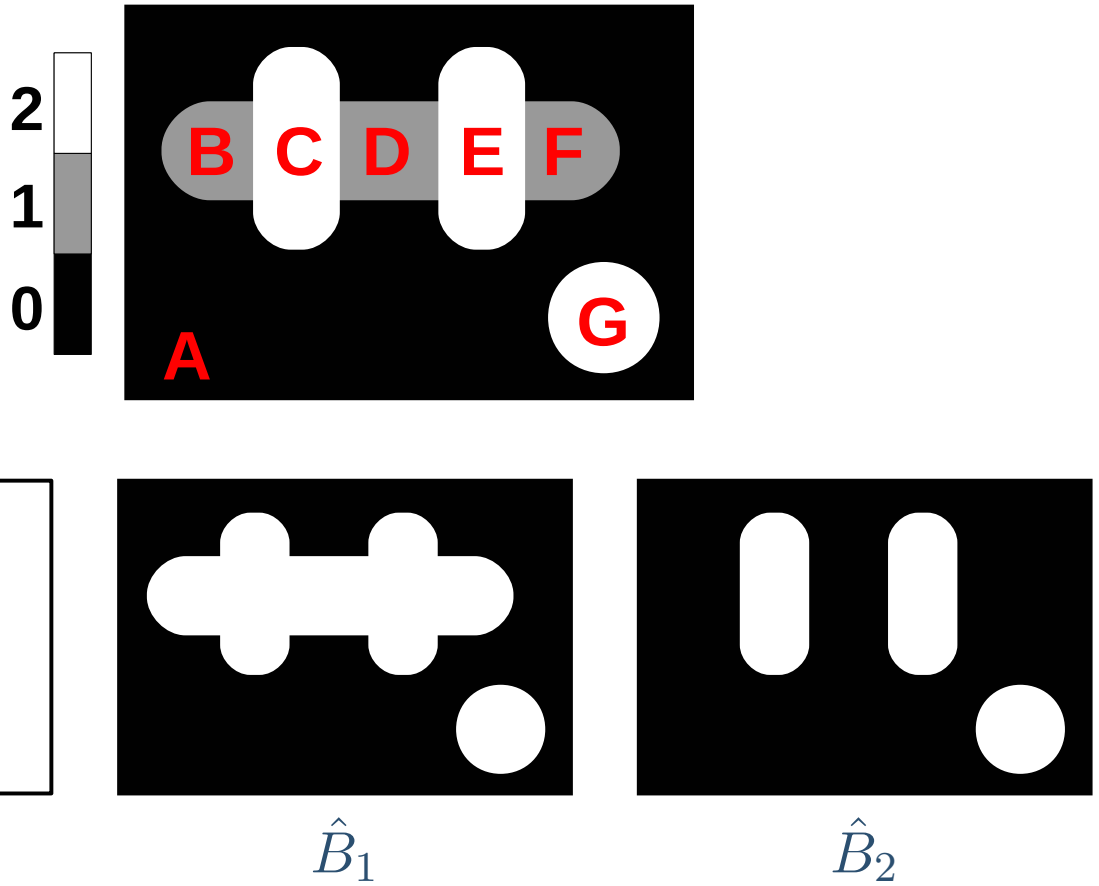
Árvore de componentes

Prof. Dr. Paulo A. V. de Miranda
Instituto de Matemática e Estatística (IME),
Universidade de São Paulo (USP)
pmiranda@vision.ime.usp.br

Decomposição por limiarização

Uma imagem $\hat{I}$ decomposta por limiar forma um conjunto de imagens binárias $\hat{B}_l = (\mathcal{D}_I, B_l), l = 0, 1, \ldots, I_{max}$, onde $B_l(p) = 1$ se $I(p) \geq l$ e $B_l(p) = 0$ caso contrário $(I_{max} = \max_{\forall p \in \mathcal{D}_I} \{I(p)\})$.



$\hat{B}_0$ $\hat{B}_1$ $\hat{B}_2$

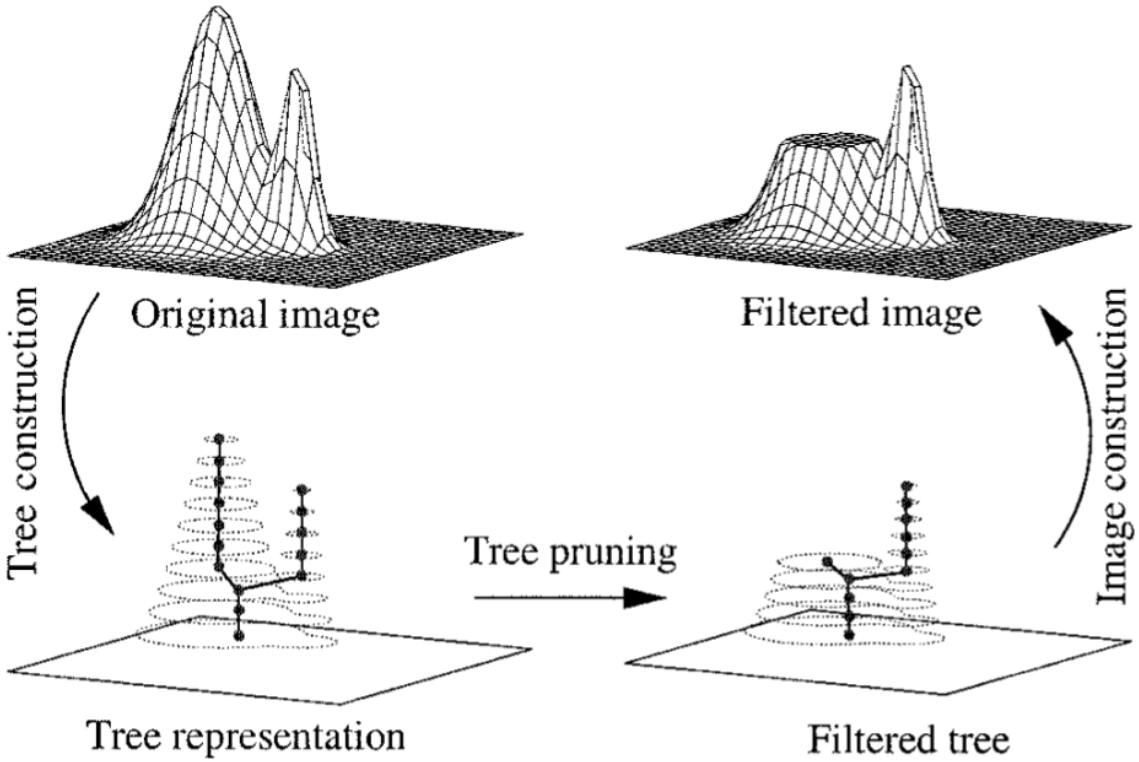
Árvore de componentes

Uma árvore de componentes é uma representação da imagem que descreve relações topológicas entre os componentes conexos de sua **decomposição por limiarização**.

- Analisando níveis consecutivos desta decomposição, podemos perceber que componentes do nível $l + 1$ estão contidos em componentes do nível l.
- Uma árvore de componentes é, portanto, um grafo que armazena esta hierarquia entre componentes.
- Nesta árvore as folhas são sempre os máximos regionais da imagem.

Árvore de componentes - Aplicações

Através de regras para a poda de ramos da árvore é possível gerar filtros conexos (ex: *area opening*, *volume opening*) e segmentações.

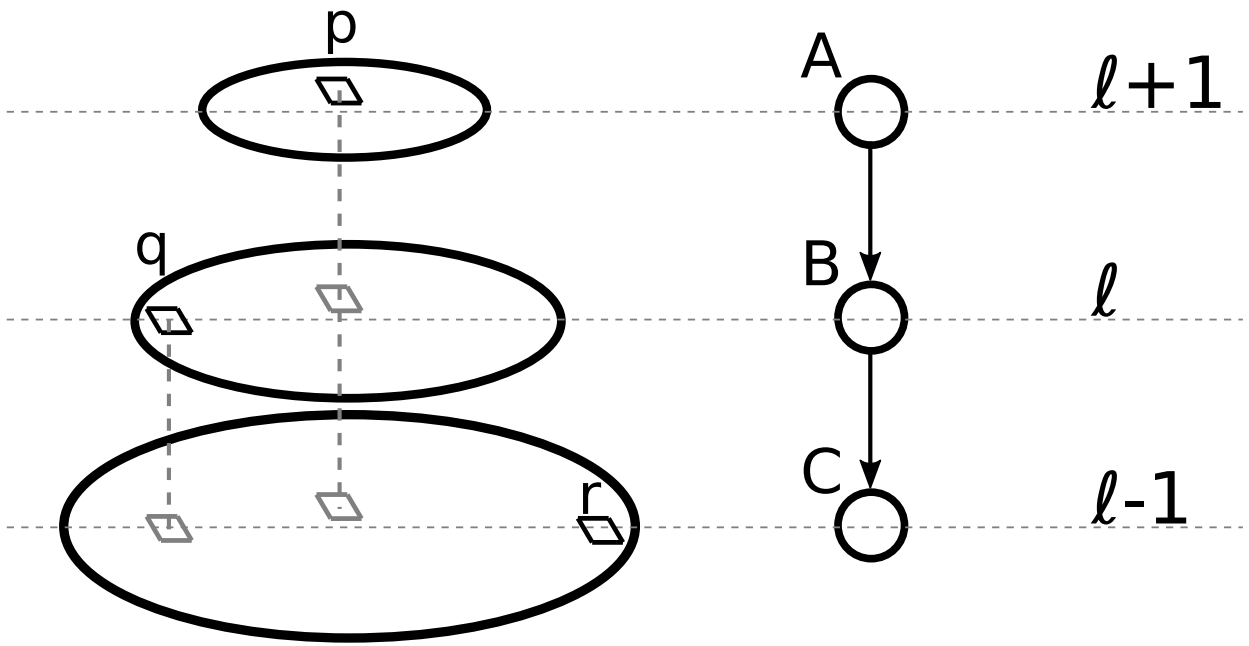


Max-tree

- *Max-tree* é uma representação compacta da árvore de componentes, onde cada pixel é armazenado em um único nó da árvore, correspondendo ao nível mais alto em que ele aparece na árvore de componentes.
- Esta árvore é conhecida como *max-tree*, pois as folhas são sempre os máximos regionais da imagem.

Max-tree

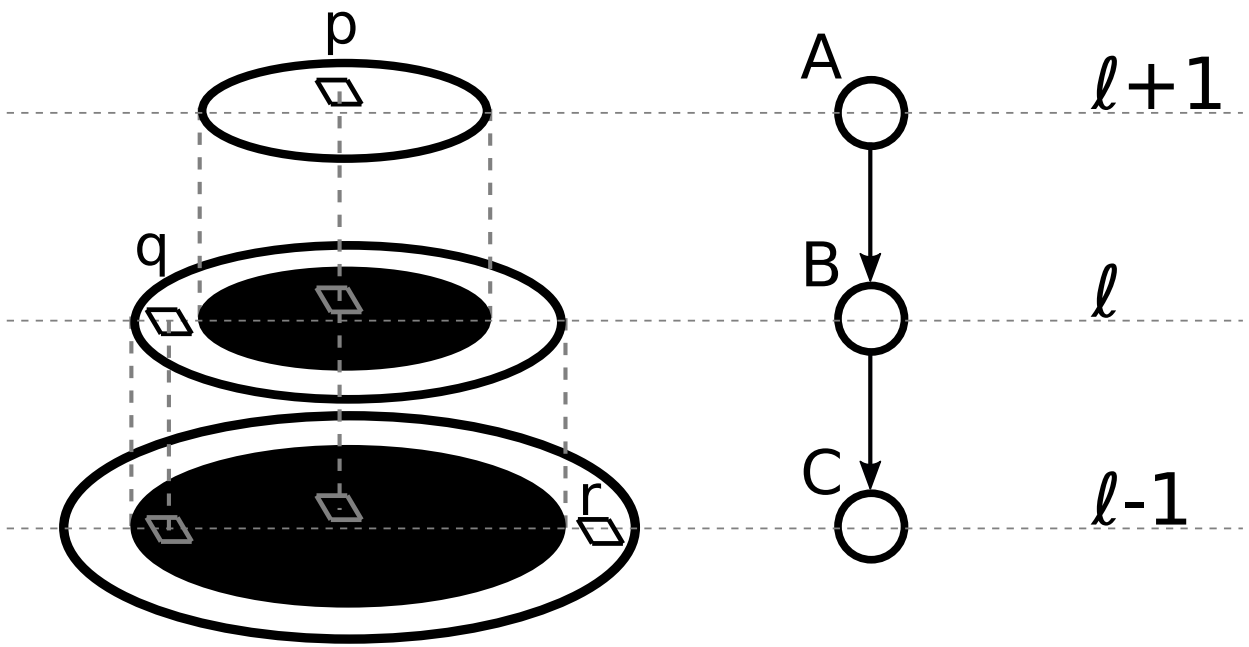
Árvore de componentes:



- $\{p\} \subset A$
- $\{p, q\} \subset B$
- $\{p, q, r\} \subset C$

Max-tree

Max-tree:



- $\{p\} \subset A$
- $\{q\} \subset B$
- $\{r\} \subset C$

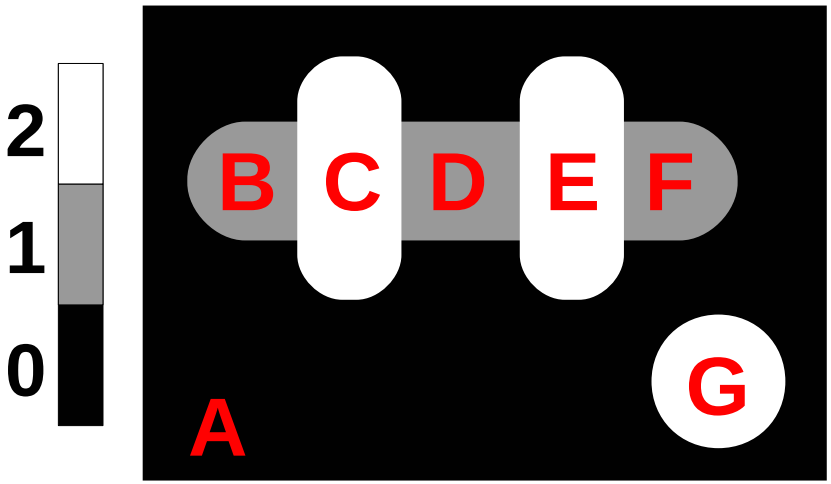
Max-tree

Os nós da *max-tree* são conjuntos de pixels de mesmo brilho (mas não necessariamente conexos).

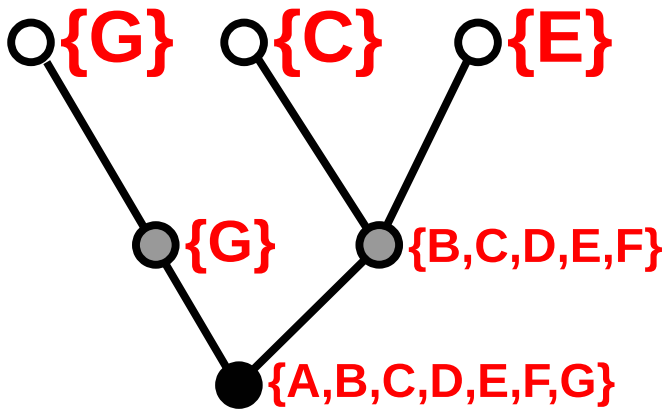
- $I(p) = I(q)$ (mesmo brilho) é uma condição necessária (mas não suficiente) para dois pixels p e q pertencerem ao mesmo nó da *max-tree*.
- Pertencer a um mesmo platô (*flat zone*)[1] é uma condição suficiente (mas não necessária) para dois pixels pertencerem ao mesmo nó da *max-tree*.

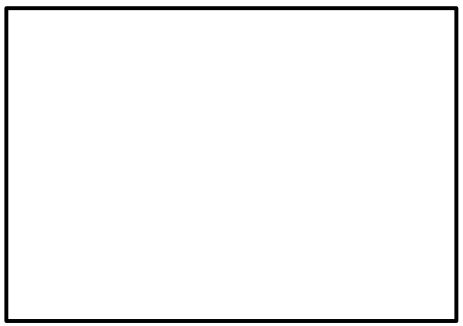
[1] Flat zone é um componente conexo maximal, onde todos os pixels possuem o mesmo valor (mesma altitude).

Exemplo 1:

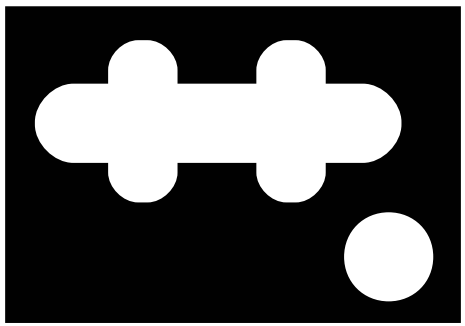


Árvore de componentes completa:

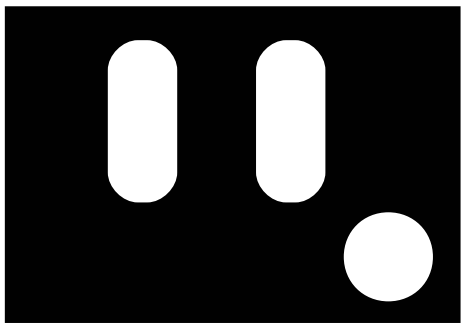




$\hat{B}_0$

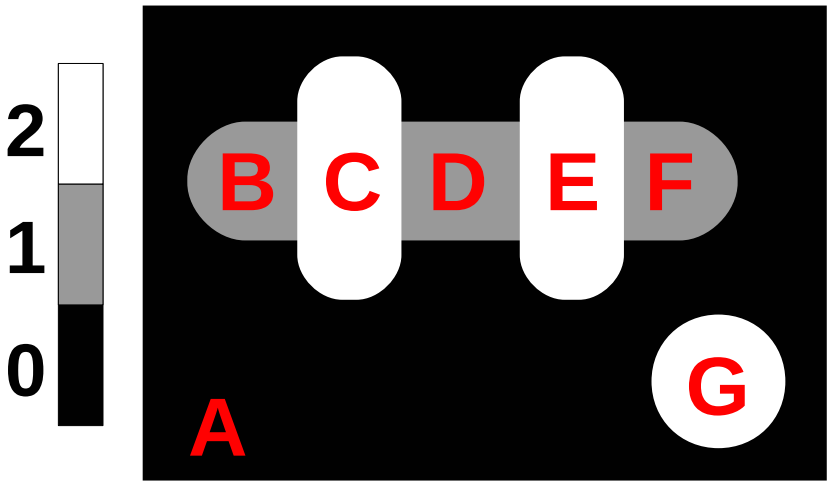


$\hat{B}_1$

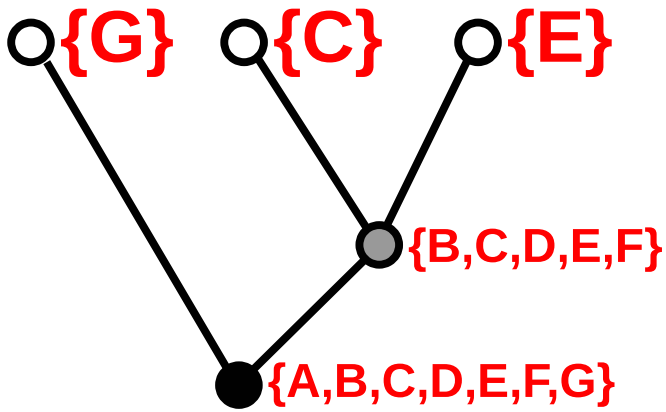


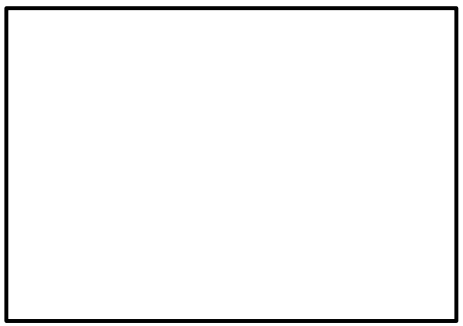
$\hat{B}_2$

Exemplo 1:

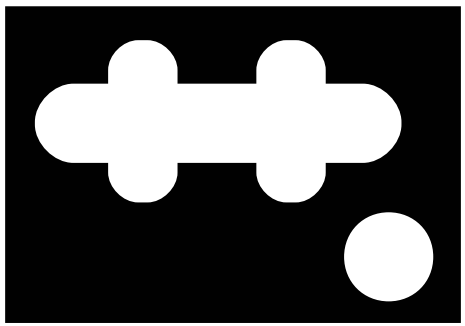


Árvore de componentes:

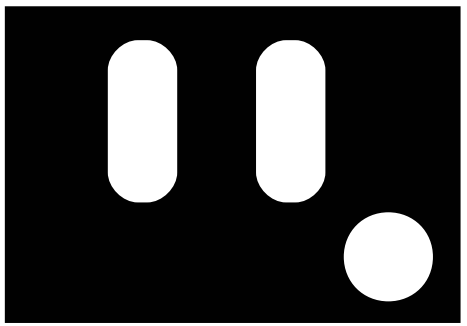




$\hat{B}_0$

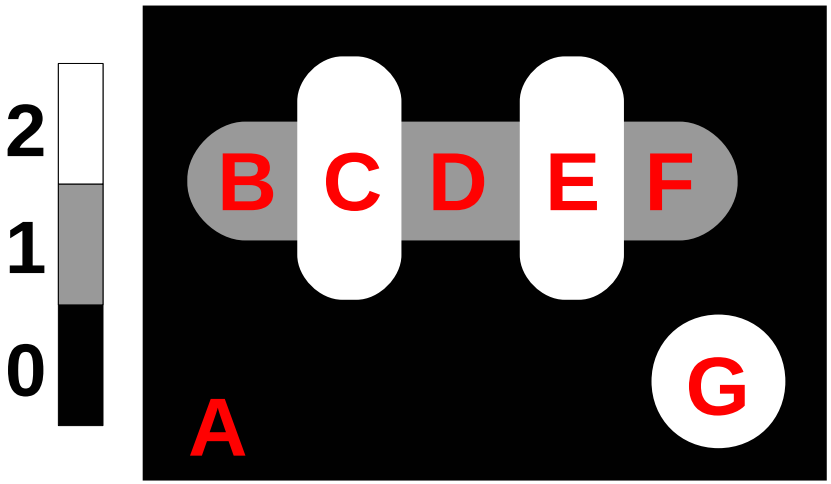


$\hat{B}_1$

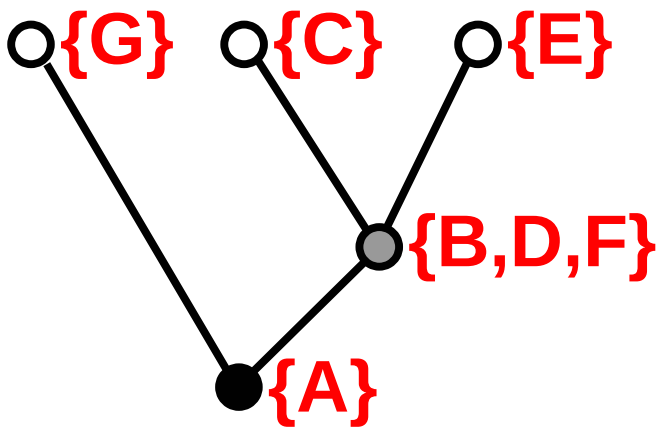


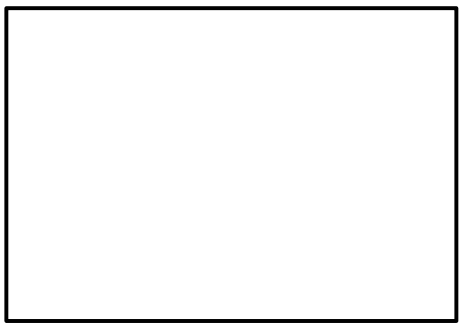
$\hat{B}_2$

Exemplo 1:

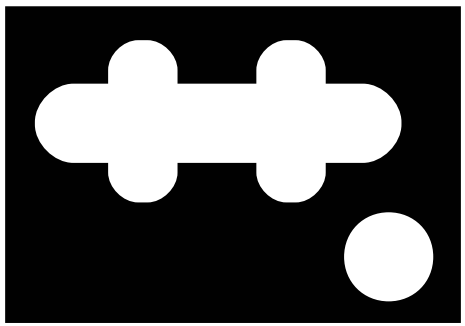


Max-tree:

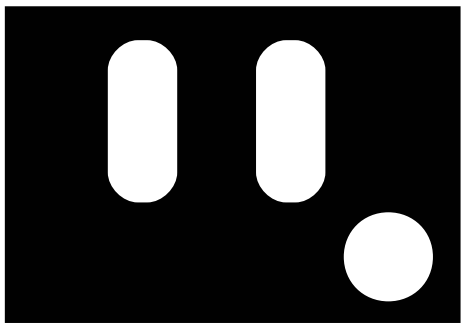




$\hat{B}_0$

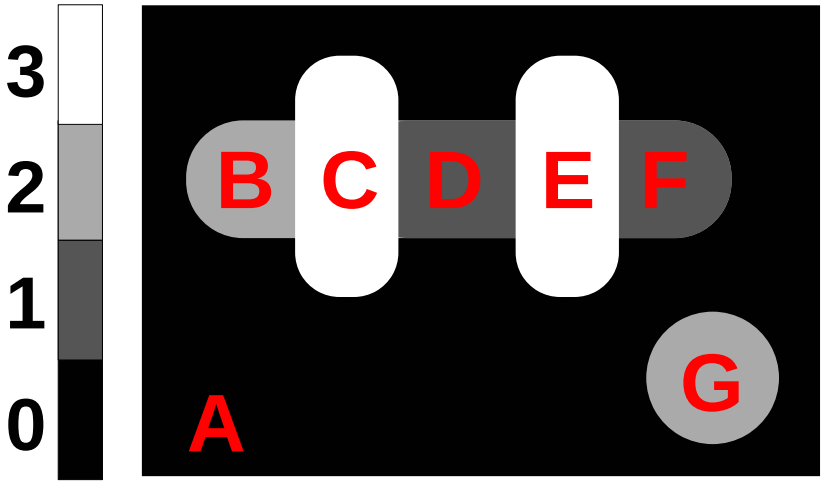


$\hat{B}_1$

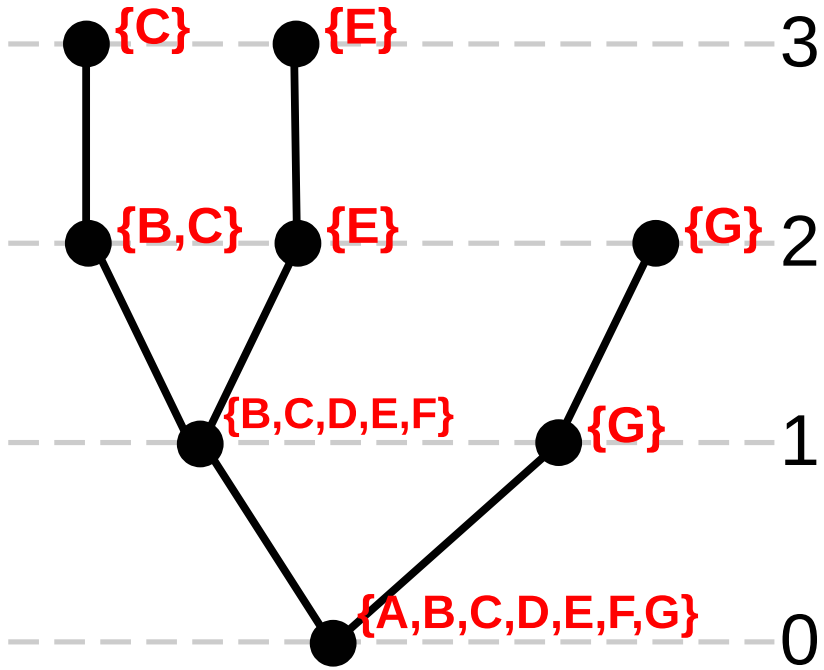


$\hat{B}_2$

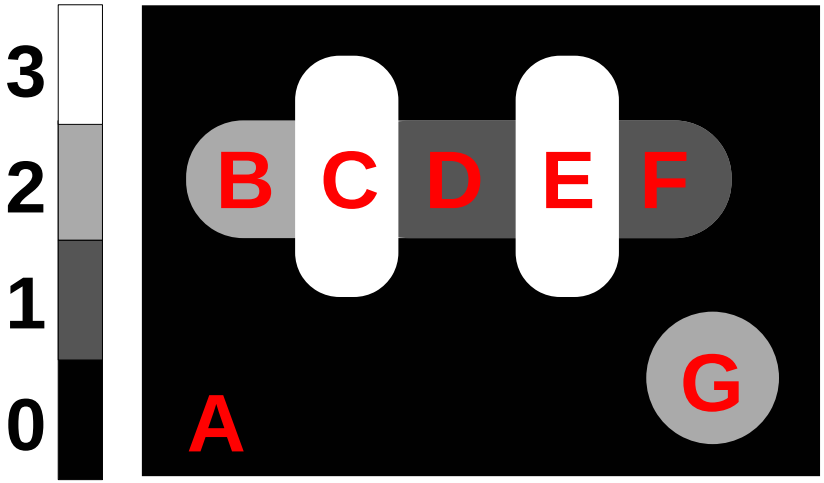
Exemplo 2:



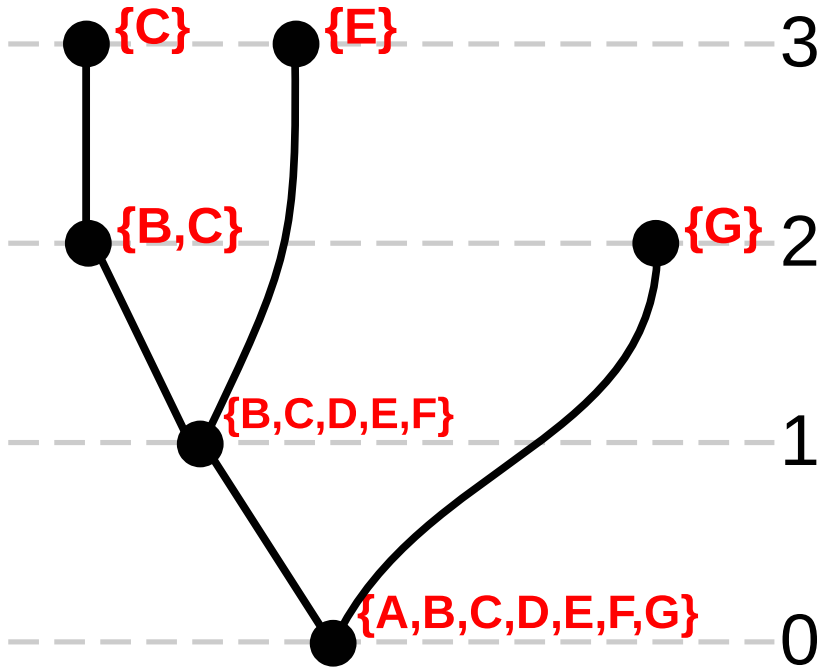
Árvore de componentes completa:



Exemplo 2:

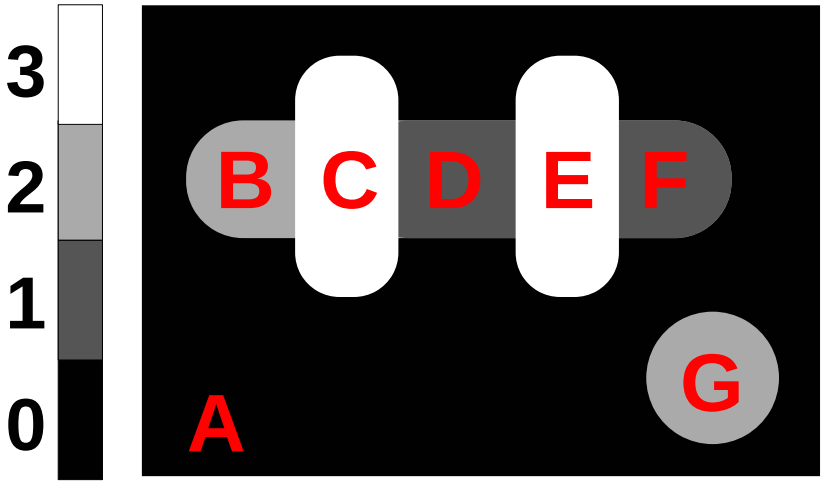


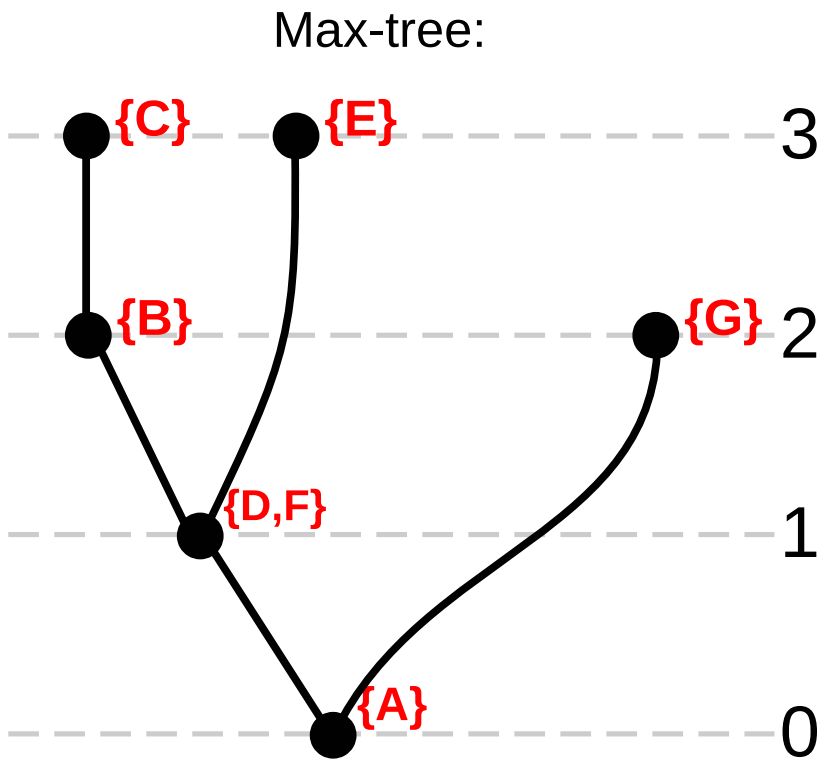
Árvore de componentes:



Max-tree

Exemplo 2:





Max-tree - Algoritmo

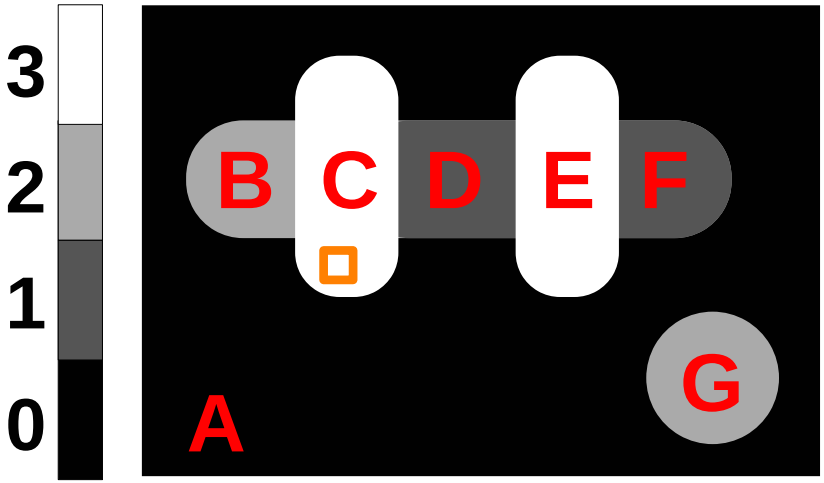
- O algoritmo processa os pixels em ordem decrescente de brilho (das folhas da árvore em direção a raiz),
- Um único representante, dado pelo mapa $\hat{R}$, é obtido em cada *flat zone*, considerando uma política LIFO entre vizinhos de mesmo brilho.
- Porém, um nó da *max-tree* pode conter várias *flat zones* desconexas de mesmo brilho l, contanto que elas pertençam ao mesmo componente na limiarização em $\hat{B}_l$. Logo, essas *flat zones* são tratadas como conjuntos disjuntos que devem ser unidos em $\hat{R}$.

Max-tree - Algoritmo

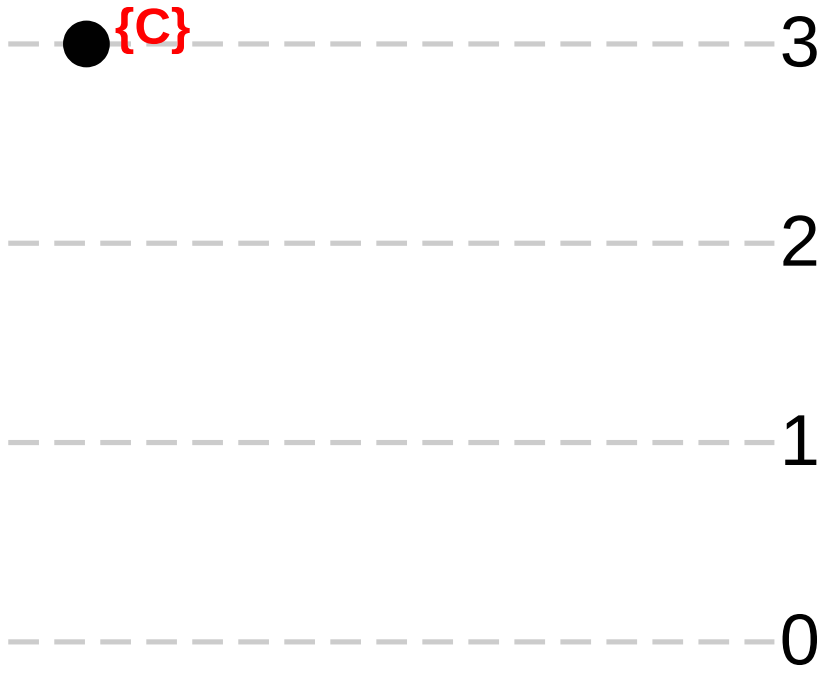
- Relações de parentesco entre nós são identificadas apenas quando pixels sendo processados no nível atual l encontram vizinhos em níveis superiores l^* já processados ($l^* > l$).
- Quando um pixel de um nó x no nível l encontra um vizinho de um nó y de nível maior l^*, existem três situações:
  - O nó y ainda não tem pai, logo x adota y como filho, ou
  - y já tem pai, e o brilho do seu ancestral de menor nível é igual ao brilho de x, portanto x e o ancestral de y pertencem ao mesmo nó, ou
  - y já tem pai, e o brilho do seu ancestral de menor nível é maior que o brilho de x, portanto x é pai deste ancestral de y.

Max-tree - Algoritmo

Construção passo a passo:

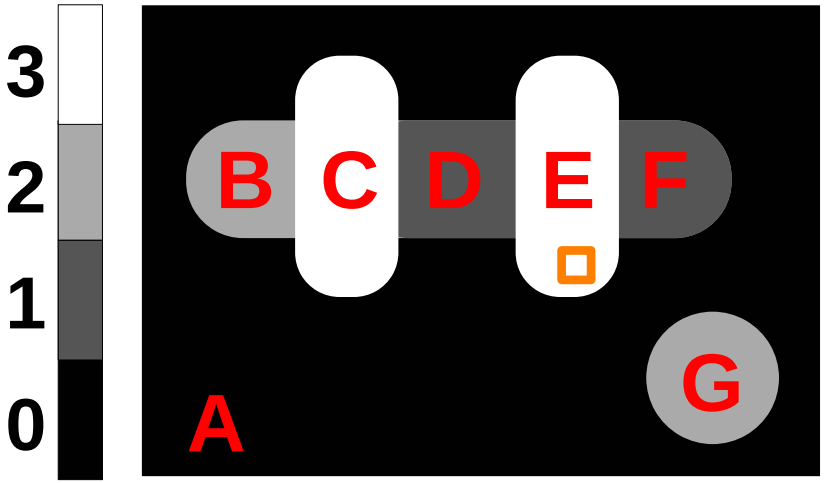


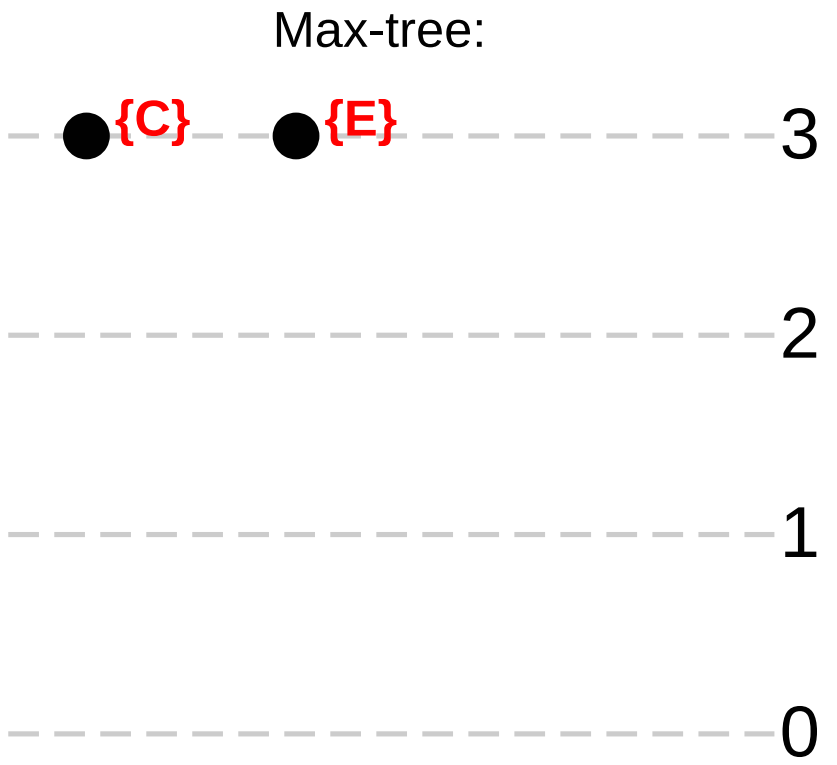
Max-tree:



Max-tree - Algoritmo

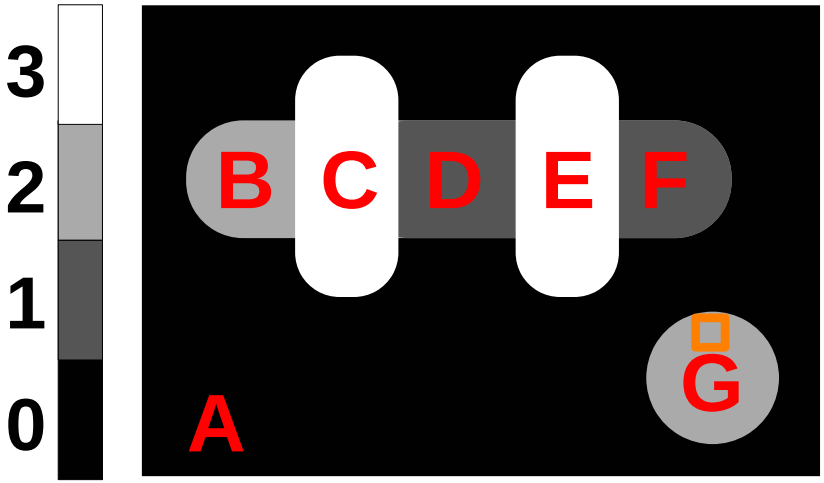
Construção passo a passo:

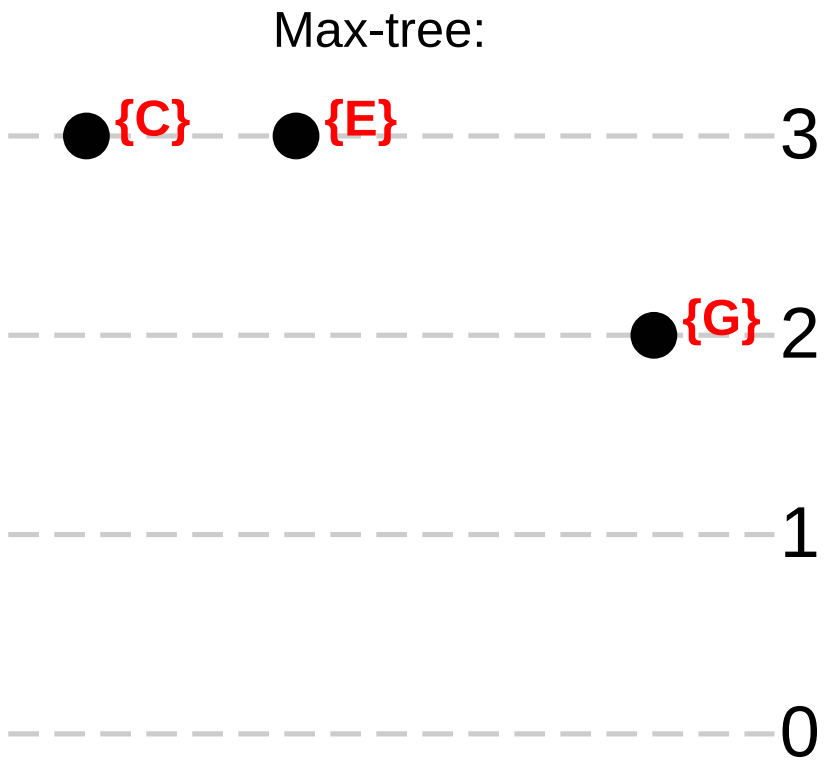




Max-tree - Algoritmo

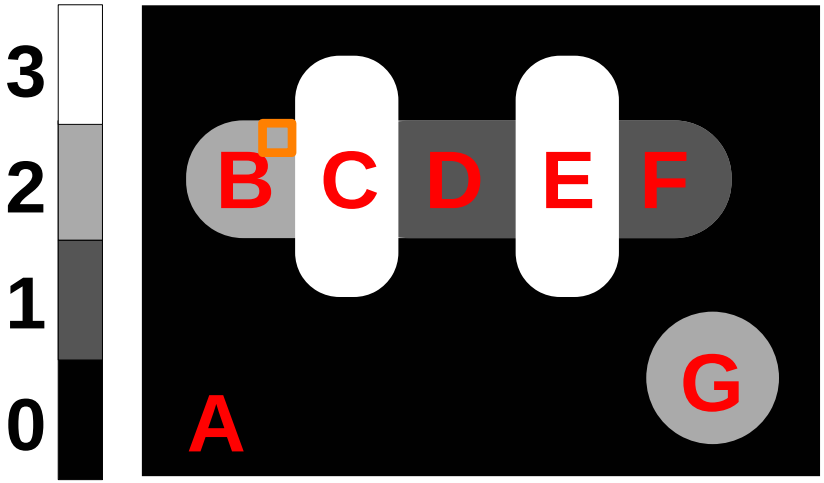
Construção passo a passo:

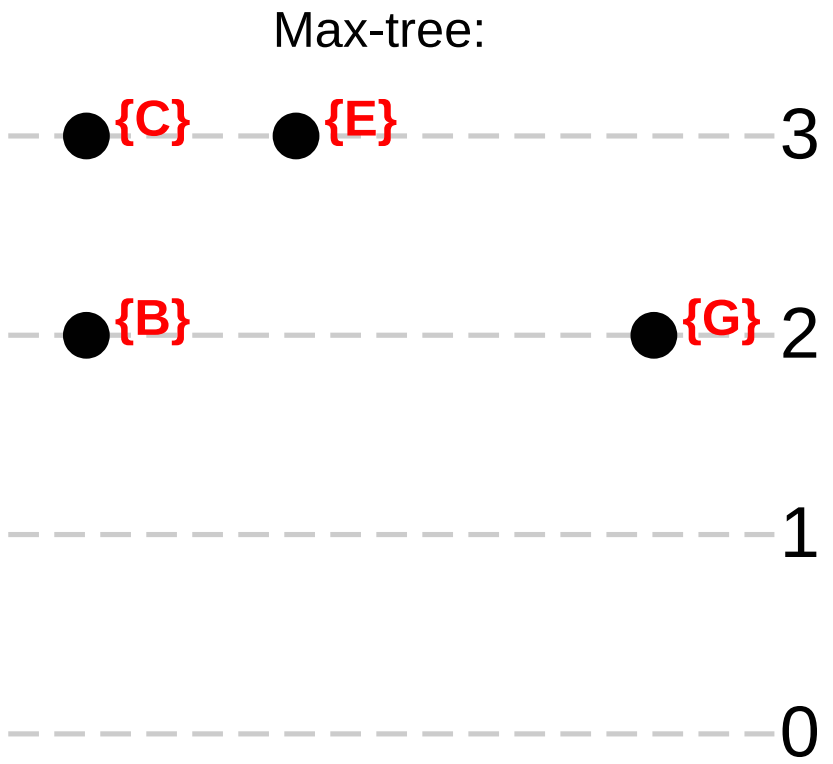




Max-tree - Algoritmo

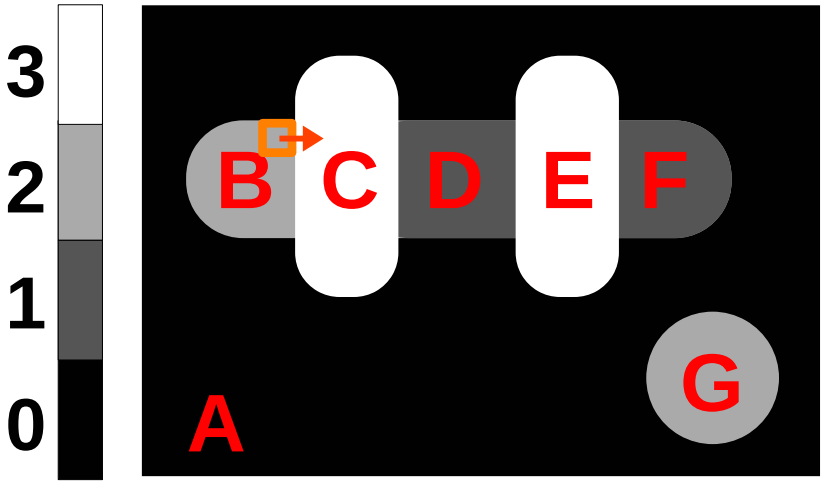
Construção passo a passo:

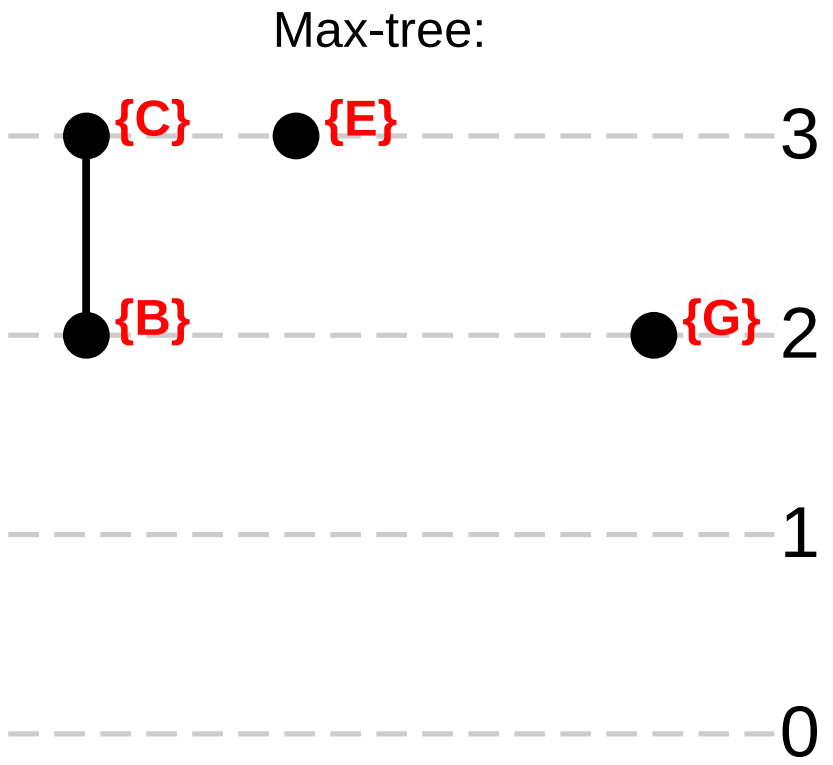




Max-tree - Algoritmo

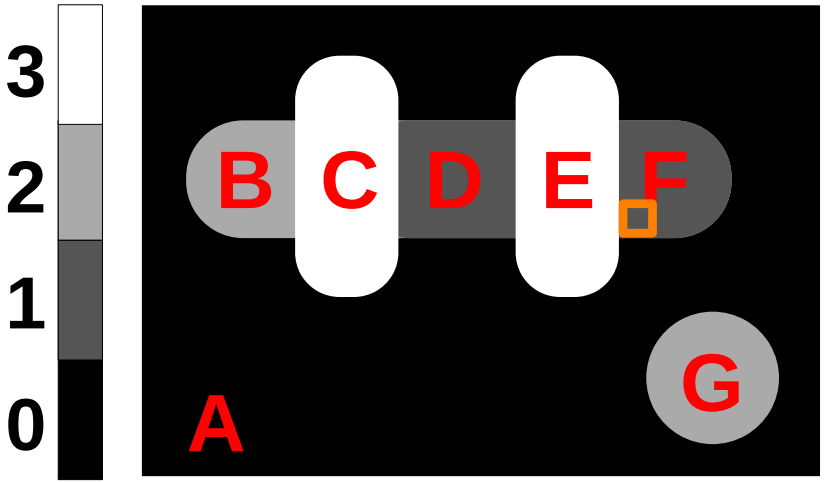
Construção passo a passo:

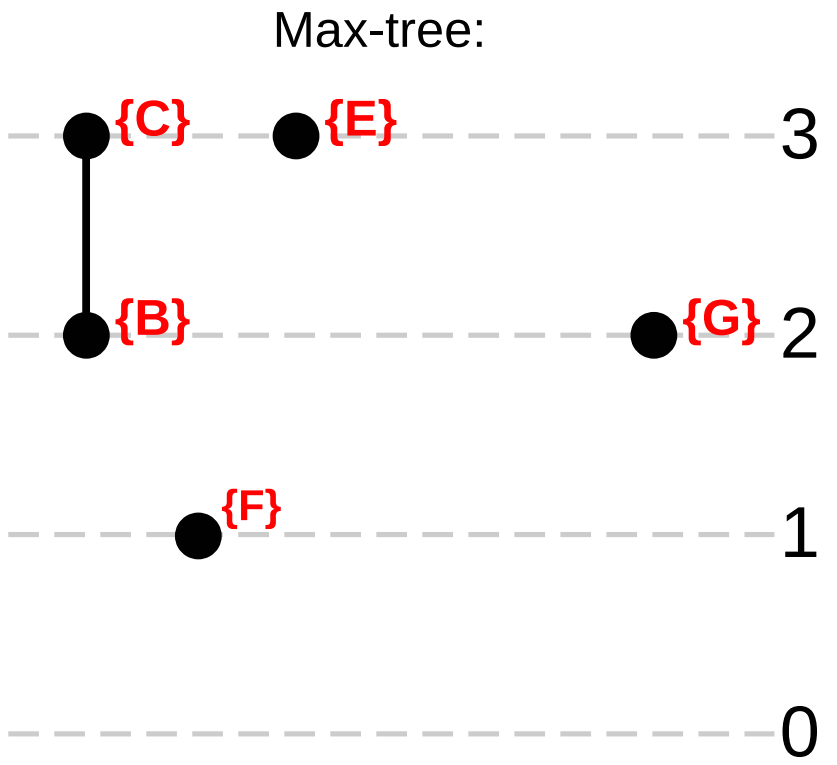




Max-tree - Algoritmo

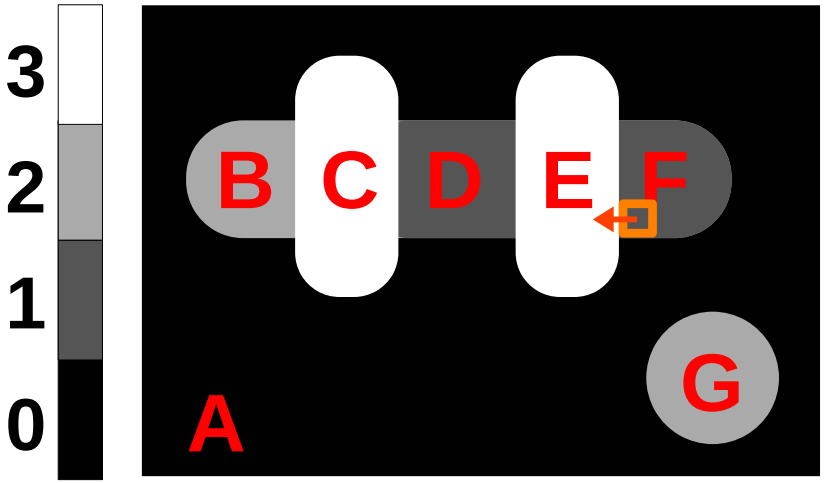
Construção passo a passo:

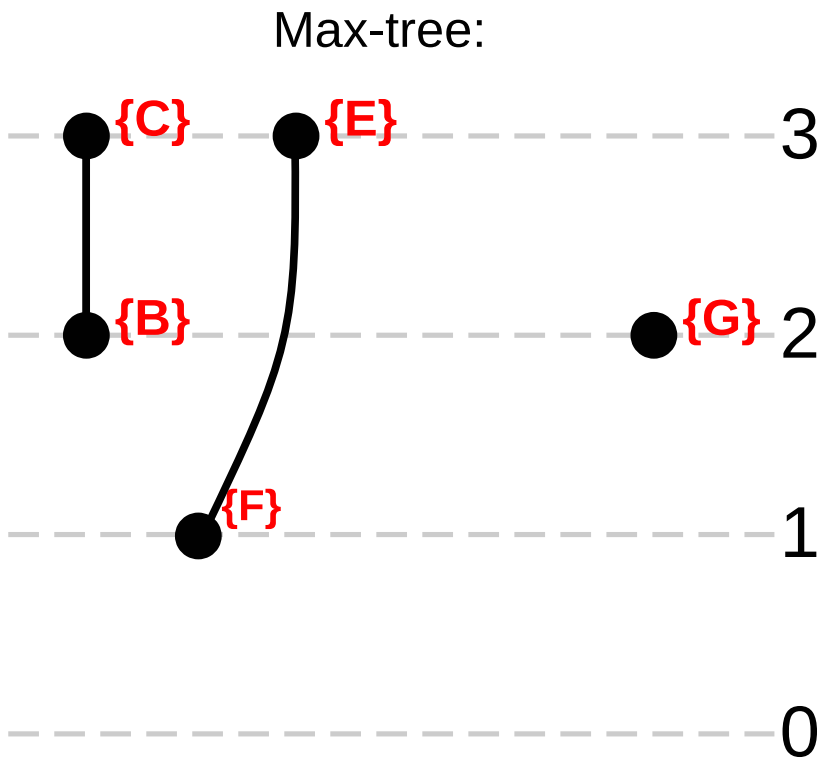




Max-tree - Algoritmo

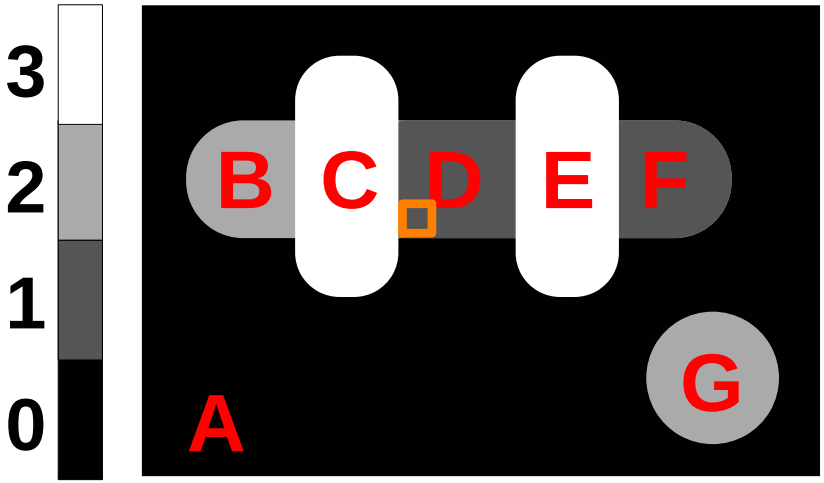
Construção passo a passo:

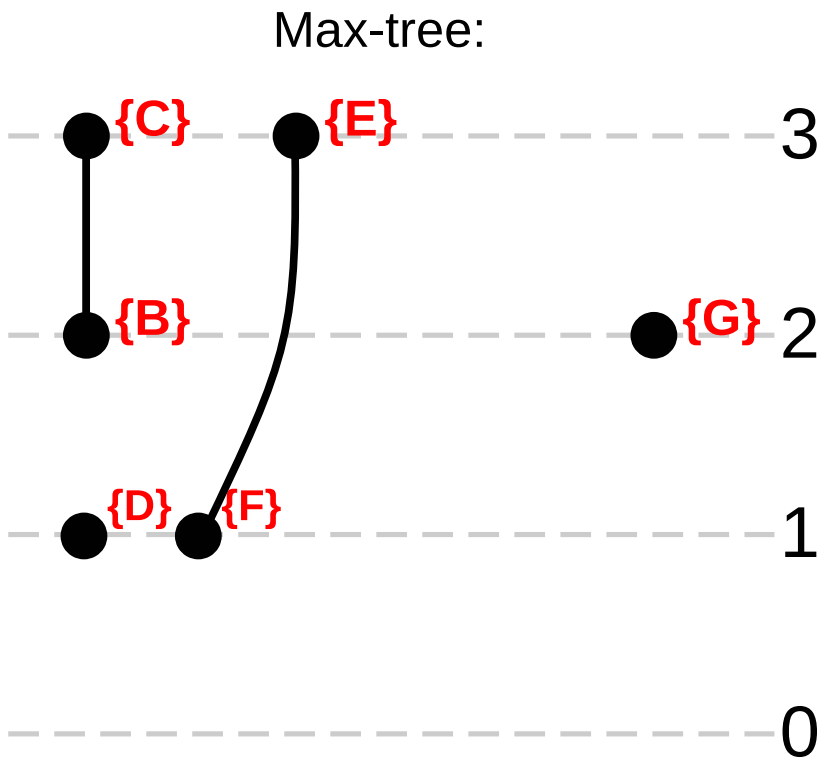




Max-tree - Algoritmo

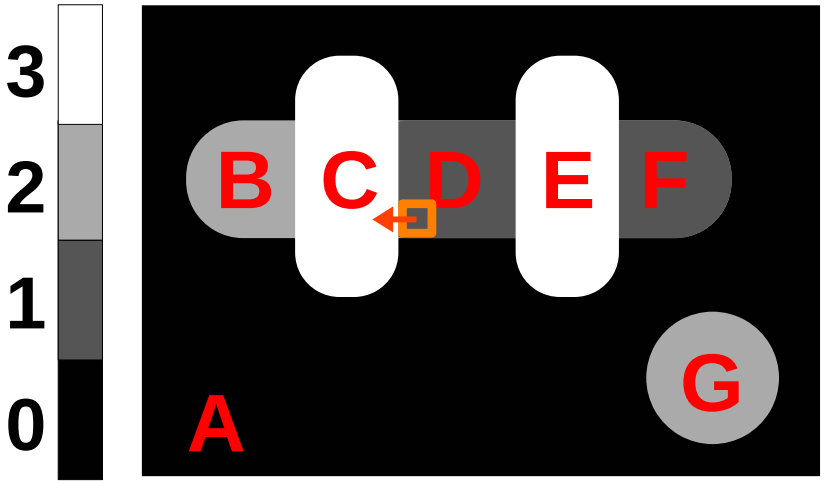
Construção passo a passo:

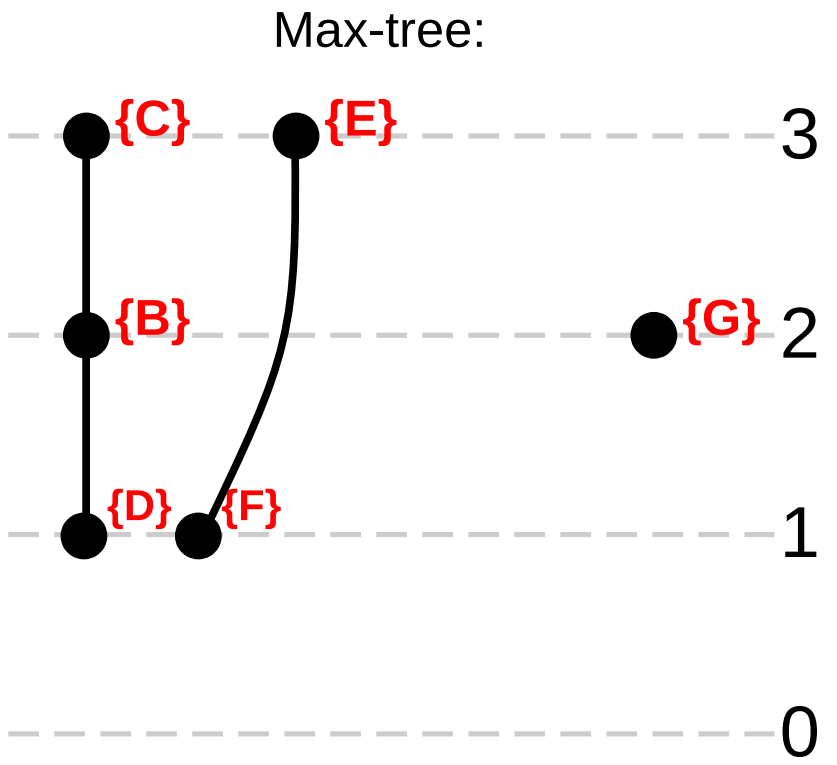




Max-tree - Algoritmo

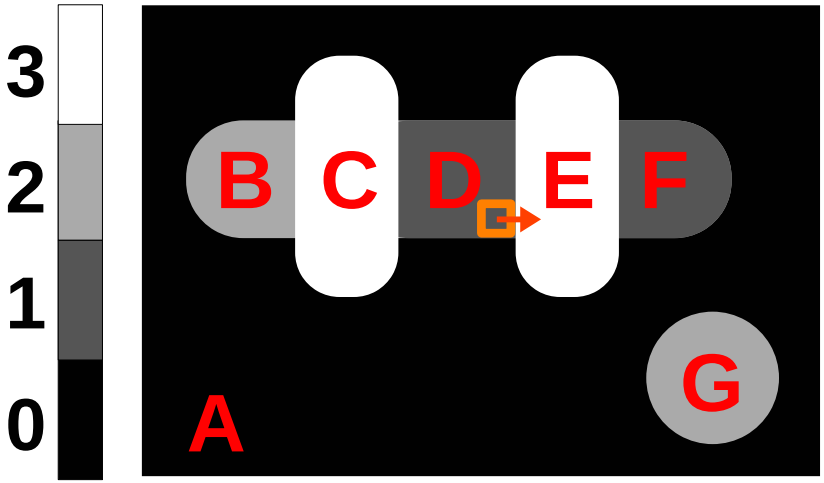
Construção passo a passo:

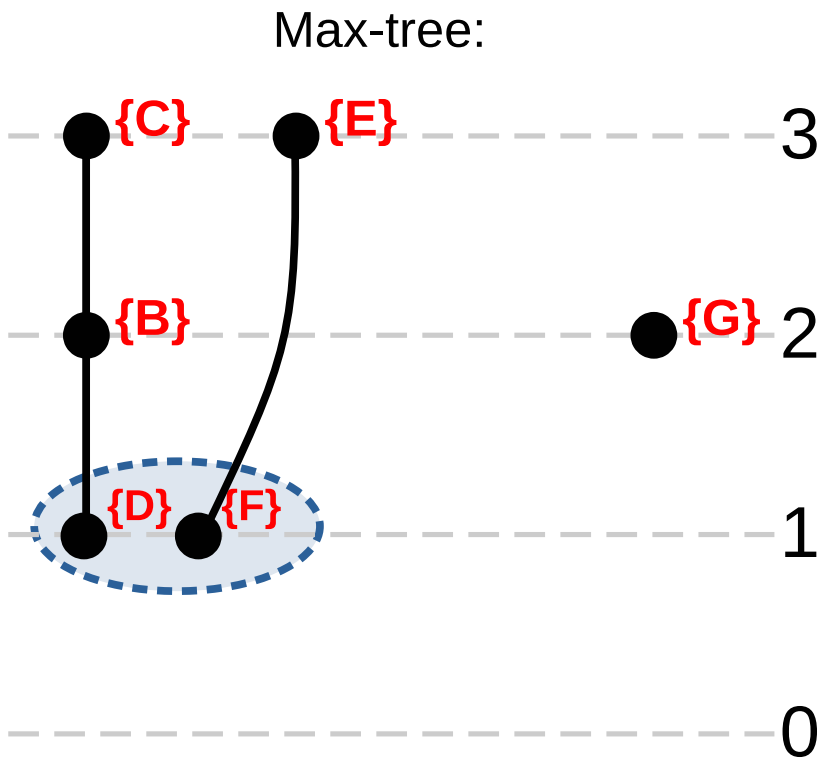




Max-tree - Algoritmo

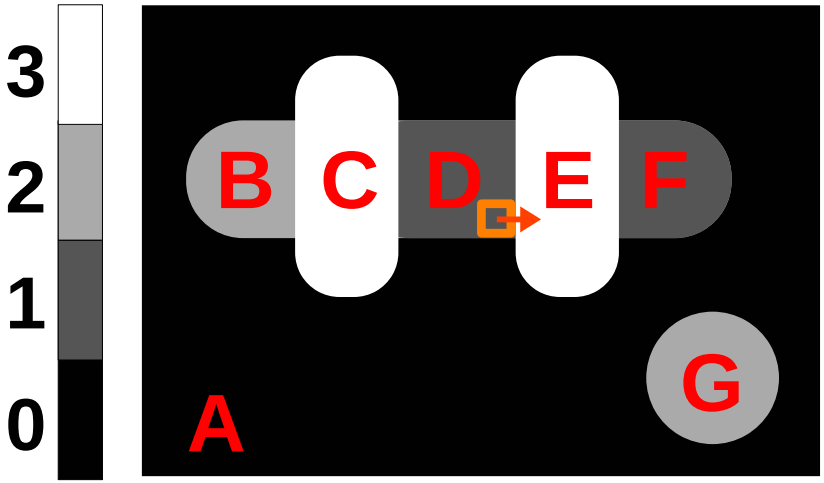
Construção passo a passo:

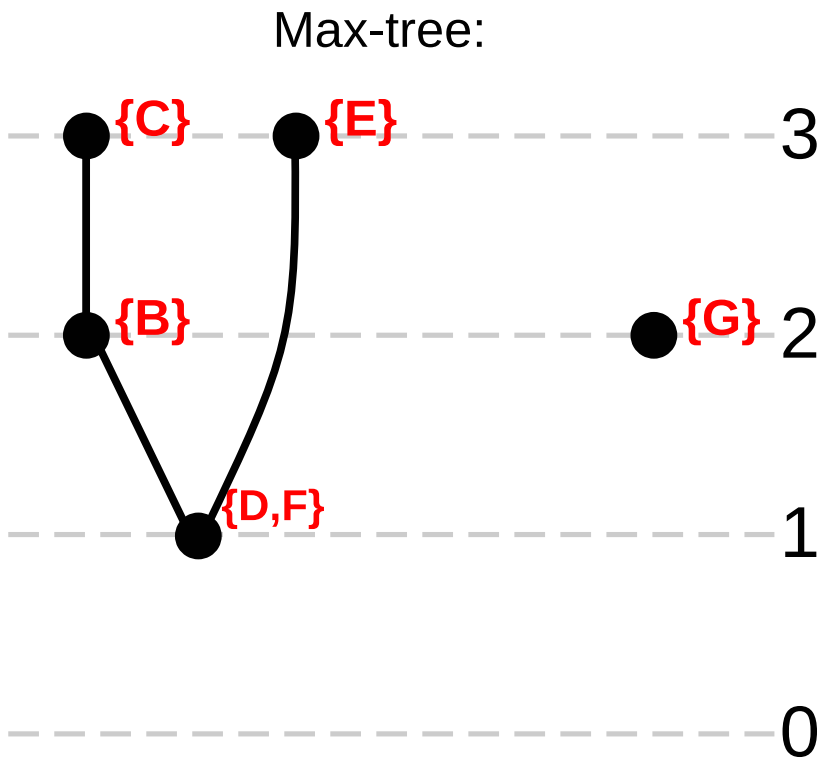




Max-tree - Algoritmo

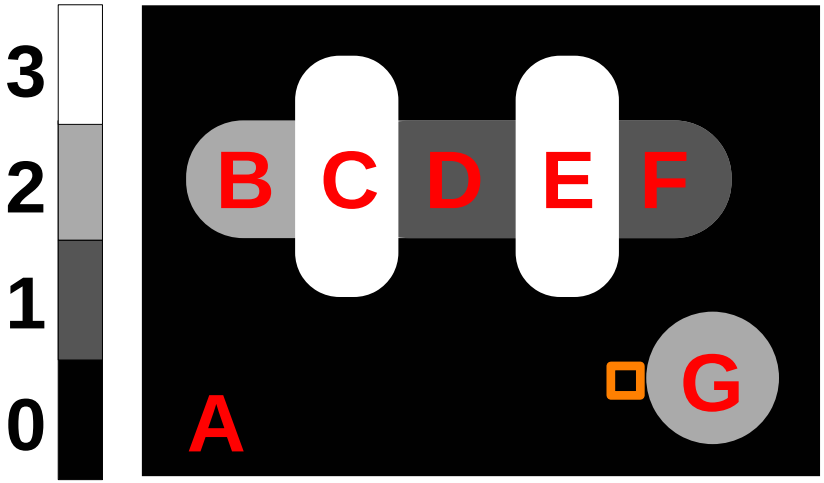
Construção passo a passo:

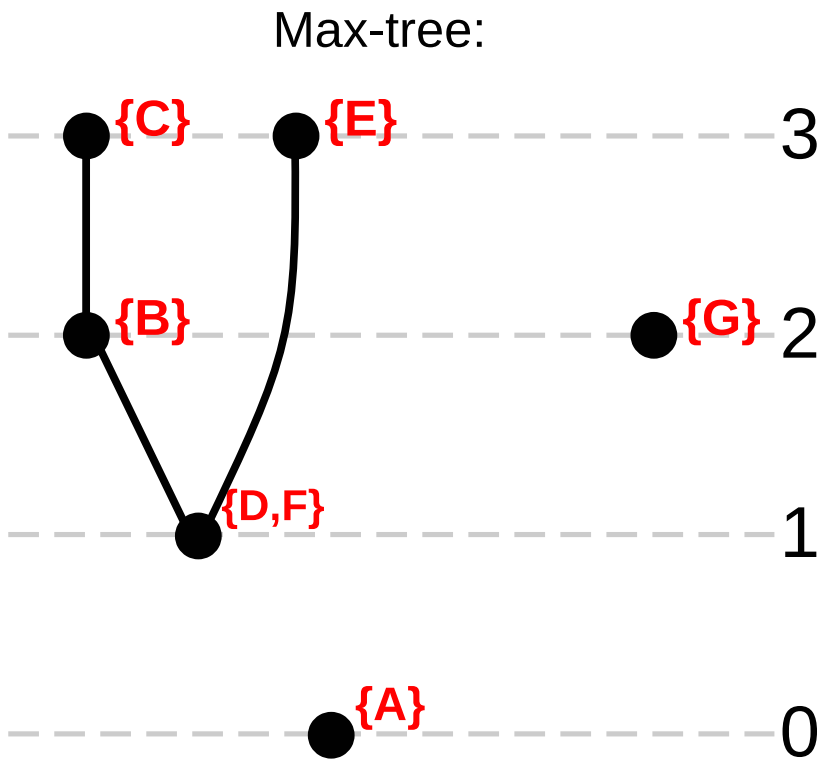




Max-tree - Algoritmo

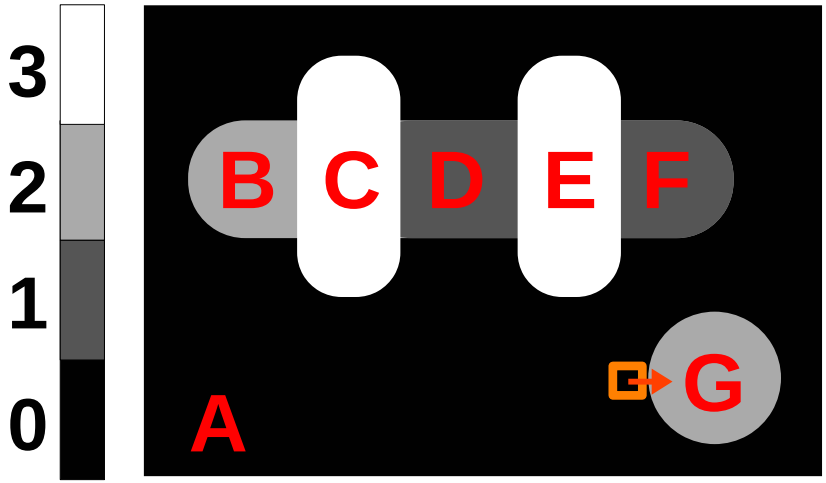
Construção passo a passo:

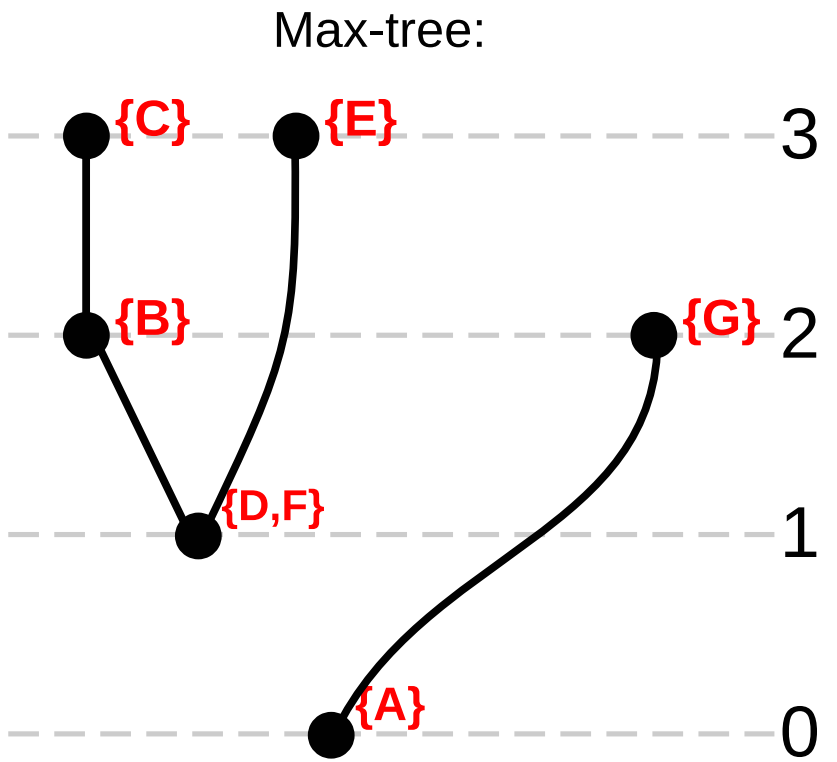




Max-tree - Algoritmo

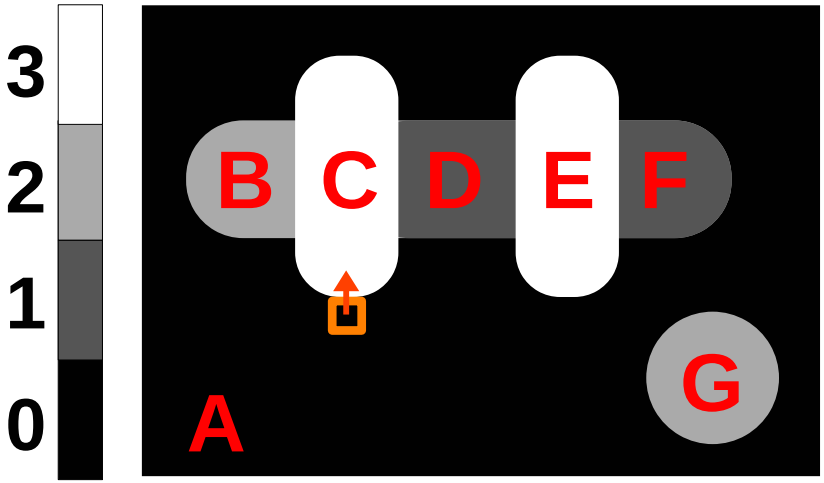
Construção passo a passo:

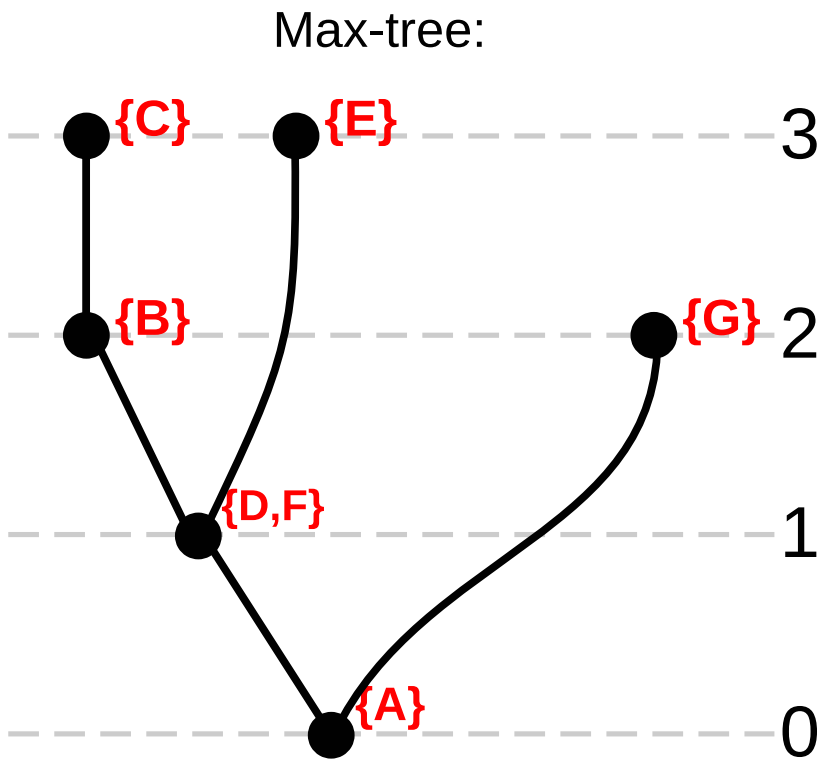




Max-tree - Algoritmo

Construção passo a passo:





Max-tree - Algoritmo parte I

Algoritmo para construção de uma max-tree
Entrada: Imagem $\hat{I} = (\mathcal{D}_I, I)$ e adjacência $\mathcal{A}$.
Saída: Imagens $\hat{P} = (\mathcal{D}_I, P)$ de parentesco entre nós, e $\hat{R} = (\mathcal{D}_I, R)$ de representantes dos nós.
Auxiliares: Fila de prioridade Q com política de desempate LIFO, e imagem $\hat{N} = (\mathcal{D}_I, N)$ do número de elementos por nó.

Max-tree - Algoritmo parte II

01 **Para Cada** $t \in \mathcal{D}_I$, **Faça**
02 $P(t) \leftarrow nil$, $R(t) \leftarrow t$, $N(t) \leftarrow 1$, e insira t em Q.
03 **Enquanto** $Q \neq \emptyset$, **Faça**
04 Remova um pixel s de Q tal que $I(s)$ seja máximo.
05 **Faça** $r_s \leftarrow Representante(\hat{R}, s)$.
06 **Para Cada** $t \in \mathcal{A}(s)$, **Faça**
07 **Se** $I(s) = I(t)$, **Então**
08 **Se** $t \in Q$, **Então**
09 **Se** $R(t) = t$, **Então** $N(r_s) \leftarrow N(r_s) + 1$.
10 Remova t de Q, $R(t) \leftarrow r_s$, e insira t em Q.
11 **Senão , Se** $I(s) < I(t)$, **Então**
12 $r_t \leftarrow Representante(\hat{R}, t)$.
13 $r \leftarrow RaizAtual(\hat{P}, \hat{R}, r_t)$.

Max-tree - Algoritmo parte III

14 **Se** $r = nil$, **Então** $P(r_t) \leftarrow r_s$.

15 **Senão** , **Então**

16 **Se** $I(r) = I(r_s)$, **Então**

17 **Se** $r \neq r_s$, **Então** $Junte(\hat{R}, \hat{N}, r, r_s)$.

18 **Senão** , $P(r) \leftarrow r_s$.

19 **Para Cada** $t \in \mathcal{D}_I$, **Faça** $R(t) \leftarrow Representante(\hat{R}, t)$.

Max-tree - Algoritmo parte IV

Algoritmo para encontrar o representante com compressão:
$Representante(\hat{R}, s)$

01 **Se** $R(s) = s$, **Então**
02 **Retorne** s.
03 **Senão** , **Então**
04 **Retorne** $R(s) \leftarrow Representante(\hat{R}, R(s))$.

Algoritmo para unir componentes de mesmo nível:
$Junte(\hat{R}, \hat{N}, r, r_s)$

01 **Se** $N(r_s) \leq N(r)$, **Então**
02 $R(r_s) \leftarrow r$, $N(r) \leftarrow N(r) + N(r_s)$, e $r_s \leftarrow r$.
03 **Senão** , **Então**
04 $R(r) \leftarrow r_s$ e $N(r_s) \leftarrow N(r_s) + N(r)$.

P.S.: A variável r_s deve ser passada por referência.

Max-tree - Algoritmo parte V

Algoritmo para encontrar a raiz da subárvore atual (ancestral) de um nó:
$RaizAtual(\hat{P}, \hat{R}, r_t)$

01 $r_1 \leftarrow r_2 \leftarrow P(r_t)$
02 **Enquanto** $r_2 \neq nil$, **Faça**
03 $\quad r_1 \leftarrow r_2 \leftarrow Representante(\hat{R}, r_2).$
04 $\quad r_2 \leftarrow P(r_2).$
05 **Retorne** r_1.

Max-tree - Algoritmo

- No final, o número de nós da *max-tree* é dado pelo número de representantes em $\hat{R}$ (i.e., pixels p tais que $R(p) = p$).
- O mapa $\hat{P}$ pode então ser usado para encontrar a raiz da árvore, o pai, e os filhos de cada nó.
- Após criar a árvore, o mapa de representantes deve ser convertido em um mapa de componentes, onde cada pixel p aponta para o nó correspondente na *max-tree*.
- Várias informações adicionais (ex: nível de cinza, número de pixels do nó, total de pixels da subárvore) podem ser armazenadas nos nós da árvore, de modo a favorecer critérios de poda para fins de filtragem.

Min-tree

Decomposição por limiarização:

- **Lower level sets:** $\hat{B}^l = (\mathcal{D}_I, B^l), l = 1, \ldots, I_{max} + 1$, onde $B^l(p) = 1$ se $I(p) < l$ e $B^l(p) = 0$ caso contrário.

- **Upper level sets:** $\hat{B}_l = (\mathcal{D}_I, B_l), l = 0, 1, \ldots, I_{max}$, onde $B_l(p) = 1$ se $I(p) \geq l$ e $B_l(p) = 0$ caso contrário.

Definimos dois conjuntos $\mathcal{L}(\hat{I})$ e $\mathcal{U}(\hat{I})$ composto pelos componentes conexos (CCs) dos conjuntos de nível inferior e superior de $\hat{I}$:

- $\mathcal{L}(\hat{I}) = \{\tau \in CC(\hat{B}^k) : k \in \{1, \ldots, I_{max} + 1\}\}$ e
- $\mathcal{U}(\hat{I}) = \{\tau \in CC(\hat{B}_k) : k \in \{0, \ldots, I_{max}\}\}$,

onde $CC(X)$ denota os conjuntos de 4 ou 8-CCs de X.

Min-tree

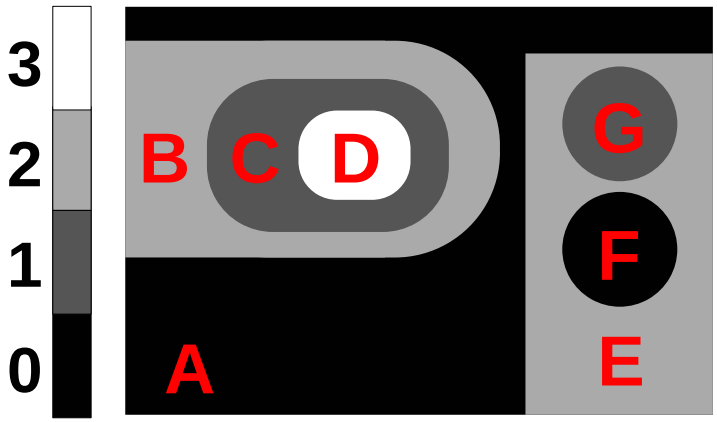
Os pares ordenados que consistem nos CCs dos conjuntos de nível inferior e superior e a relação de inclusão de conjuntos usual, isto é, $\left(\mathcal{L}(\hat{I}), \subseteq\right)$ e $\left(\mathcal{U}(\hat{I}), \subseteq\right)$, induzem duas árvores duais chamadas árvores de componentes (*component trees*).

- As representações compactas das árvores componentes $\left(\mathcal{L}(\hat{I}), \subseteq\right)$ e $\left(\mathcal{U}(\hat{I}), \subseteq\right)$ são conhecidas como, respectivamente, *min-tree* e *max-tree*.
- É possível combiná-las em uma única árvore para obter a chamada árvore de formas (*tree of shapes*).

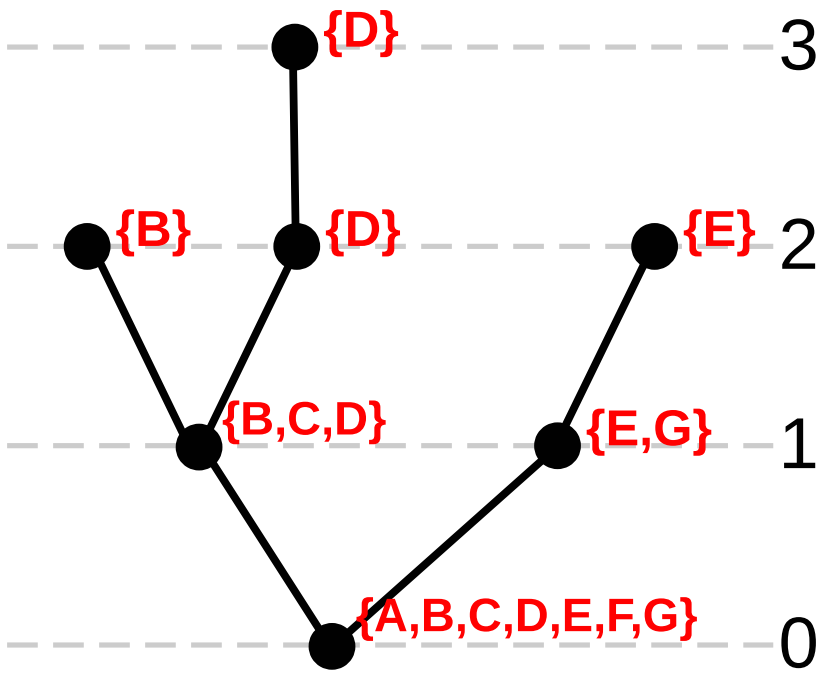
Tree of Shapes

- Seja sat o operador de saturação (ou preenchimento de buracos).
- Então, seja $\mathcal{SAT}(\hat{I}) = \{sat(\tau) : \tau \in \mathcal{L}(\hat{I}) \cup \mathcal{U}(\hat{I})\}$ a família de CCs dos conjuntos de nível superior e inferior com buracos preenchidos.
- Os elementos de $\mathcal{SAT}(\hat{I})$, chamados de formas, são aninhados ou disjuntos pela relação de inclusão e assim o par $\left(\mathcal{SAT}(\hat{I}), \subseteq\right)$ induz uma árvore que é chamada de árvore de formas (*tree of shapes*).

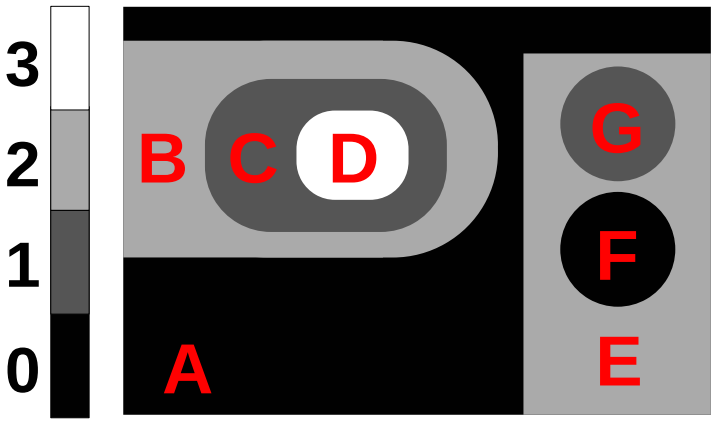
Para conjuntos de nível superior $\left(\mathcal{U}(\hat{I}), \subseteq\right)$:



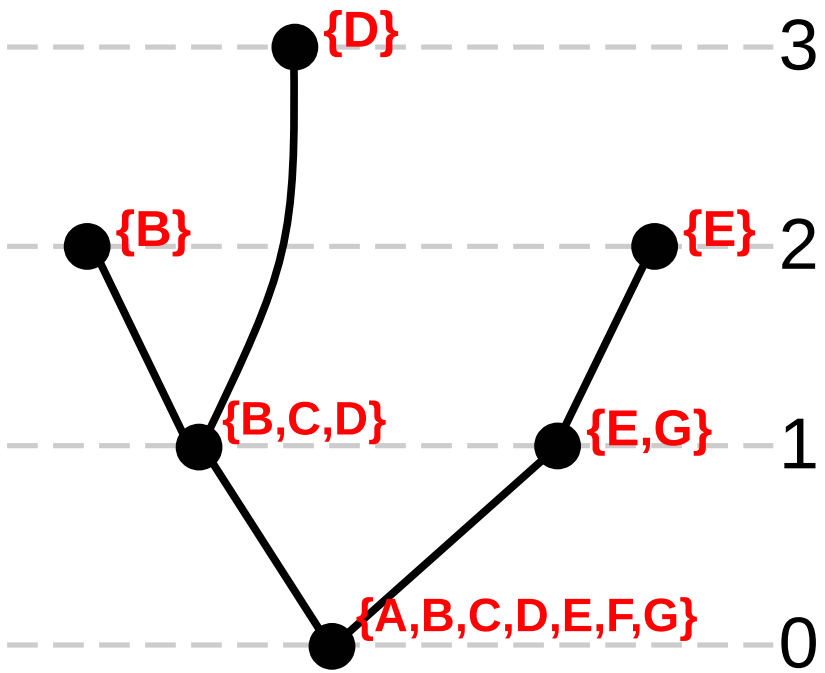
Árvore de componentes completa:



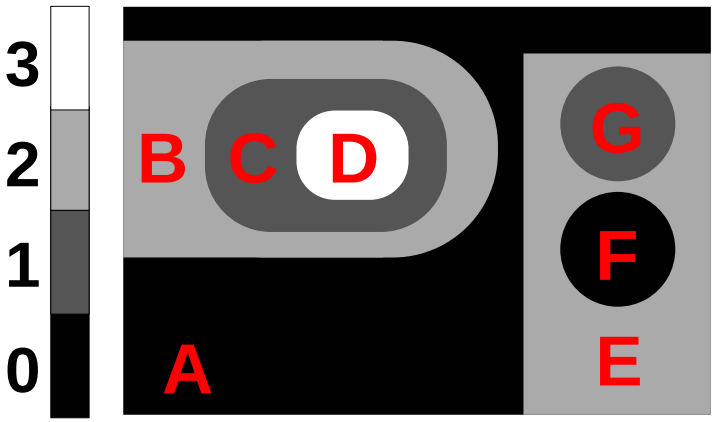
Para conjuntos de nível superior $\left(\mathcal{U}(\hat{I}), \subseteq\right)$:



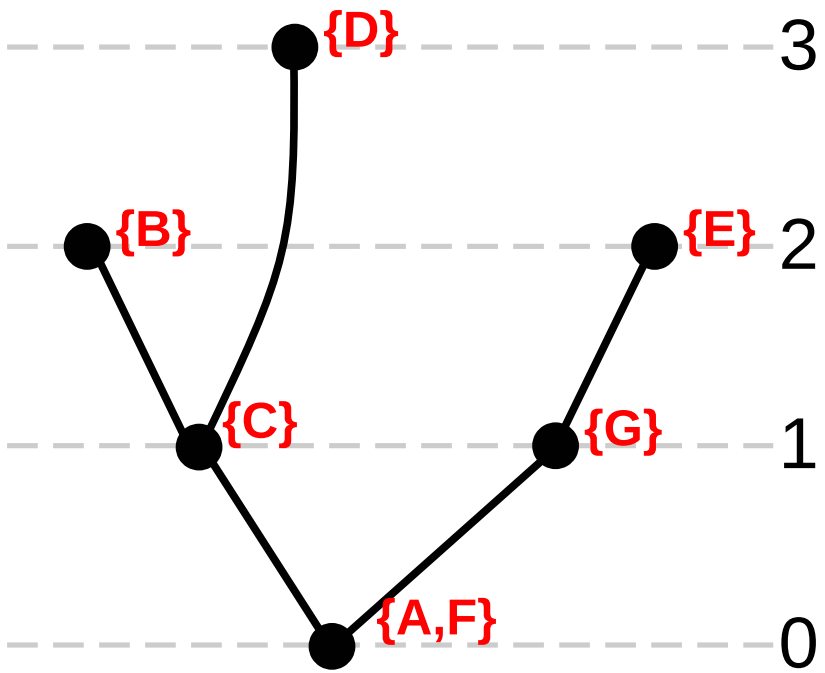
Árvore de componentes:



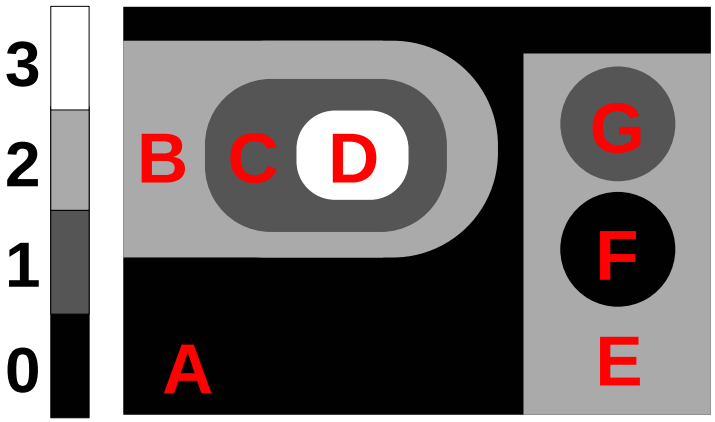
Para conjuntos de nível superior $\left(\mathcal{U}(\hat{I}), \subseteq\right)$:



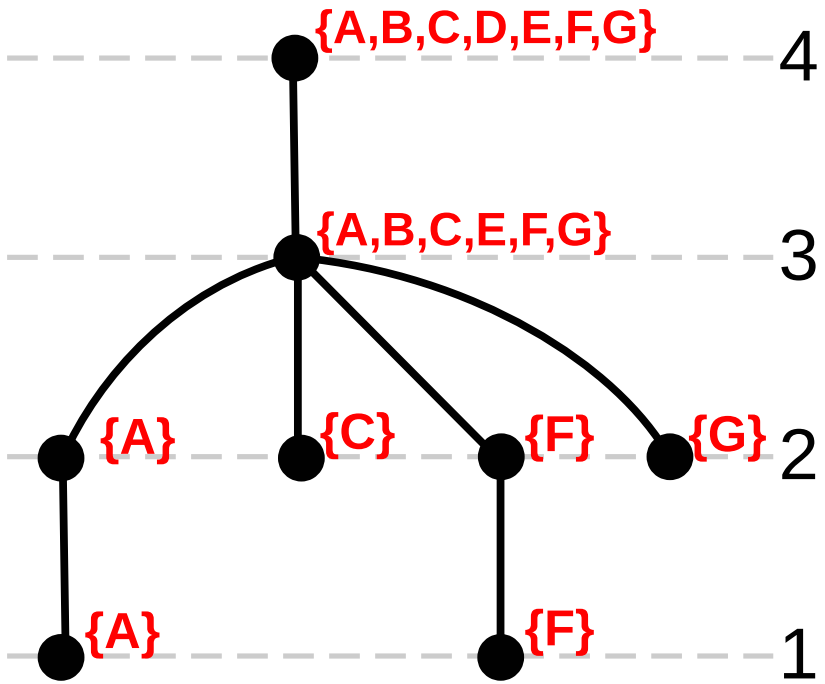
Max-tree:



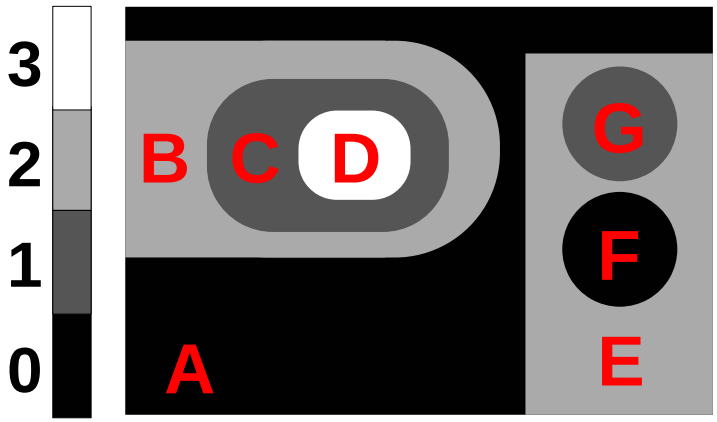
Para conjuntos de nível inferior $\left(\mathcal{L}(\hat{I}), \subseteq\right)$:



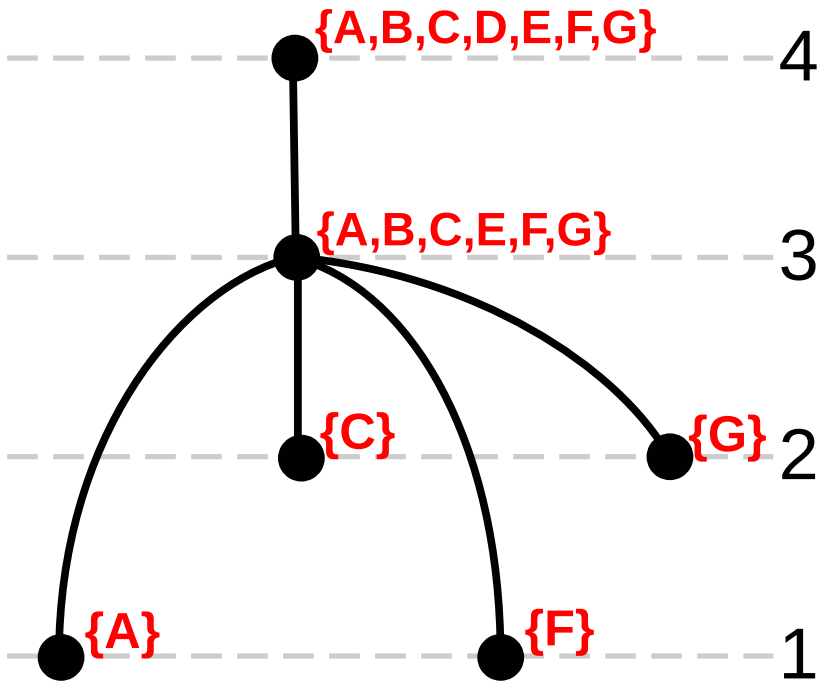
Árvore de componentes completa:



Para conjuntos de nível inferior $\left(\mathcal{L}(\hat{I}), \subseteq\right)$:

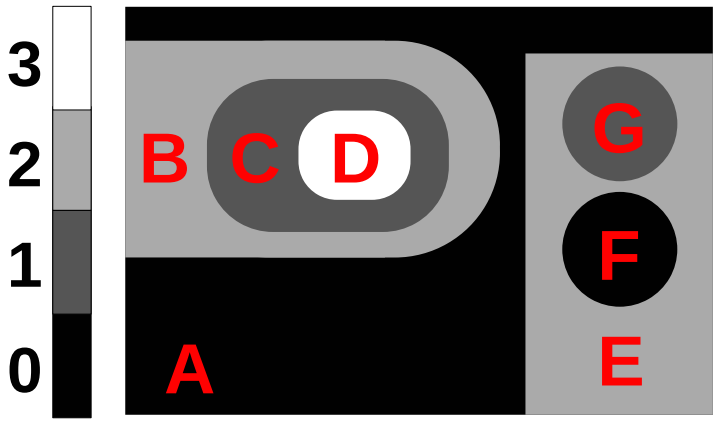


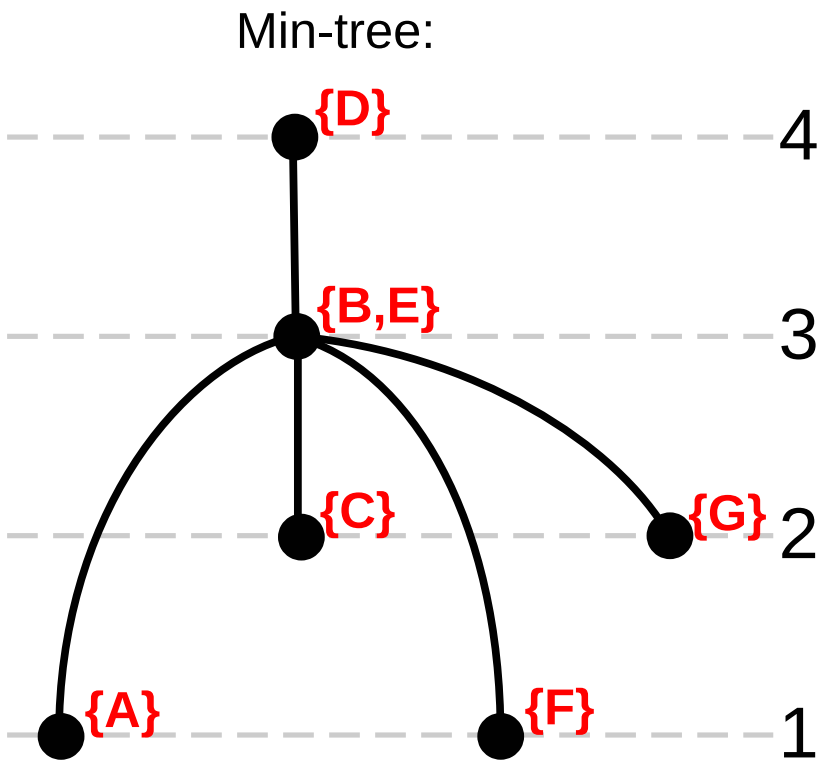
Árvore de componentes:



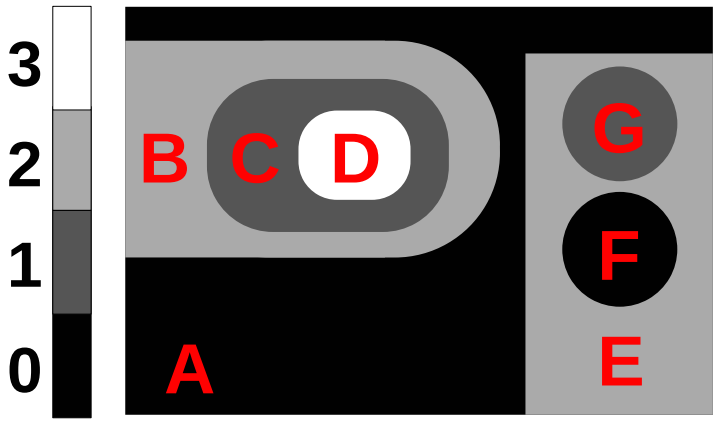
Max-tree, Min-tree e Tree of Shapes

Para conjuntos de nível inferior $\left(\mathcal{L}(\hat{I}), \subseteq\right)$:

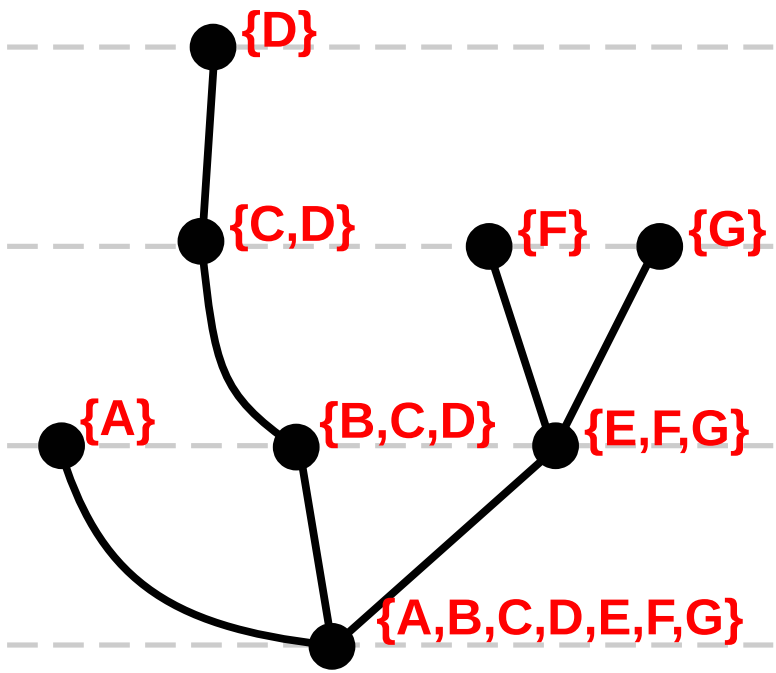




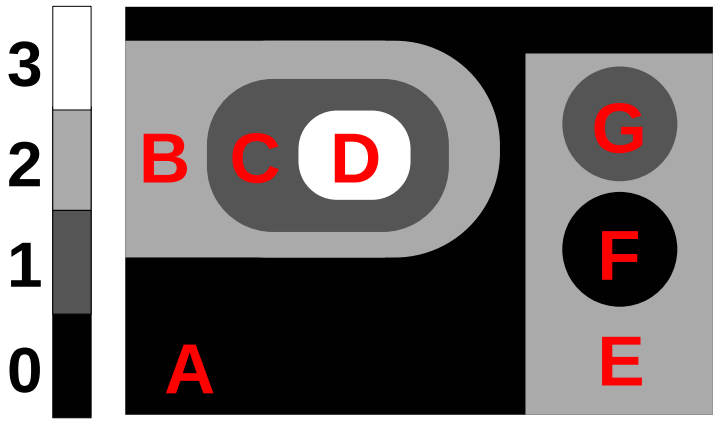
Para conjuntos de nível superior e inferior $\left(\mathcal{SAT}(\hat{I}), \subseteq\right)$:



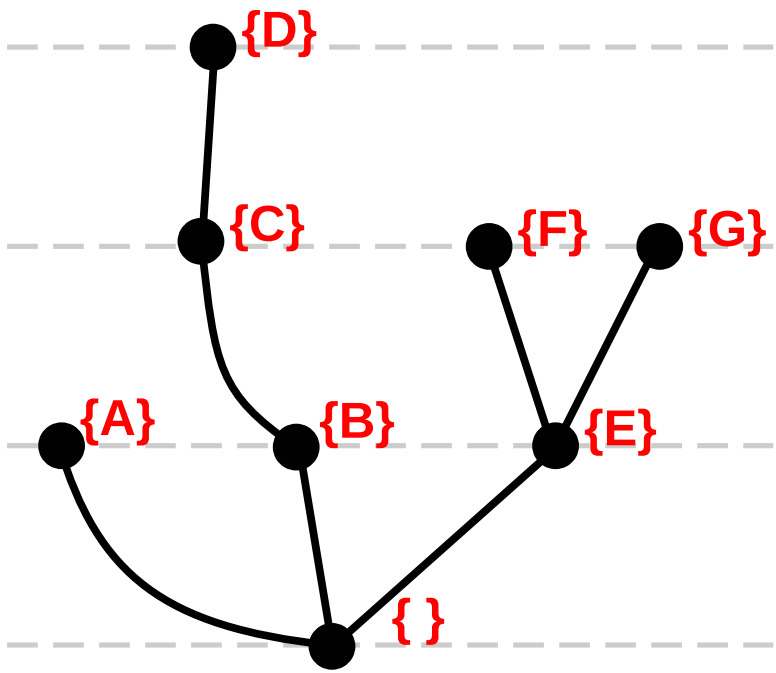
Tree of shapes:



Para conjuntos de nível superior e inferior $\left(\mathcal{SAT}(\hat{I}), \subseteq\right)$:



Tree of shapes (compacta):



Bibliografia

- *Prof. Alexandre Xavier Falcão*,
  Anotações de aula
  (MO815 - Processamento de Imagens usando Grafos)
  http://www.ic.unicamp.br/~afalcao/mo815-grafos/index.html
- *L. Najman, and M. Couprie*,
  Building the component tree in quasi-linear time,
  IEEE TIP, vol. 15, no. 11, pp. 3531-3539, 2006.
  http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=1709995
- *P. Salembier, A. Oliveras, L. Garrido*,
  Antiextensive Connected Operators for Image and Sequence Processing,
  IEEE Transactions on Image Processing, vol. 7, no. 4, 1998.