

Fluxo Máximo/Corte Mínimo (Min-Cut/Max-Flow Algorithm)

Prof. Dr. Paulo A. V. de Miranda
Instituto de Matemática e Estatística (IME),
Universidade de São Paulo (USP)
pmiranda@vision.ime.usp.br



Introdução

Introdução

Definição

Fluxo no grafo

Fluxo total no grafo

Visão geral da
solução

Redes Residuais

Exemplo:

augmenting paths

Alg. básico de

Min-Cut/Max-Flow

Análise de

Complexidade

Aplicação em

segmentação

Problemas do

Min-Cut/Max-Flow

Relação com

Dijkstra

Exemplo em

filtragem

- Imagine um material fluindo através de um sistema a partir de uma fonte, onde o material é produzido, até um destino, onde ele é consumido.
- O fluxo do material em qualquer ponto do sistema é dado pela taxa com que o material se move.
- Redes de fluxo podem ser usadas para modelar:
 - ◆ líquidos fluindo ao longo de tubulações.
 - ◆ peças através de linhas de montagem.
 - ◆ corrente através de redes elétricas.
 - ◆ informação através de redes de comunicação.



Introdução

Introdução

Definição

Fluxo no grafo

Fluxo total no grafo

Visão geral da
solução

Redes Residuais

Exemplo:

augmenting paths

Alg. básico de

Min-Cut/Max-Flow

Análise de

Complexidade

Aplicação em

segmentação

Problemas do

Min-Cut/Max-Flow

Relação com

Dijkstra

Exemplo em

filtragem

Problema de fluxo máximo:

- Qual é a maior taxa de transmissão de material a partir da fonte até o destino sem violar as restrições de capacidade entre as várias partes da rede?



Definição

Introdução

Definição

Fluxo no grafo

Fluxo total no grafo

Visão geral da
solução

Redes Residuais

Exemplo:

augmenting paths

Alg. básico de

Min-Cut/Max-Flow

Análise de

Complexidade

Aplicação em

segmentação

Problemas do

Min-Cut/Max-Flow

Relação com

Dijkstra

Exemplo em

filtragem

- Uma rede de fluxo $G = (V, E)$ é um grafo direcionado no qual cada arco $(u, v) \in E$ possui uma capacidade não negativa $c(u, v) \geq 0$.



Definição

Introdução

Definição

Fluxo no grafo

Fluxo total no grafo

Visão geral da
solução

Redes Residuais

Exemplo:

augmenting paths

Alg. básico de

Min-Cut/Max-Flow

Análise de

Complexidade

Aplicação em

segmentação

Problemas do

Min-Cut/Max-Flow

Relação com

Dijkstra

Exemplo em

filtragem

- Uma rede de fluxo $G = (V, E)$ é um grafo direcionado no qual cada arco $(u, v) \in E$ possui uma capacidade não negativa $c(u, v) \geq 0$.
- O grafo possui dois vértices especiais: fonte (*source*) s e destino (*sink*) t .



Definição

Introdução

Definição

Fluxo no grafo

Fluxo total no grafo

Visão geral da
solução

Redes Residuais

Exemplo:

augmenting paths

Alg. básico de

Min-Cut/Max-Flow

Análise de

Complexidade

Aplicação em
segmentação

Problemas do

Min-Cut/Max-Flow

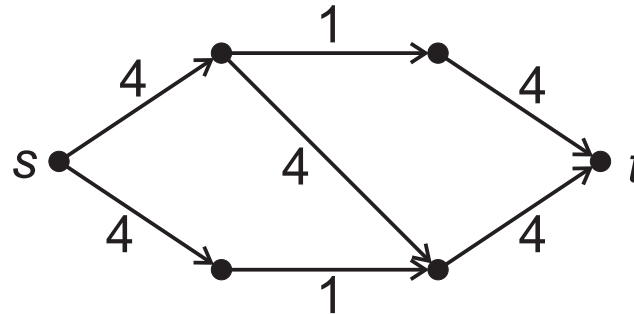
Relação com

Dijkstra

Exemplo em

filtragem

- Uma rede de fluxo $G = (V, E)$ é um grafo direcionado no qual cada arco $(u, v) \in E$ possui uma capacidade não negativa $c(u, v) \geq 0$.
- O grafo possui dois vértices especiais: fonte (*source*) s e destino (*sink*) t .
- Exemplo:





Fluxo no grafo

Introdução

Definição

Fluxo no grafo

Fluxo total no grafo

Visão geral da
solução

Redes Residuais

Exemplo:

augmenting paths

Alg. básico de

Min-Cut/Max-Flow

Análise de

Complexidade

Aplicação em

segmentação

Problemas do

Min-Cut/Max-Flow

Relação com

Dijkstra

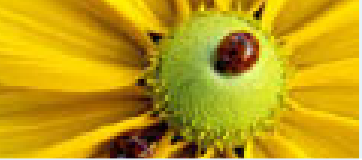
Exemplo em

filtragem

- O fluxo em G é uma função $f : V \times V \rightarrow R$ que satisfaz as seguintes três propriedades:

- ◆ **Restrição de capacidade:** Para todos $u, v \in V$, exigimos que $f(u, v) \leq c(u, v)$.
- ◆ **Anti-simetria:** Para todos $u, v \in V$, temos que $f(u, v) = -f(v, u)$.
- ◆ **Conservação de fluxo:** Para todo $u \in V - \{s, t\}$, temos que

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$$



Fluxo total no grafo

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo**
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
- Relação com
Dijkstra
- Exemplo em
filtragem

- O valor total de fluxo é definido como a soma do fluxo que sai da fonte s :

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$



Fluxo total no grafo

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo**
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

- O valor total de fluxo é definido como a soma do fluxo que sai da fonte s :

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

- No problema de fluxo máximo, nos é dada uma rede de fluxo G com fonte s e destino t , e queremos encontrar um fluxo de valor máximo indo de s para t .



Visão geral da solução

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
- Relação com
Dijkstra
- Exemplo em
filtragem

Método de Ford-Fulkerson:

- Começamos com fluxo inicial zero (i.e., $f(u, v) = 0$ para todos $u, v \in V$).



Visão geral da solução

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

Método de Ford-Fulkerson:

- Começamos com fluxo inicial zero (i.e., $f(u, v) = 0$ para todos $u, v \in V$).
- A cada iteração, aumentamos o fluxo total encontrando algum caminho (a partir da fonte s até o destino t) ao longo do qual podemos empurrar mais fluxo (*augmenting paths*).



Visão geral da solução

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução**
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
- Relação com
Dijkstra
- Exemplo em
filtragem

Método de Ford-Fulkerson:

- Começamos com fluxo inicial zero (i.e., $f(u, v) = 0$ para todos $u, v \in V$).
- A cada iteração, aumentamos o fluxo total encontrando algum caminho (a partir da fonte s até o destino t) ao longo do qual podemos empurrar mais fluxo (*augmenting paths*).
- Repetimos este processo até que nenhum caminho de aumento pode ser encontrado.

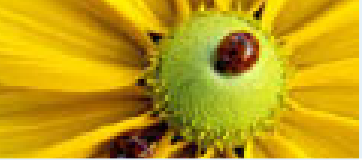


Redes Residuais

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais**
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

- Dados uma rede de fluxo G e um fluxo f , a rede residual consiste de arcos que podem admitir mais fluxo adicional.
- Para todos $u, v \in V$, a quantidade de fluxo adicional que podemos empurrar de u para v antes de exceder a capacidade $c(u, v)$ é a capacidade residual de (u, v) , dada por:

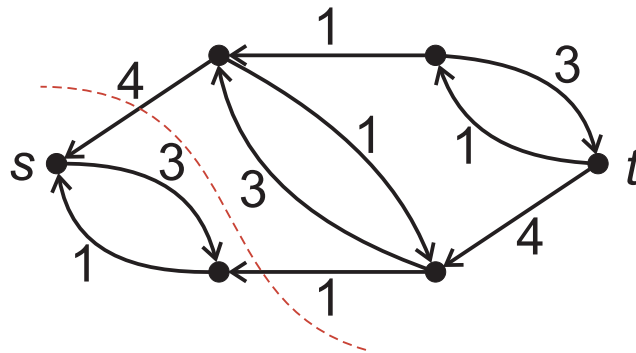
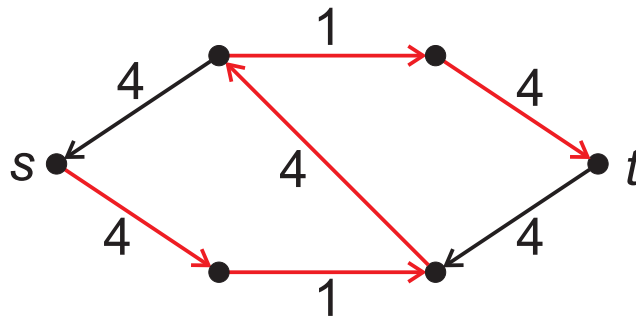
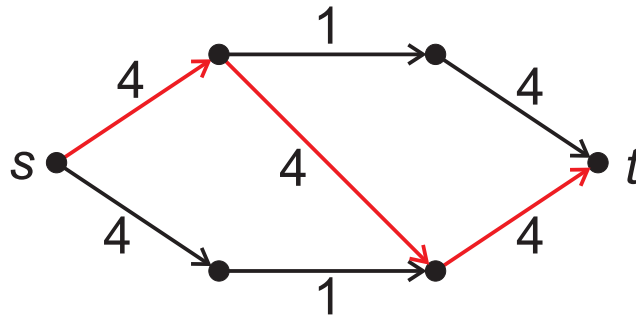
$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$



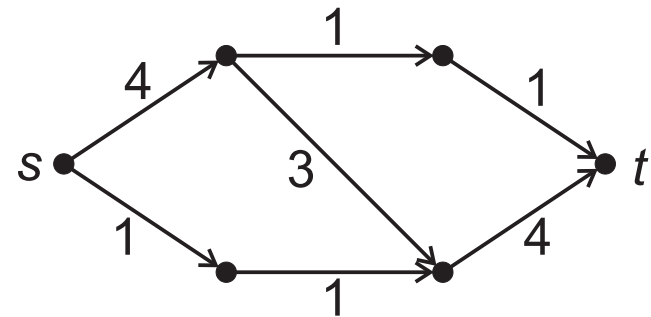
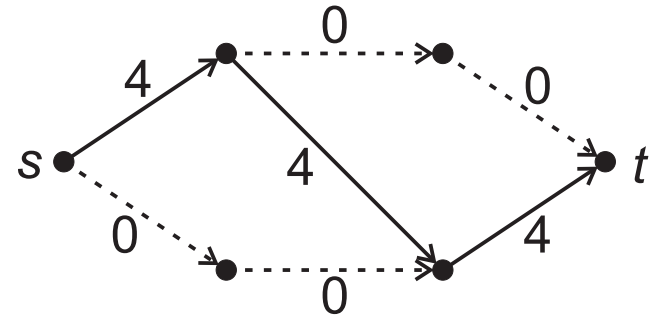
Exemplo: augmenting paths

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths**
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

capacidade residual



fluxo



Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow**
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

Algorithm 1 — FORD-FULKERSON ALGORITHM

INPUT: A flow network $G = (V, E)$ with nodes s and t .

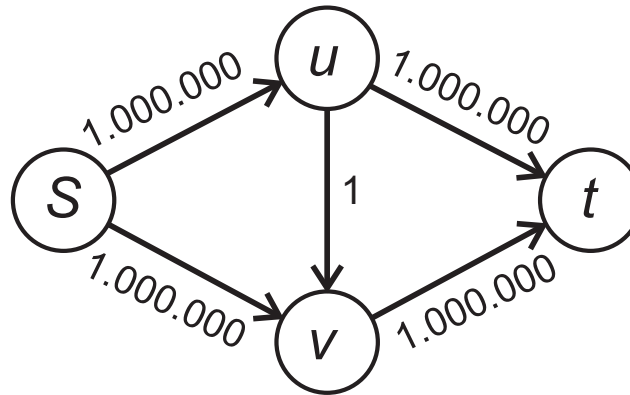
OUTPUT: The maximum flow f in G .

AUXILIARY: The residual network G_f .

1. **For each arc** $(u, v) \in E[G]$, **do**
2. $f[u, v] \leftarrow 0$ and $f[v, u] \leftarrow 0$.
3. **While** there exists a path π from s to t in G_f **do**
4. $c_f(\pi) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ is in } \pi\}$
5. **For each arc** (u, v) in π , **do**
6. $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + c_f(\pi)$ and $f[v, u] \leftarrow -f[u, v]$.
7. $c_f[u, v] = c[u, v] - f[u, v]$ and $c_f[v, u] = c[v, u] - f[v, u]$.

Análise de Complexidade

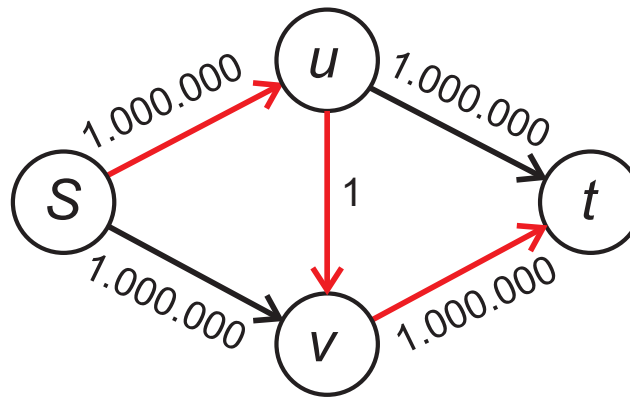
O tempo de execução depende de como os caminhos são determinados.



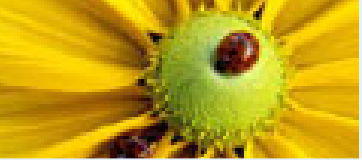
- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade**
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

Análise de Complexidade

O tempo de execução depende de como os caminhos são determinados.



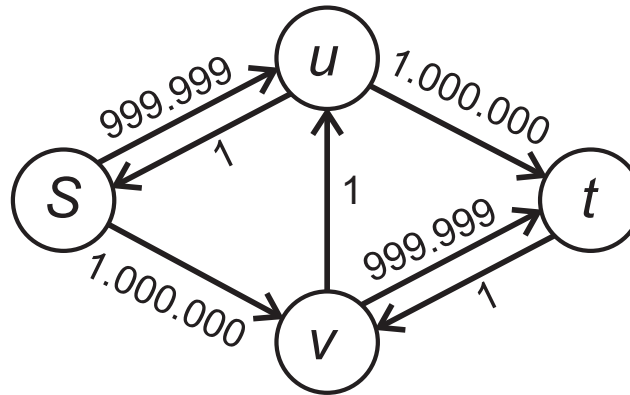
- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade**
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem



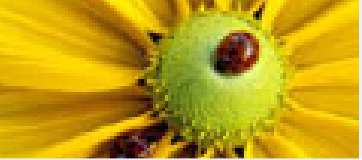
Análise de Complexidade

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade**
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

O tempo de execução depende de como os caminhos são determinados.



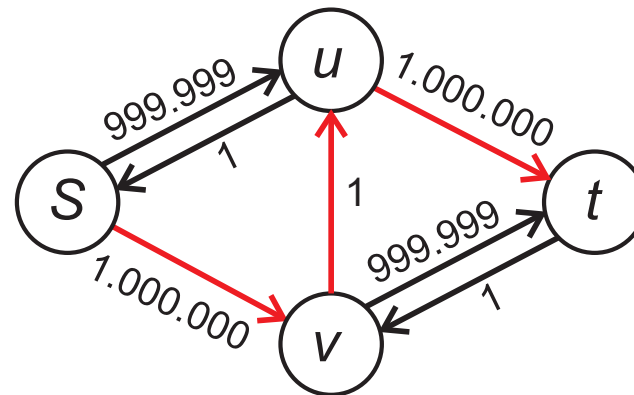
após 1 iteração.

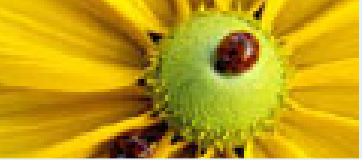


Análise de Complexidade

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade**
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

O tempo de execução depende de como os caminhos são determinados.

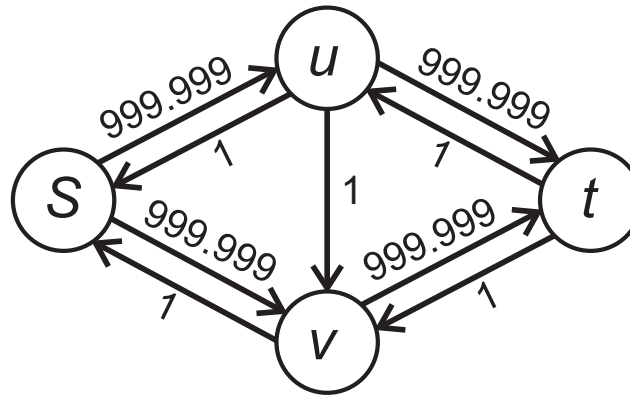




Análise de Complexidade

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade**
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

O tempo de execução depende de como os caminhos são determinados.



após 2 iterações.

Se as capacidades forem valores inteiros então o algoritmo executa em $O(|E| \cdot |f^*|)$, onde $|f^*|$ é o valor do fluxo máximo.



Aplicação em segmentação

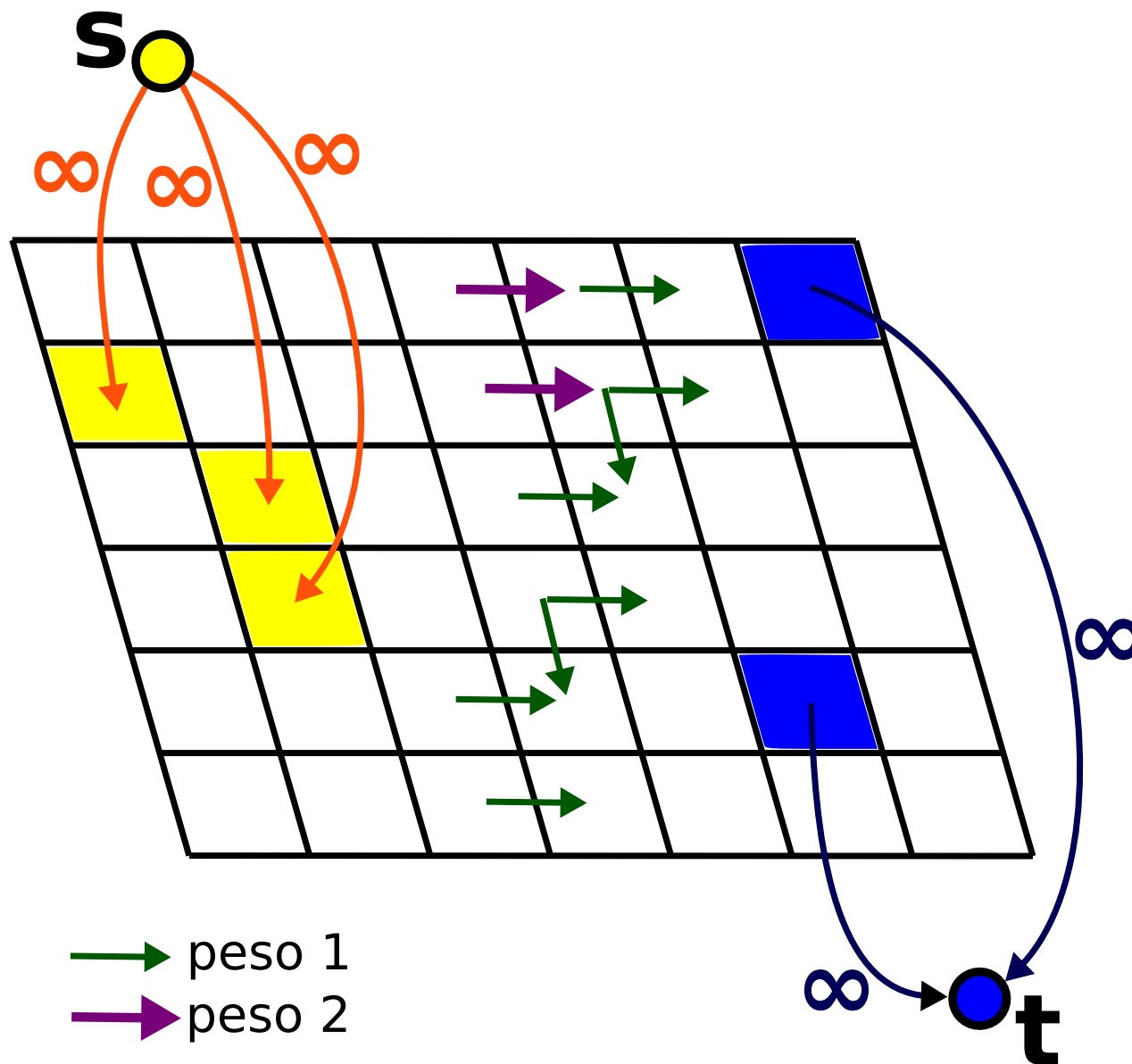
- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação**
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
- Relação com
Dijkstra
- Exemplo em
filtragem

- **Explora o Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo.**
 - ◆ Nós fonte e destino são adicionados ao grafo da imagem e cada pixel deve ser conectado a esses nós terminais por arcos.
 - ◆ O peso dos arcos entre pixels deve ser maior dentro e fora do objeto do que na fronteira do objeto.
 - ◆ Os pesos de arco com a fonte devem ser maiores no interior do objeto do que fora dele e o contrário em relação ao destino.



Aplicação em segmentação

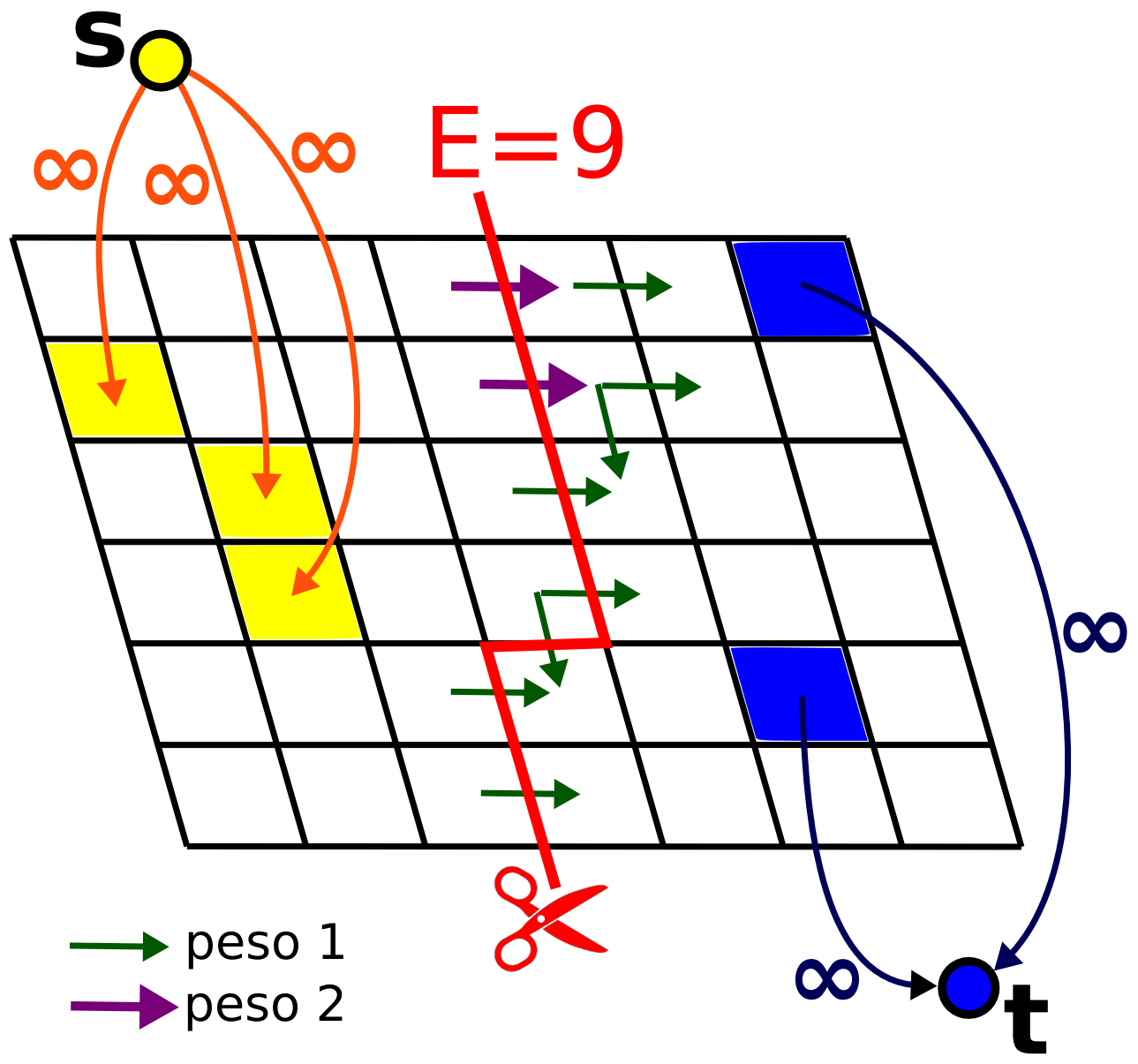
- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação**
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

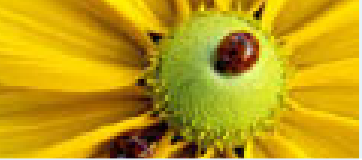




Aplicação em segmentação

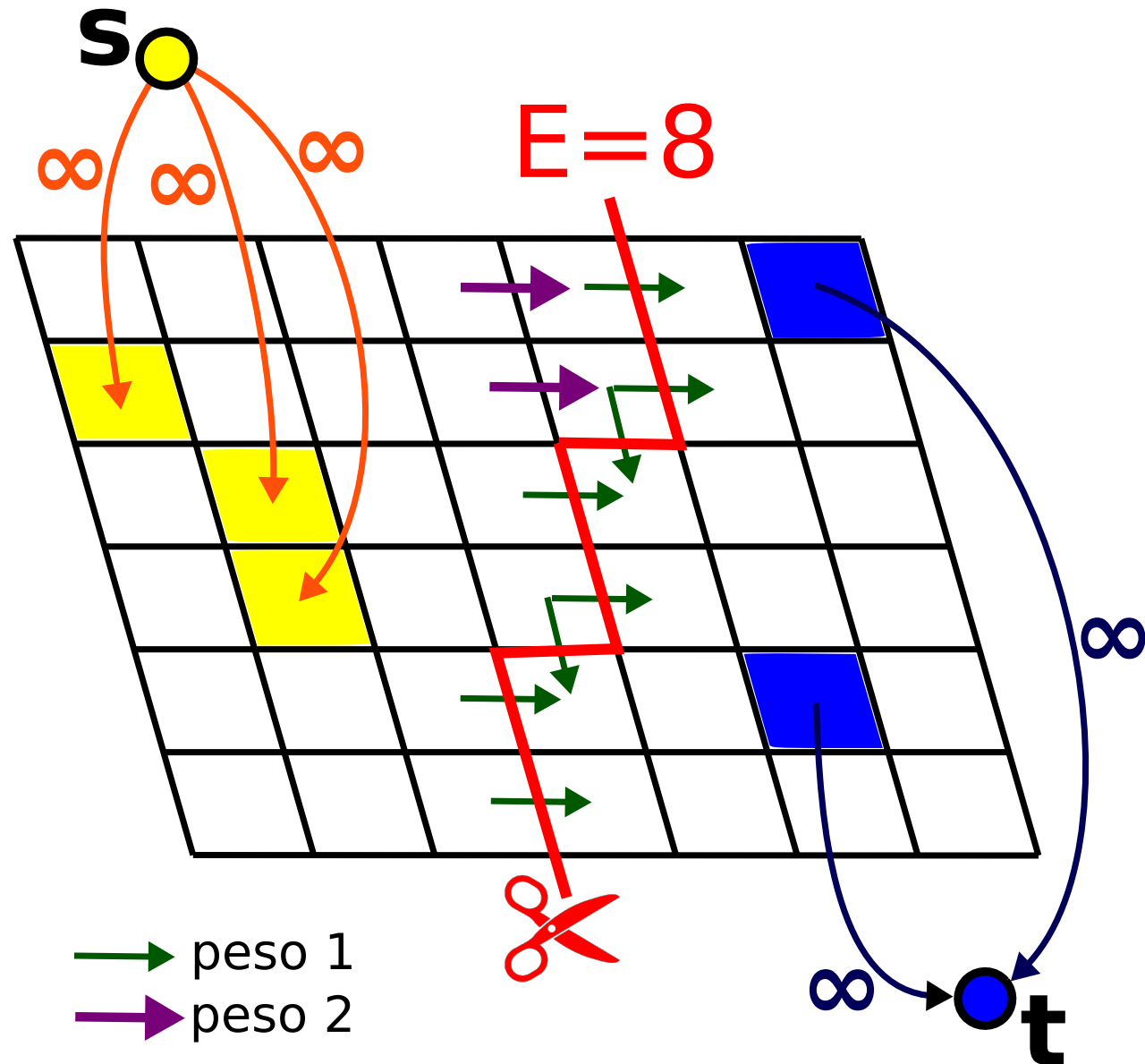
- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação**
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem





Aplicação em segmentação

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação**
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

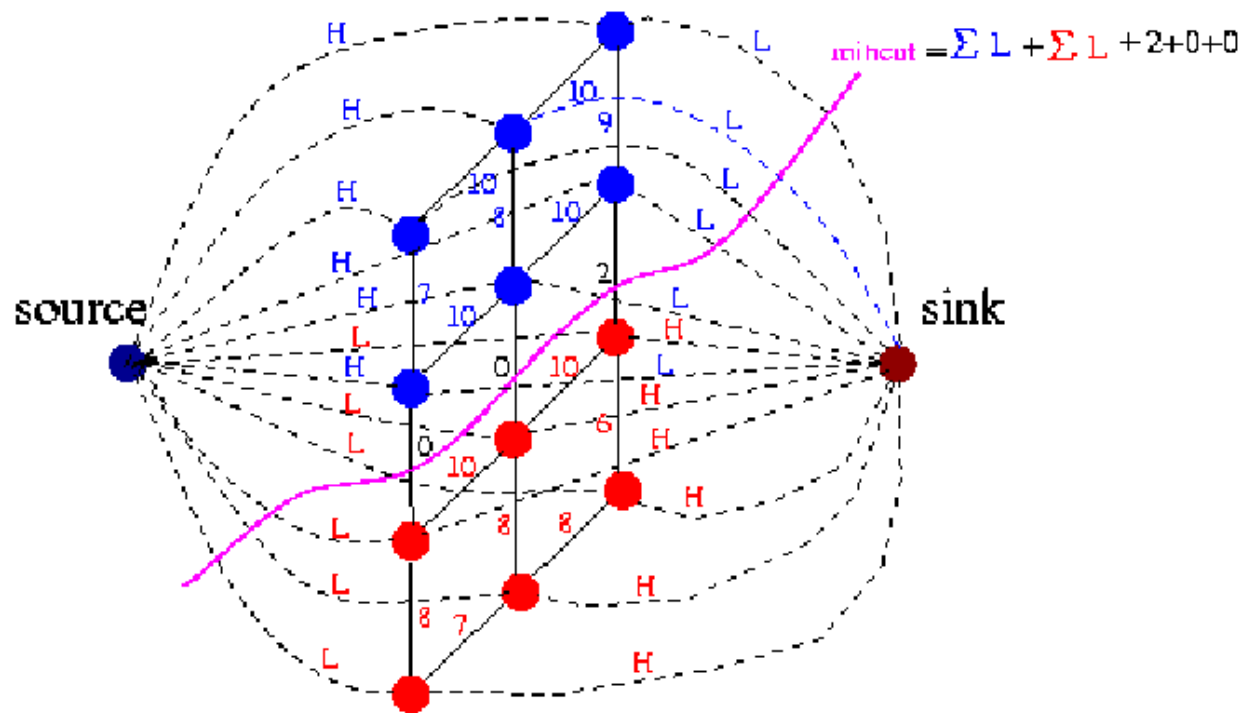




Aplicação em segmentação

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação**
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

$$E = \sum_{\forall(u,v) \in \mathcal{A} \mid u \in \mathcal{S}, v \in \mathcal{T}} w(u,v) + \sum_{\forall u \in \mathcal{I} \mid u \in \mathcal{S}} w(u,t) + \sum_{\forall u \in \mathcal{I} \mid u \in \mathcal{T}} w(s,u)$$



min-cut/max-flow solution

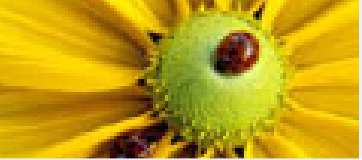


Problemas do Min-Cut/Max-Flow

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com
Dijkstra
- Exemplo em
filtragem

No contexto de segmentação de imagens, existem duas preocupações na literatura sobre o uso do algoritmo de GC original (min-cut/max-flow):

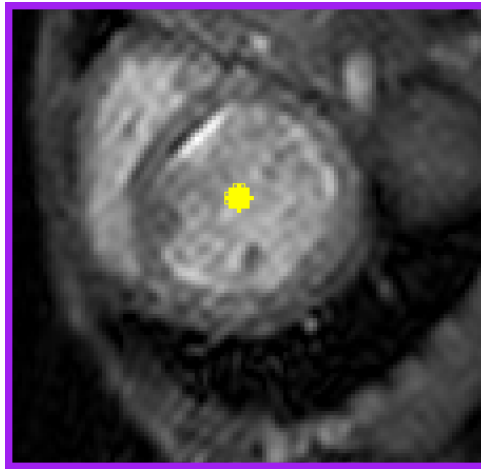
- viés de encolhimento (“shrinking bias”) e
- *metrication error* (“blockiness”).



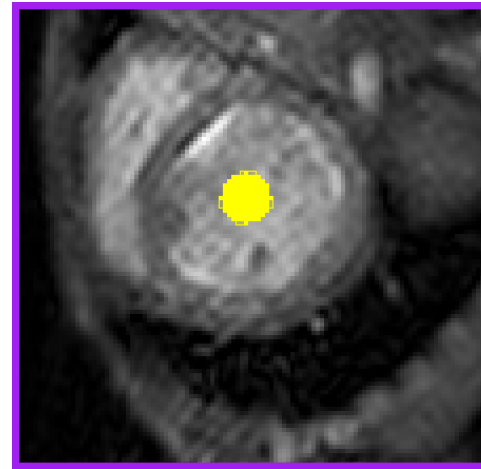
Problemas do Min-Cut/Max-Flow

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

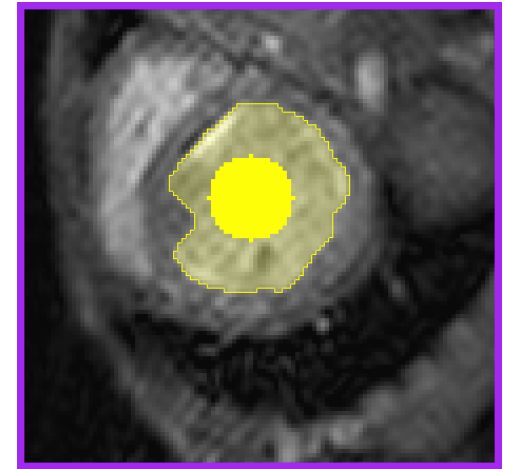
Viés de encolhimento (“shrinking bias”):



(a)



(b)



(c)

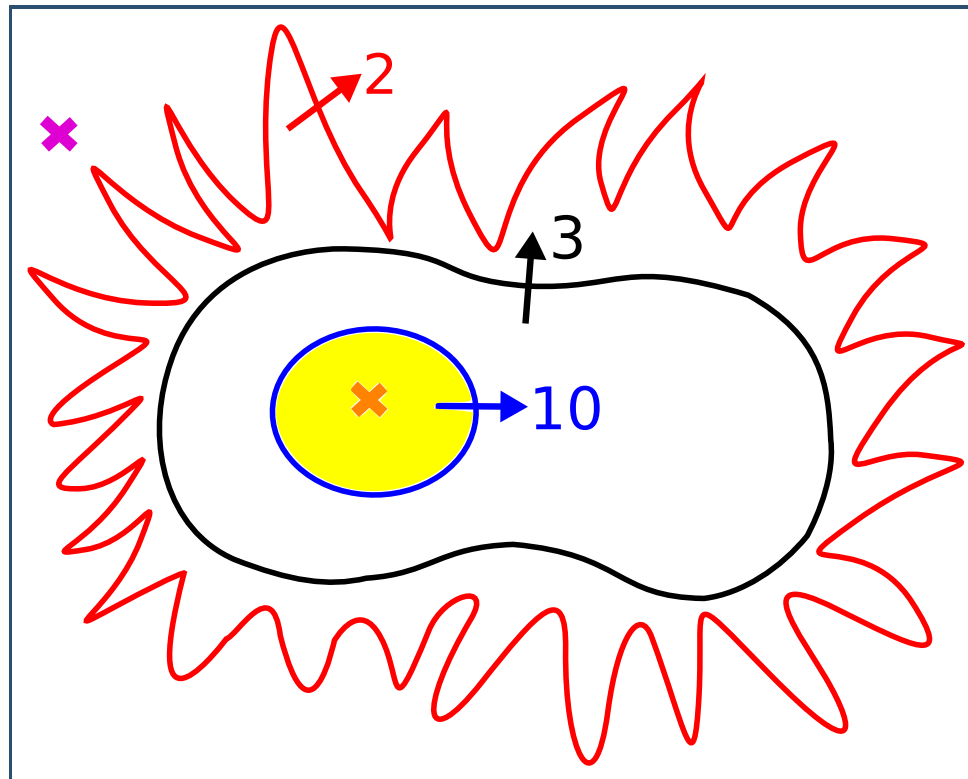
(a-b) A segmentação com poucas sementes pode colapsar para um objeto de pequeno perímetro, se igualando às próprias sementes. (c) Um conjunto maior de sementes pode ser necessário.



Problemas do Min-Cut/Max-Flow

Viés de encolhimento pode ser atenuado pelo uso de uma potência dos pesos.

Cardinalidade dos cortes: $|C_1| = 60$, $|C_2| = 30$, $|C_3| = 5$



$$E_1 = 2 \times 60 = 120$$

$$E_2 = 3 \times 30 = 90$$

$$E_3 = 10 \times 5 = 50$$

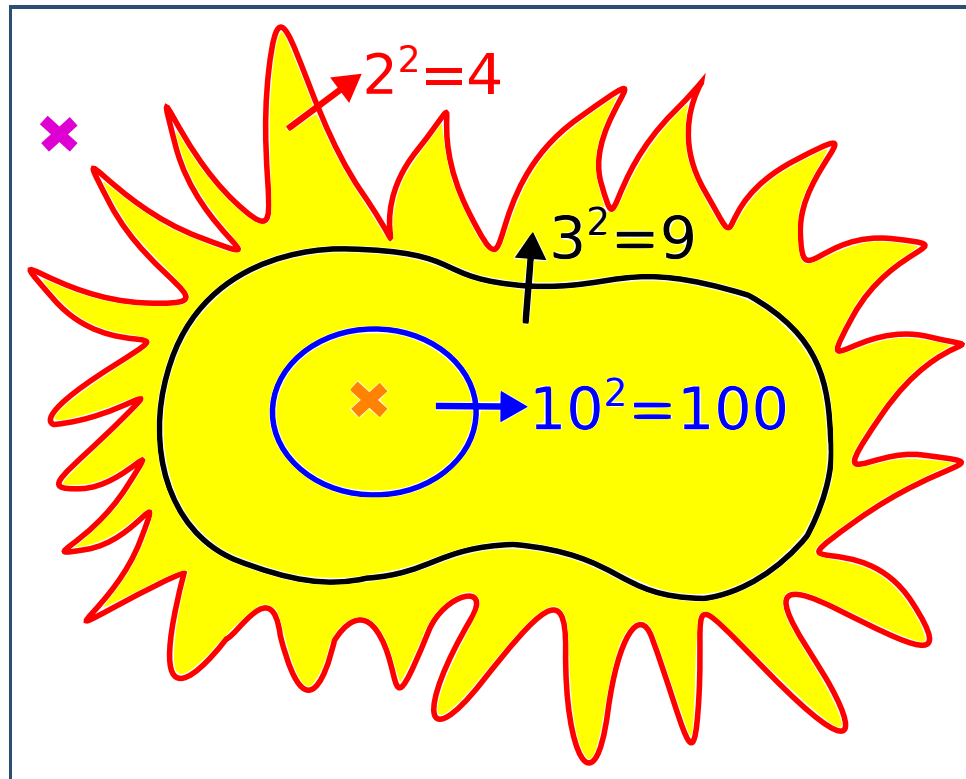
- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem



Problemas do Min-Cut/Max-Flow

Viés de encolhimento pode ser atenuado pelo uso de uma potência dos pesos.

Cardinalidade dos cortes: $|C_1| = 60$, $|C_2| = 30$, $|C_3| = 5$

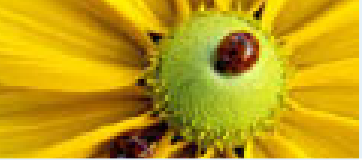


$$E_1 = 2^2 \times 60 = 240$$

$$E_2 = 3^2 \times 30 = 270$$

$$E_3 = 10^2 \times 5 = 500$$

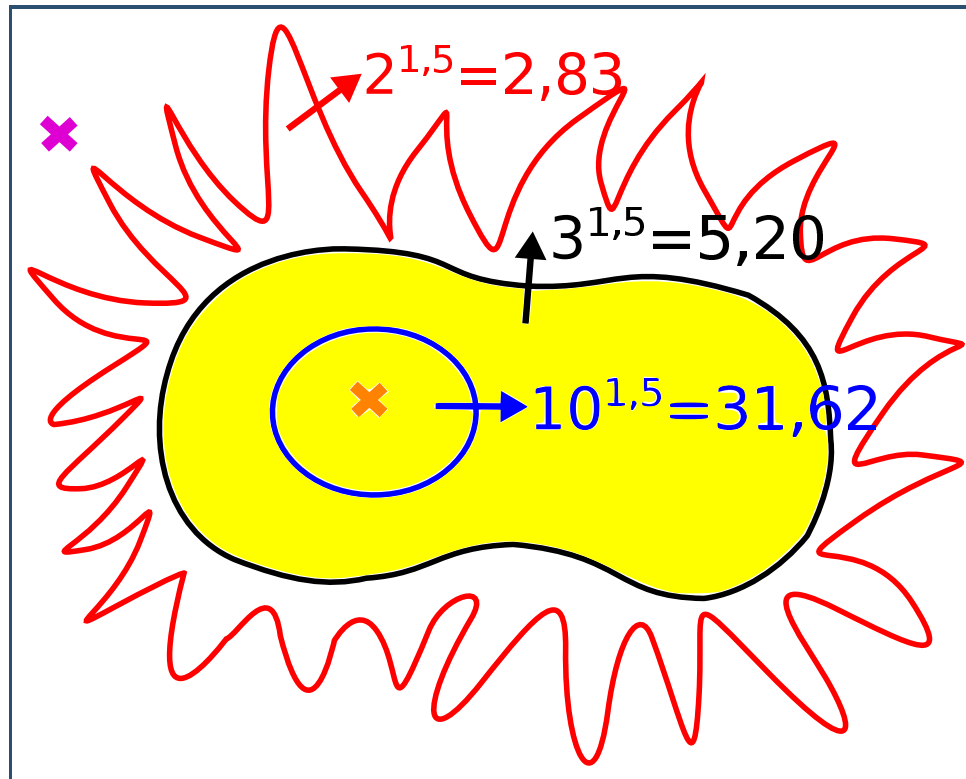
- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem



Problemas do Min-Cut/Max-Flow

Viés de encolhimento pode ser atenuado pelo uso de uma potência dos pesos.

Cardinalidade dos cortes: $|C_1| = 60$, $|C_2| = 30$, $|C_3| = 5$



$$E_1 = 2^{1,5} \times 60 = 169,71$$

$$E_2 = 3^{1,5} \times 30 = 155,88$$

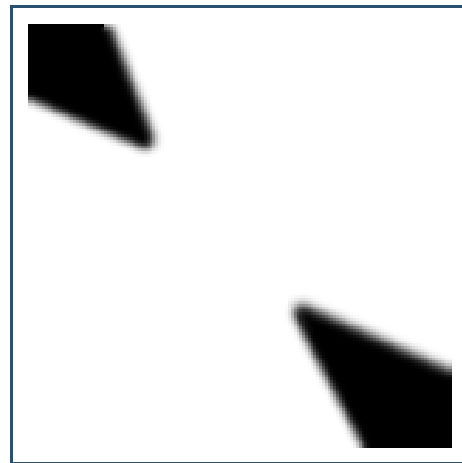
$$E_3 = 10^{1,5} \times 5 = 158,11$$

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

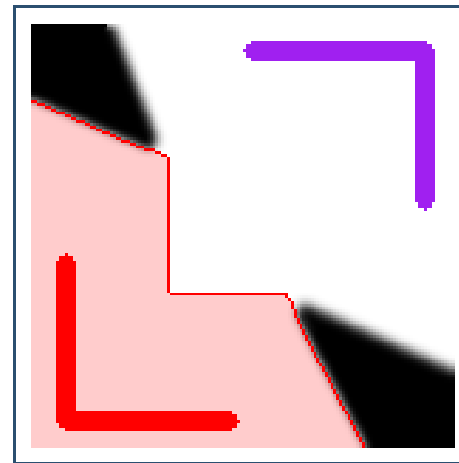


Problemas do Min-Cut/Max-Flow

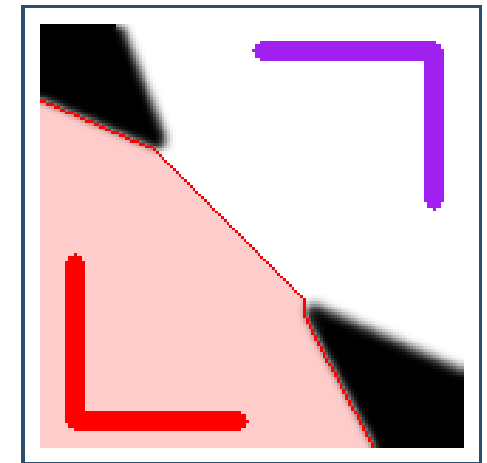
O problema métrico (“blockiness”) surge quando calculamos o fluxo máximo em um grafo de imagem com vizinhança-4. As figuras abaixo mostram o problema.



(a)



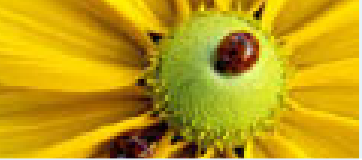
(b)



(c)

Claramente, o GC em vizinhança-4 está produzindo um corte irregular (**Fig. b**), em vez da borda suave esperada. Um melhor resultado pode ser obtido usando GC com vizinhança-8 (**Fig. c**).

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem



Problemas do Min-Cut/Max-Flow

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

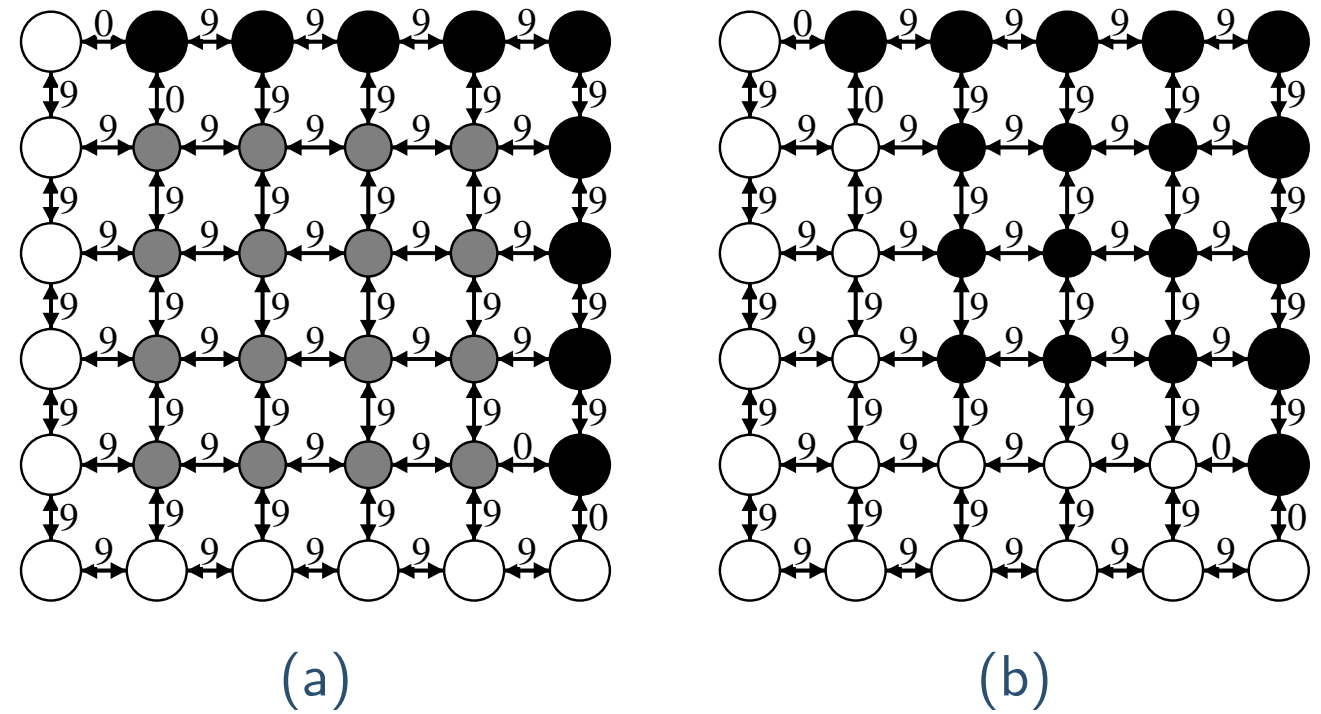
- Isso acontece porque, em um grafo de vizinhança-4, uma borda em diagonal corta o mesmo número de arcos que uma borda em formato de “L” (formando um canto de 90 graus).
- Isto contradiz a nossa expectativa, visto que a diagonal é o caminho mais curto entre os pontos considerados, o que levaria (intuitivamente) para um corte de menor valor.



Problemas do Min-Cut/Max-Flow

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

A fim de compreender melhor esse fenômeno, a figura abaixo ilustra o mesmo problema numericamente.



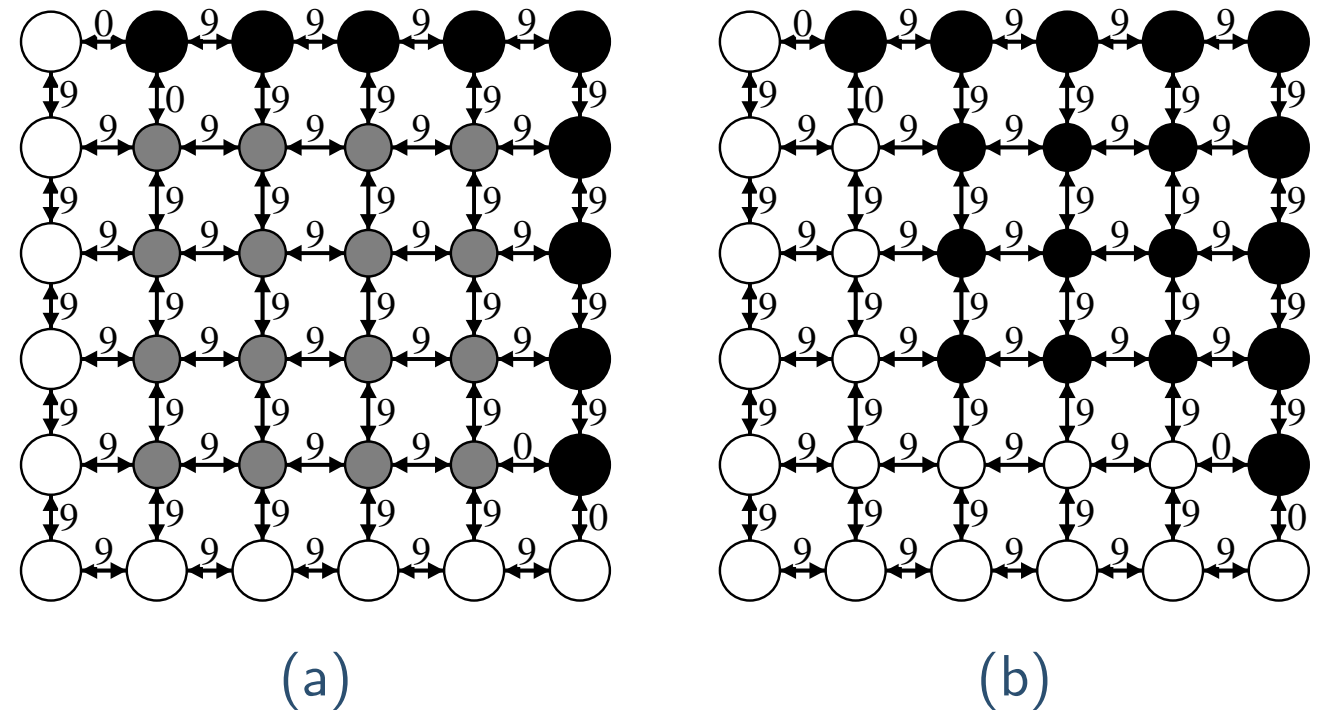
(a) Um grafo de vizinhança-4 onde os números indicam as capacidades dos arcos, com sementes de fundo em preto e sementes de objeto em branco.



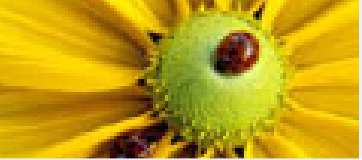
Problemas do Min-Cut/Max-Flow

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

A fim de compreender melhor esse fenômeno, a figura abaixo ilustra o mesmo problema numericamente.



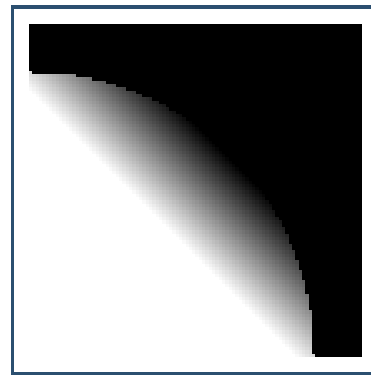
(b) A segmentação por GC apresenta um efeito de “blockiness”, formando um canto (corte irregular) ao invés da fronteira suave esperada.



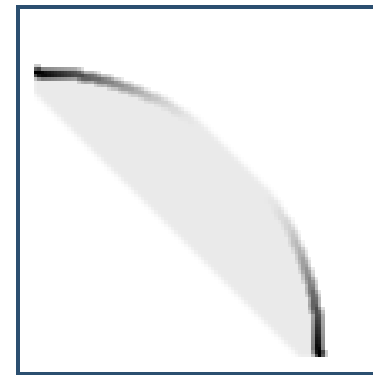
Problemas do Min-Cut/Max-Flow

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

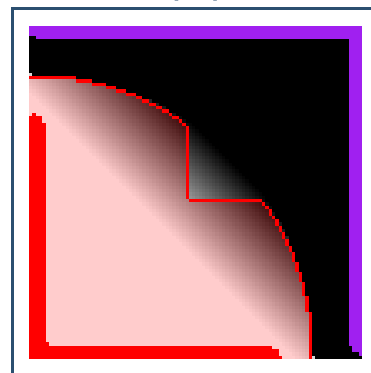
Outros exemplos:



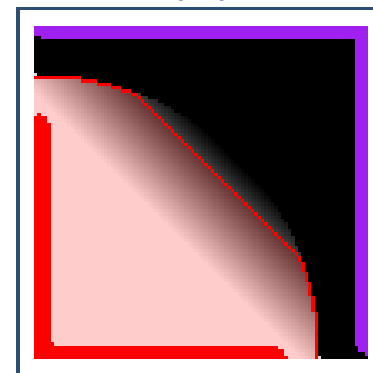
(a)



(b)



(c)



(d)

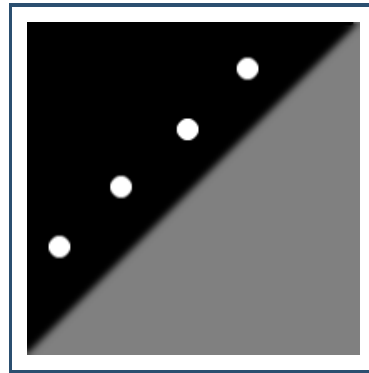
(a) Imagem original, (b) imagem das capacidades dos arcos, (c) GC com vizinhança-4, (d) GC com vizinhança-8.



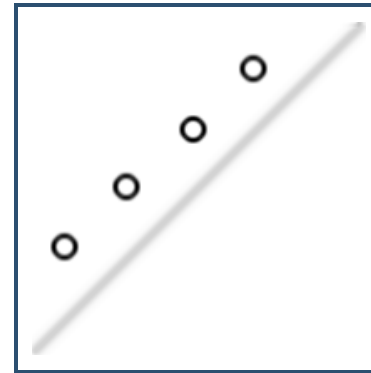
Problemas do Min-Cut/Max-Flow

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow**
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem

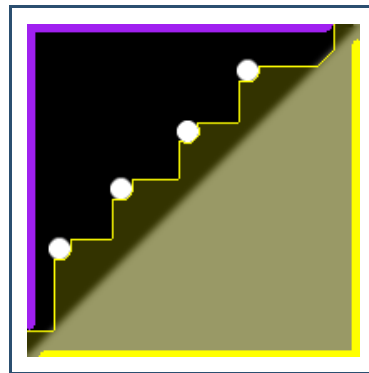
Outros exemplos:



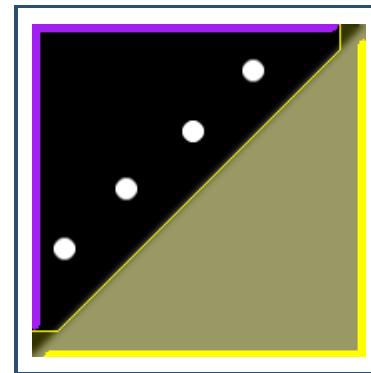
(a)



(b)



(c)



(d)

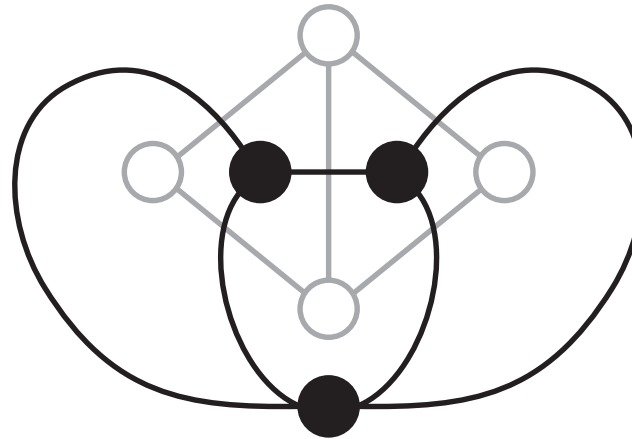
(a) Imagem original, (b) imagem das capacidades dos arcos, (c) GC com vizinhança-4, (d) GC com vizinhança-8.



Relação com Dijkstra

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
- Relação com
Dijkstra**
- Exemplo em
filtragem

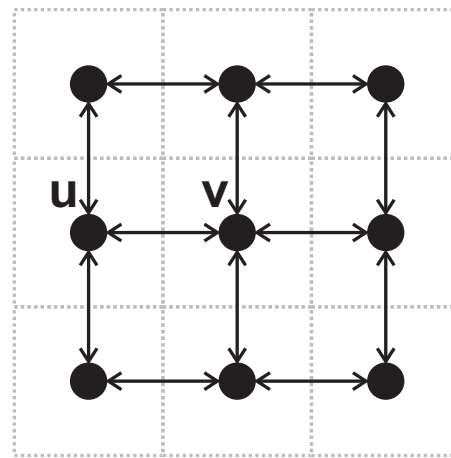
Grafo planar (cinza) e seu dual (preto).



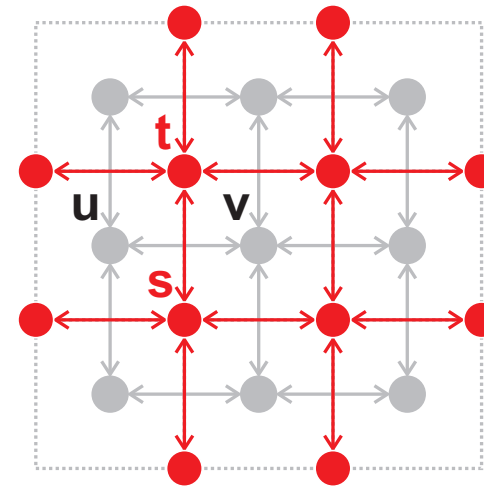


Relação com Dijkstra

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra**
- Exemplo em filtragem

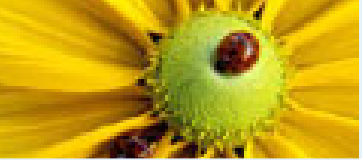


(a)



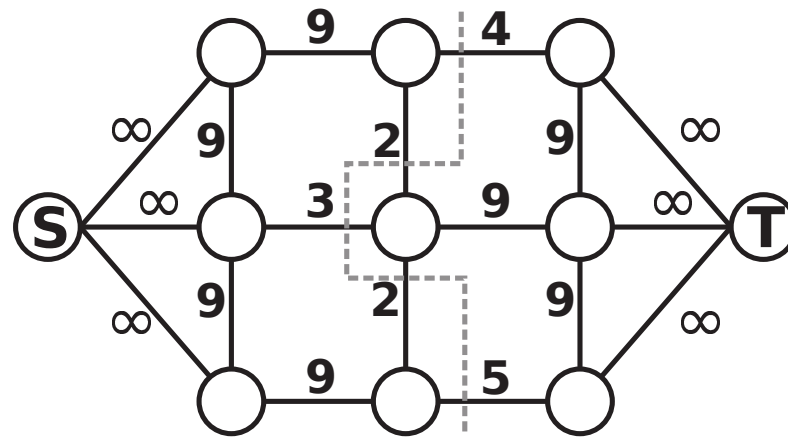
(b)

(a) Grafo de vizinhança quatro, em que os pixels são os nós. (b) Grafo dual (vermelho), no qual os nós são os vértices (cantos) dos pixels. As arestas (u, v) em (a) têm os mesmos pesos das arestas (lados) de pixel correspondentes (s, t) em (b), ou seja, $w(u, v) = w(s, t)$.



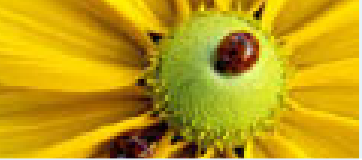
Relação com Dijkstra

O problema Min-Cut/Max-Flow em um grafo planar apropriado é equivalente a um problema de Dijkstra no grafo dual.



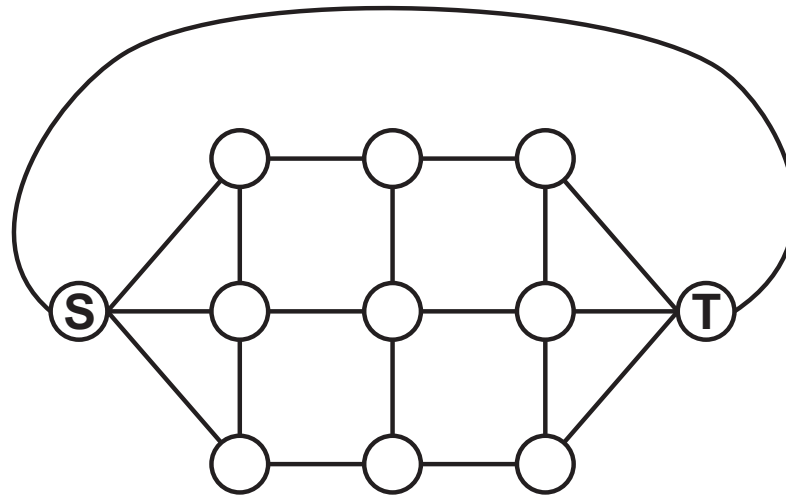
Min-Cut/Max-Flow em um grafo planar, com seu corte indicado por uma linha tracejada.

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra**
- Exemplo em filtragem



Relação com Dijkstra

O problema Min-Cut/Max-Flow em um grafo planar apropriado é equivalente a um problema de Dijkstra no grafo dual.



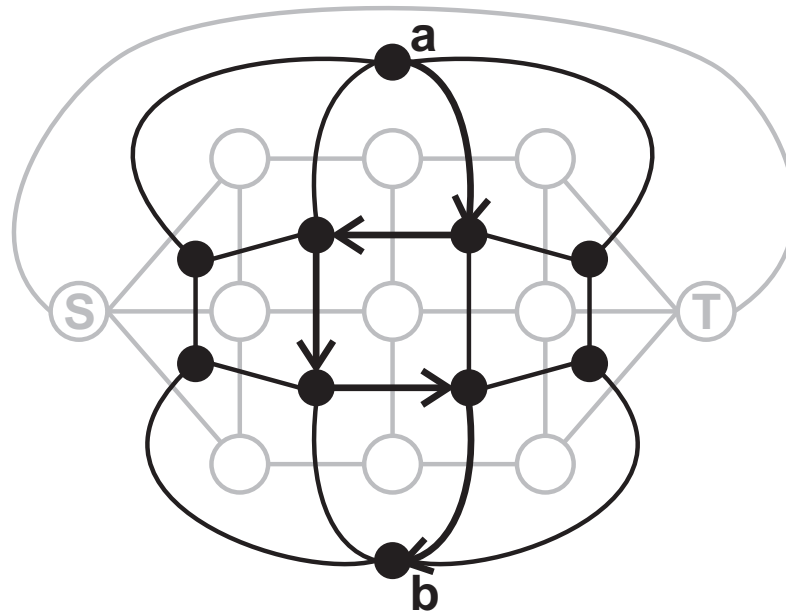
A fonte e o destino são conectados por uma aresta.

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
- Relação com
Dijkstra**
- Exemplo em
filtragem



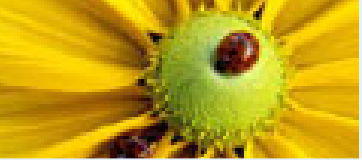
Relação com Dijkstra

O problema Min-Cut/Max-Flow em um grafo planar apropriado é equivalente a um problema de Dijkstra no grafo dual.



Dijkstra resolvido no grafo dual de a para b .

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra**
- Exemplo em filtragem



Exemplo em filtragem

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
- Relação com
Dijkstra
- Exemplo em
filtragem**

Para uma dada imagem binária I com ruído e imperfeições, desejamos obter uma imagem filtrada F .

Considere a imagem I abaixo.





Exemplo em filtragem

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem**

Os ruídos e imperfeições finas da imagem I resultam em uma elevada quantidade de pixels de borda. Logo, a fim de eliminar os ruídos devemos reduzir o número de transições preto/branco na imagem filtrada F . Isso pode ser formulado pela seguinte energia:

$$E = \sum_{(a,b) \in E} |F(a) - F(b)|$$



Exemplo em filtragem

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem**

Os ruídos e imperfeições finas da imagem I resultam em uma elevada quantidade de pixels de borda. Logo, a fim de eliminar os ruídos devemos reduzir o número de transições preto/branco na imagem filtrada F . Isso pode ser formulado pela seguinte energia:

$$E = \sum_{(a,b) \in E} |F(a) - F(b)|$$

A minimização da energia acima possui como soluções triviais imagens filtradas F de brilho constante. Portanto, devemos incluir um segundo termo que penaliza resultados divergentes em relação à imagem I :

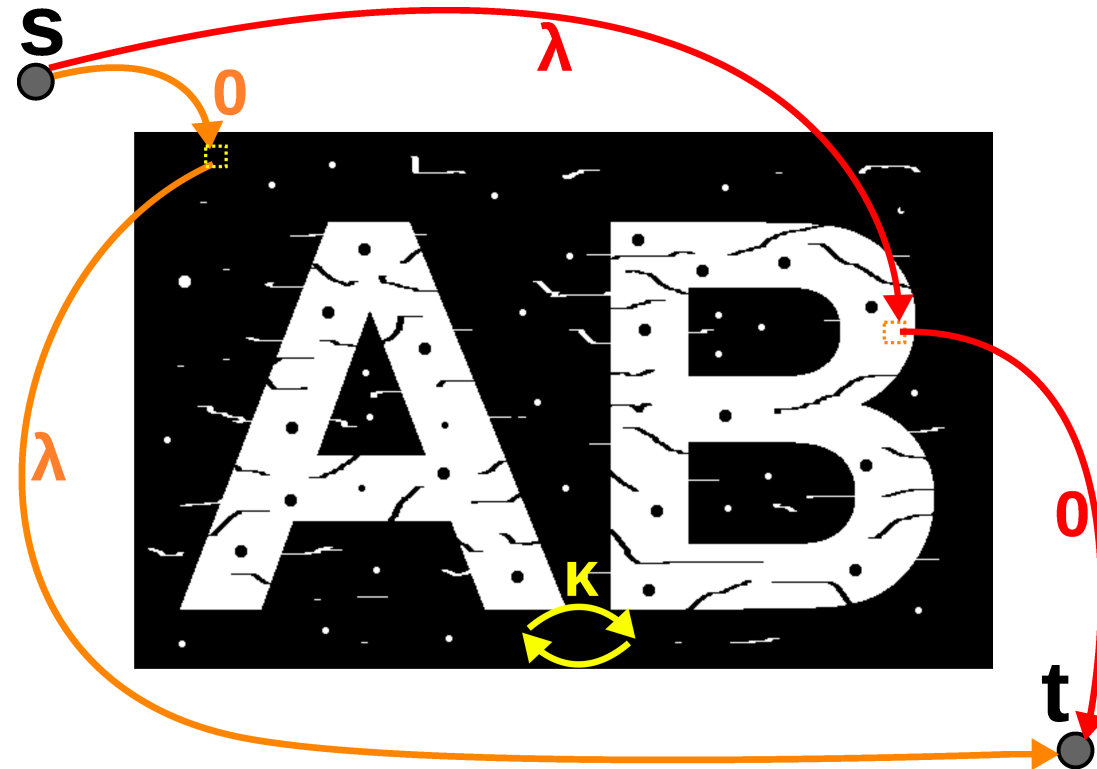
$$E = \kappa \sum_{(a,b) \in E} |F(a) - F(b)| + \lambda \sum_{a \in \mathcal{D}_I} |I(a) - F(a)|$$



Exemplo em filtragem

A energia proposta pode ser minimizada através do algoritmo do fluxo máximo/corte mínimo, utilizando o seguinte grafo no qual:

- $w(s, a) = 0$ se $I(a) = 0$ e $w(s, a) = \lambda$ caso contrário,
- $w(a, t) = \lambda$ se $I(a) = 0$ e $w(a, t) = 0$ caso contrário,
- $w(a, b) = \kappa$ para pixels a, b tal que $(a, b) \in E$.



- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo: *augmenting paths*
- Alg. básico de Min-Cut/Max-Flow
- Análise de Complexidade
- Aplicação em segmentação
- Problemas do Min-Cut/Max-Flow
- Relação com Dijkstra
- Exemplo em filtragem



Exemplo em filtragem

Introdução
Definição
Fluxo no grafo
Fluxo total no grafo
Visão geral da solução
Redes Residuais
Exemplo:
augmenting paths
Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
Análise de
Complexidade
Aplicação em
segmentação
Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
Relação com
Dijkstra
Exemplo em
filtragem

Variando os pesos κ e λ dos termos da energia temos diferentes soluções:

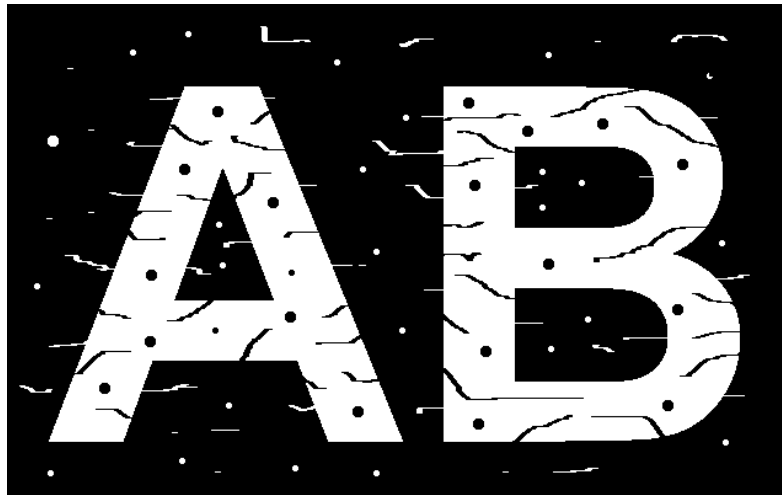
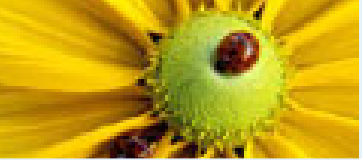


Imagem original



$\kappa = 1$ e $\lambda = 1$

Observe que a imagem filtrada resultante não pode ser obtida via filtragem conexa.



Exemplo em filtragem

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
- Relação com
Dijkstra
- Exemplo em
filtragem**

Variando os pesos κ e λ dos termos da energia temos diferentes soluções:

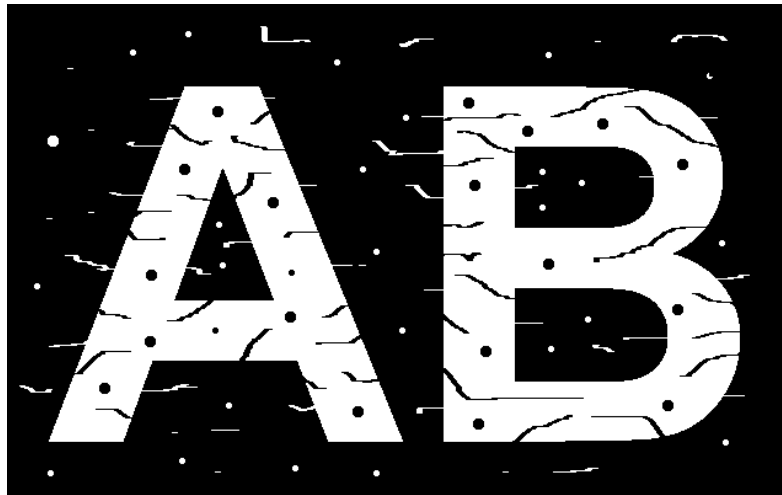


Imagem original



$\kappa = 2$ e $\lambda = 1$

Observe que a imagem filtrada resultante não pode ser obtida via filtragem conexa.



Exemplo em filtragem

Introdução
Definição
Fluxo no grafo
Fluxo total no grafo
Visão geral da solução
Redes Residuais
Exemplo:
augmenting paths
Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
Análise de
Complexidade
Aplicação em
segmentação
Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
Relação com
Dijkstra
Exemplo em
filtragem

Variando os pesos κ e λ dos termos da energia temos diferentes soluções:

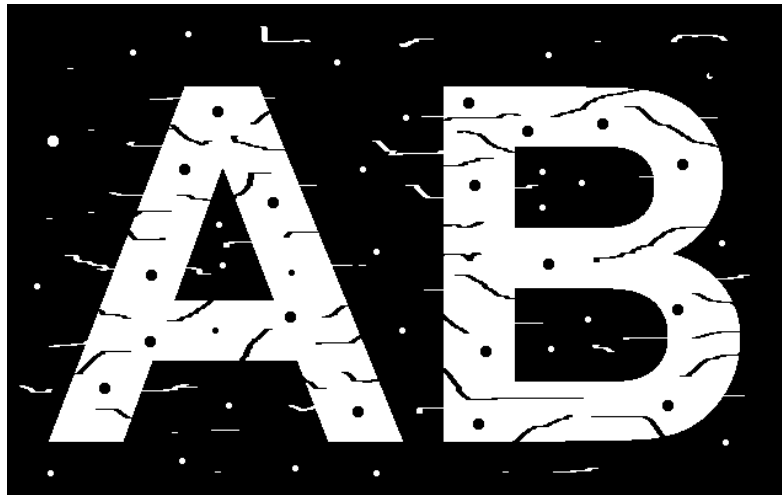


Imagem original



$\kappa = 3$ e $\lambda = 1$

Observe que a imagem filtrada resultante não pode ser obtida via filtragem conexa.



Exemplo em filtragem

- Introdução
- Definição
- Fluxo no grafo
- Fluxo total no grafo
- Visão geral da solução
- Redes Residuais
- Exemplo:
augmenting paths
- Alg. básico de
Min-Cut/Max-Flow
- Análise de
Complexidade
- Aplicação em
segmentação
- Problemas do
Min-Cut/Max-Flow
- Relação com
Dijkstra
- Exemplo em
filtragem**

Variando os pesos κ e λ dos termos da energia temos diferentes soluções:

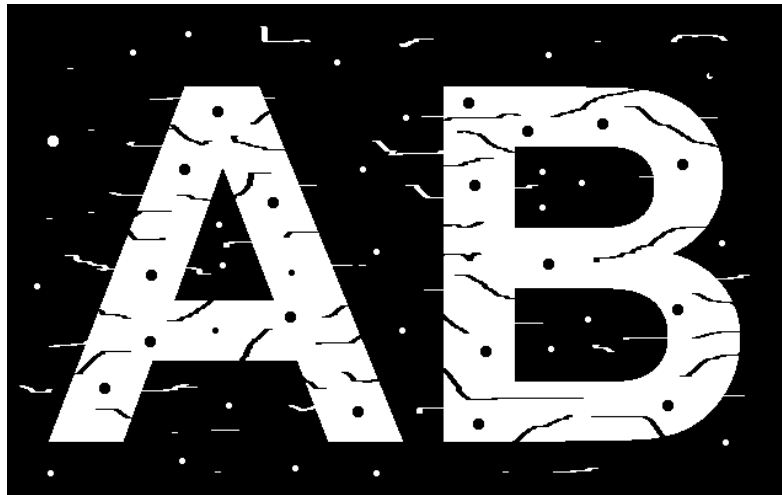


Imagem original



$\kappa = 5$ e $\lambda = 1$

Observe que a imagem filtrada resultante não pode ser obtida via filtragem conexa.