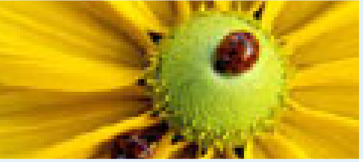
Passeios Aleatórios

Prof. Dr. Paulo A. V. de Miranda
Instituto de Matemática e Estatística (IME),
Universidade de São Paulo (USP)
pmiranda@ime.usp.br

Passeios Aleatórios

O método dos *Passeios Aleatórios* para o problema da segmentação de imagens foi proposto pelo pesquisador da Siemens Leo Grady, tal como descrito em seu artigo *Random Walks for Image Segmentation* [1].



O passeio de um bêbado em uma dimensão

- Um bêbado está andando na rua, entre sua casa e o bar.
- A cada instante, ele dá um passo:
  - na direção do bar com probabilidade $q > 0$, ou
  - na direção de casa com probabilidade $p = 1 - q > 0$.
- Queremos saber qual a probabilidade dele chegar em casa antes de chegar no bar, dependendo do local da rua em que começa a andar.

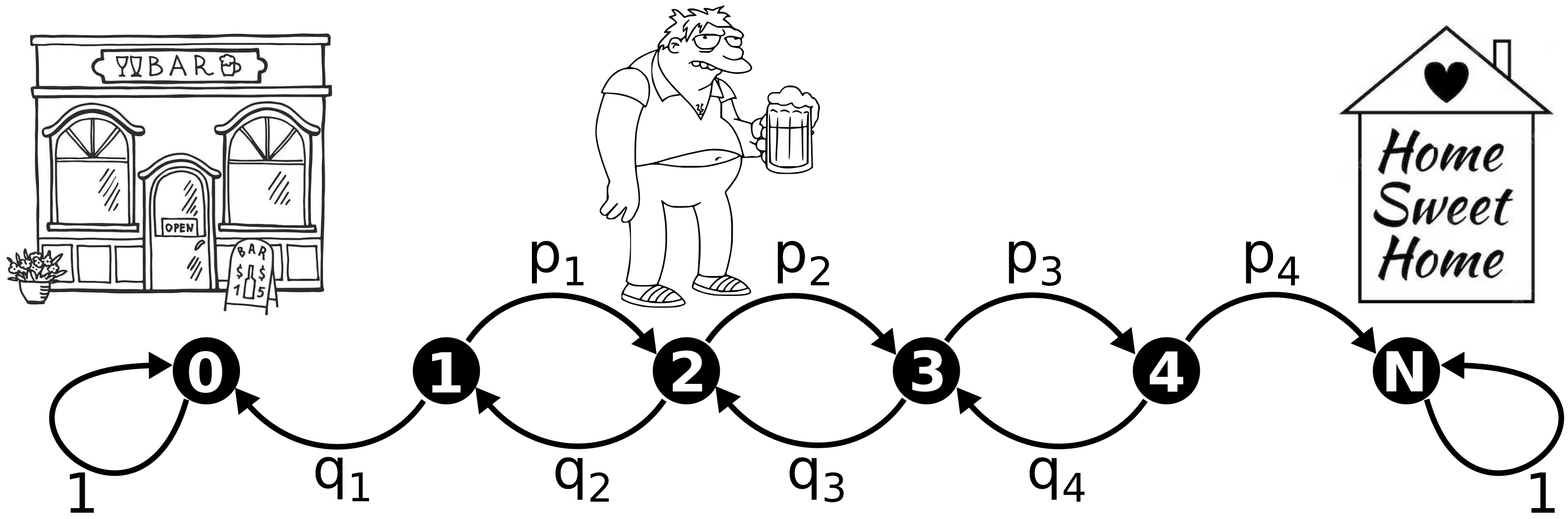
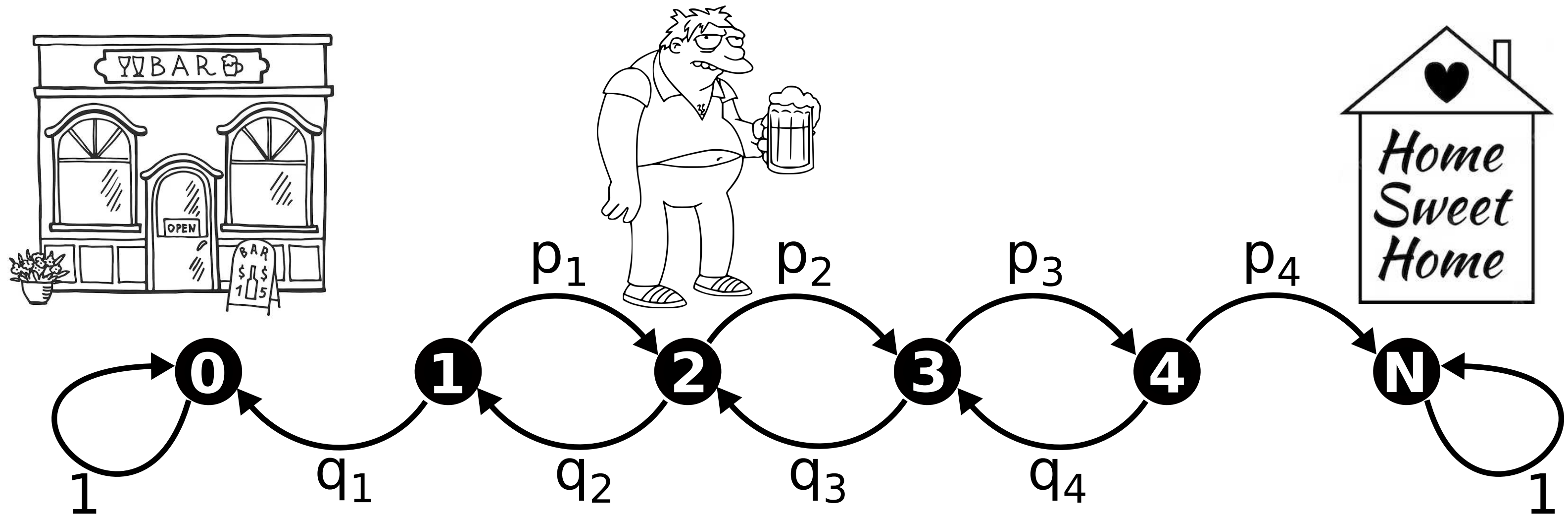


Ilustração do passeio do bêbado, com uma distância de N passos entre a casa e o bar. Para cada nó são exibidos arcos com os valores das probabilidades de deslocamento do bêbado nas diferentes direções. Para todo nó intermediário $x = 1, \ldots, N-1$, p_x é a probabilidade de o bêbado dar um passo em direção à casa e q_x a probabilidade de dar um passo em direção ao bar (com $p_x + q_x = 1$).



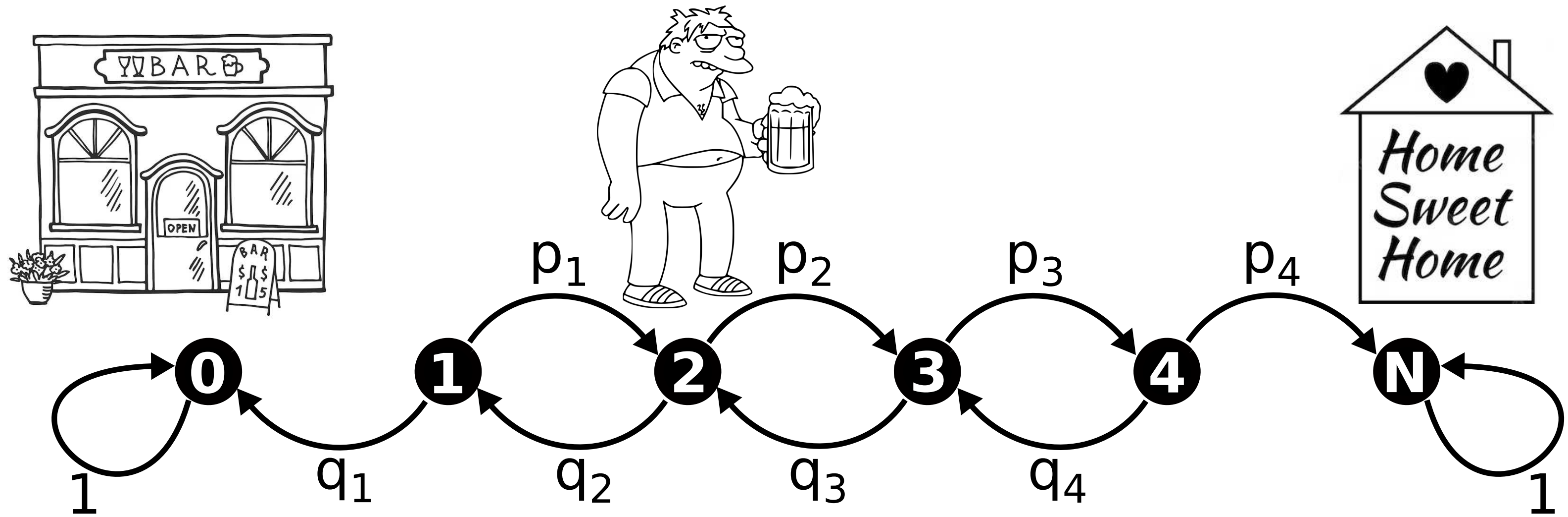
Seja $P(x)$ a probabilidade de o bêbado chegar em casa antes do bar partindo do ponto x. Primeiramente, observamos as seguintes propriedades de $P(x)$:

$$P(0) = 0 \tag{1}$$

$$P(N) = 1 \tag{2}$$

$$P(x) = q_x \cdot P(x-1) + p_x \cdot P(x+1) \quad \text{para} \quad x = 1, \ldots, N-1 \tag{3}$$

O passeio de um bêbado em uma dimensão

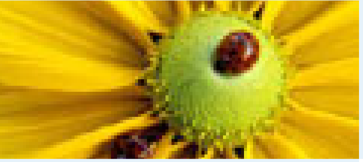


- Equação 1 diz que, estando no bar, a probabilidade de chegar em casa antes de ir ao bar é 0.
- Equação 2 diz que, se ele está em casa, a probabilidade de chegar lá antes do bar é 100%.

O passeio de um bêbado em uma dimensão

- Equação 3 diz que, para todo nó intermediário x, sua probabilidade $P(x)$ é a média ponderada das probabilidades de se chegar em casa a partir das posições vizinhas para as quais o bêbado pode escolher ir.
  - A partir do nó x, o bêbado tem duas possibilidades: ir para a esquerda ou para direita (eventos mutuamente exclusivos).
  - O evento de ir para esquerda não afeta a probabilidade $P(x-1)$ dele chegar na casa a partir de $x-1$, pois são eventos independentes.

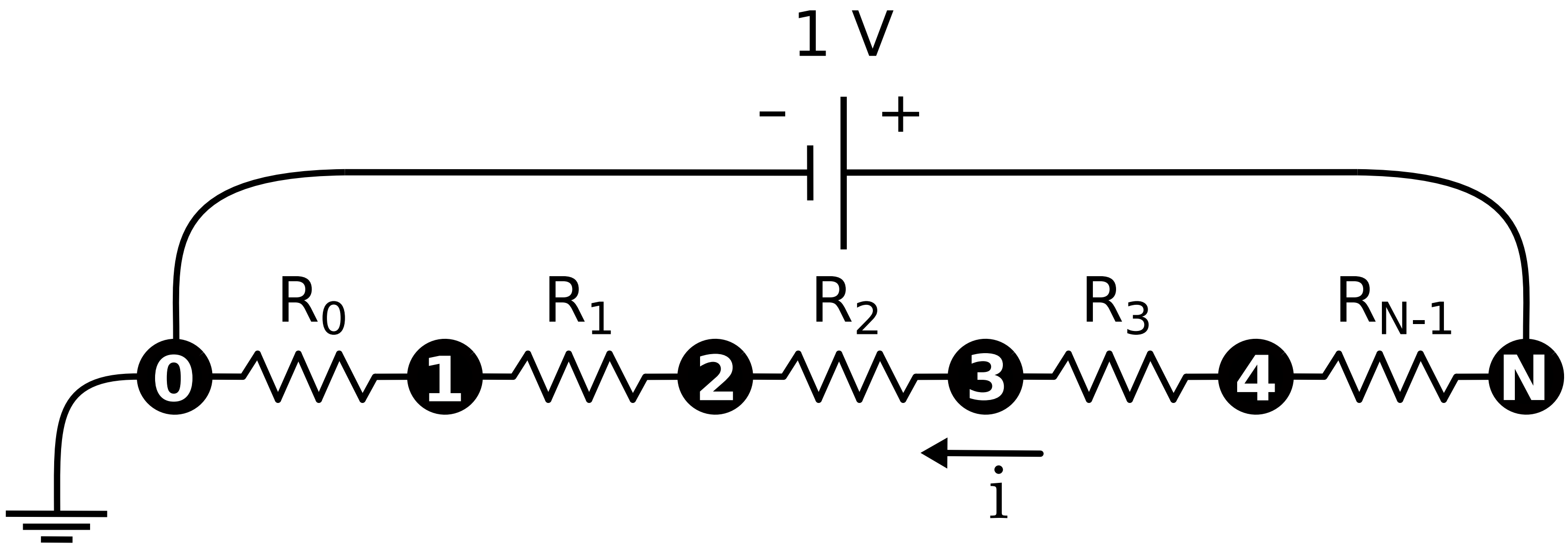
Dados dois eventos A e B, segundo o teorema de Bayes temos que: $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$, em que $P(A|B)$ é a probabilidade a posteriori de A condicional a B. No caso de eventos independentes temos: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$. Logo, podemos concluir que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



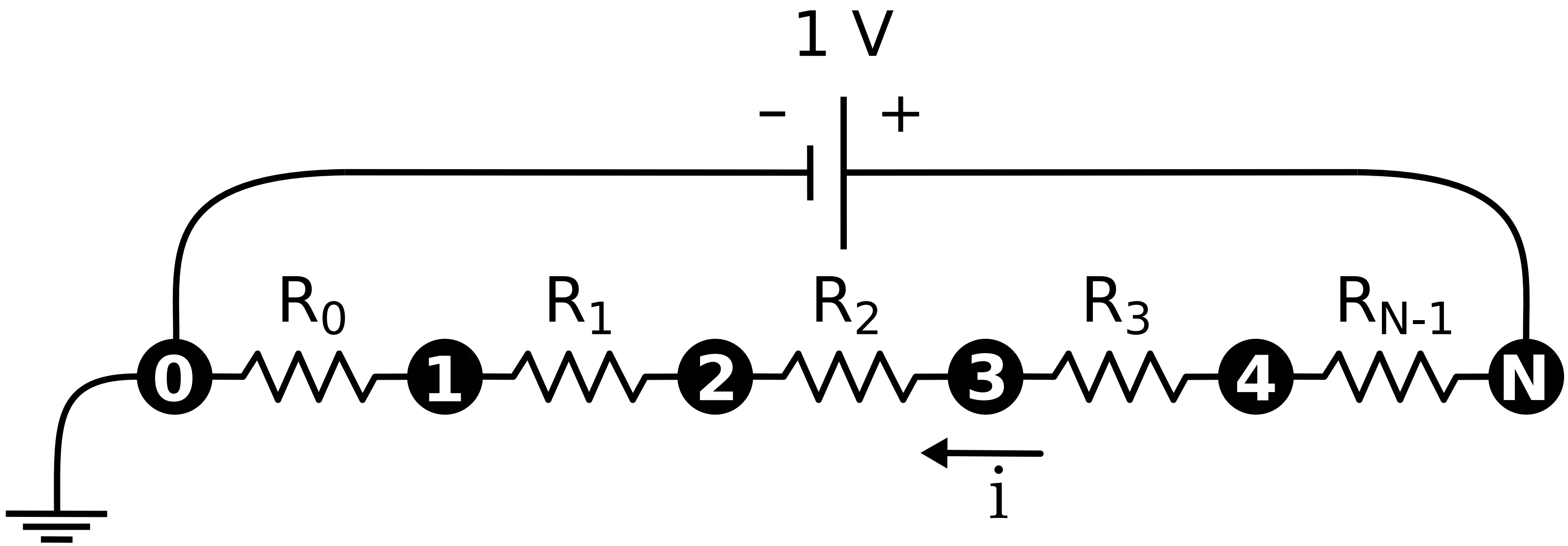
O passeio de um bêbado em uma dimensão

- Equação 3 diz que, para todo nó intermediário x, sua probabilidade $P(x)$ é a média ponderada das probabilidades de se chegar em casa a partir das posições vizinhas para as quais o bêbado pode escolher ir.
    - A partir do nó x, o bêbado tem duas possibilidades: ir para a esquerda ou para direita (eventos mutuamente exclusivos).
    - O evento de ir para direita não afeta a probabilidade $P(x+1)$ dele chegar na casa a partir de $x+1$, pois são eventos independentes.

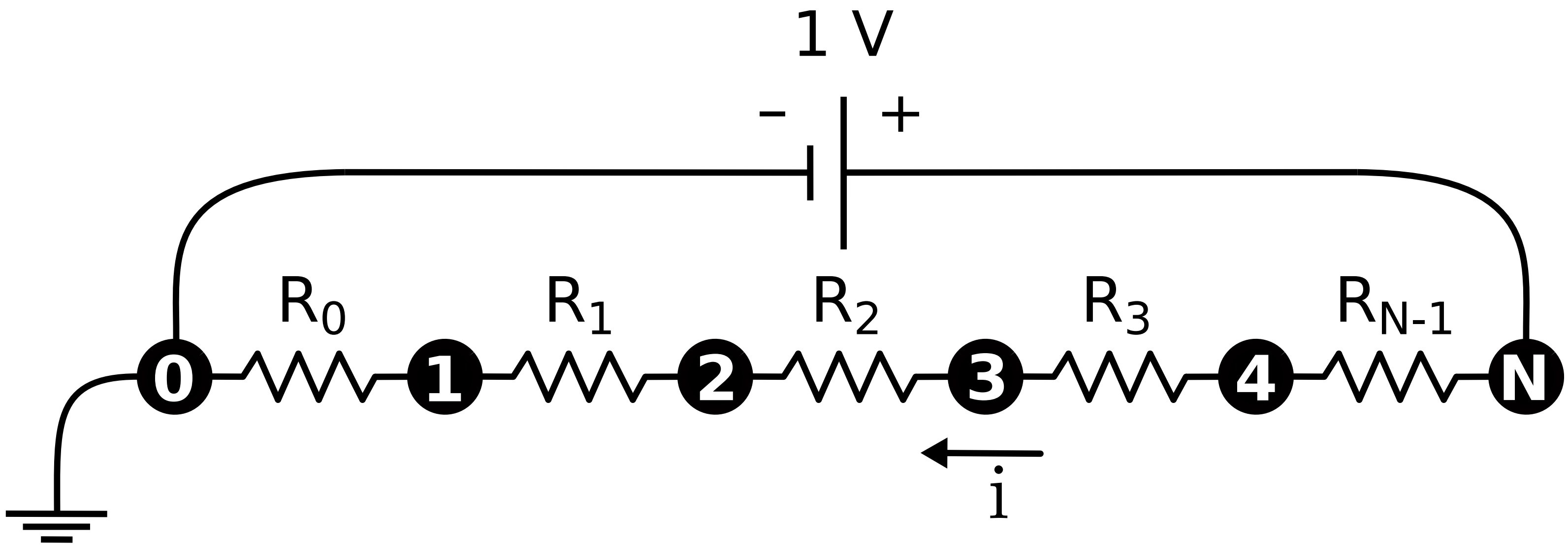
Dados dois eventos A e B, segundo o teorema de Bayes temos que: $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$, em que $P(A|B)$ é a probabilidade a posteriori de A condicional a B. No caso de eventos independentes temos: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$. Logo, podemos concluir que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



Agora analisaremos um problema aparentemente diferente, mas que pode ser mapeado no problema anterior. Conectamos vários resistores em série e aplicamos uma voltagem unitária nas pontas.



Adotamos o mesma esquema de numeração para os nós da rede, sendo que o ponto 0 está aterrado e temos uma diferença de potencial de 1V entre os pontos 0 e N. Queremos saber qual é a voltagem $V(x)$ nos pontos x entre os resistores, tal que R_x é o valor da resistência do resistor entre os nós x e $x+1$.

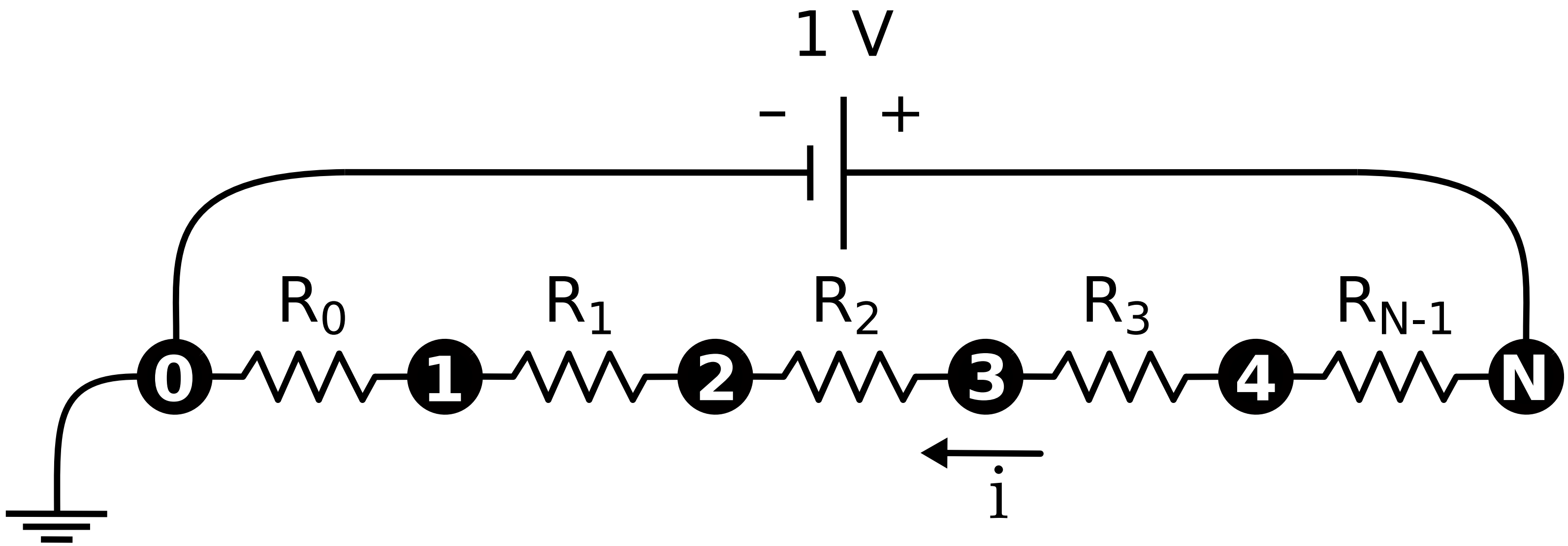


Da definição do problema, sabemos que:

$$V(0) = 0$$
$$V(N) = 1$$

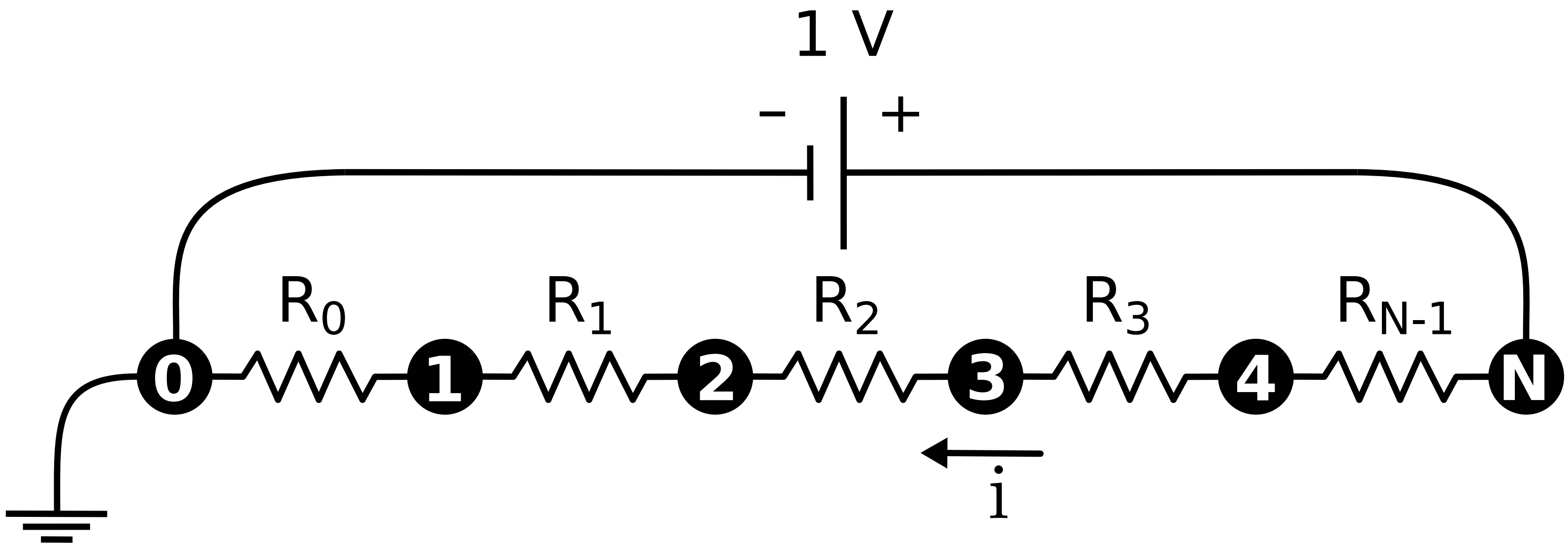
Queremos descobrir os valores de tensão $V(x)$ para $x = 1, \ldots, N-1$.

Analogia com voltagens em uma rede elétrica



Pela primeira lei de Ohm, sabemos que a diferença de potencial elétrico U entre dois pontos de um resistor é igual ao produto da resistência pela corrente elétrica.

$$U = R \cdot i \tag{4}$$



Considerando a condutância elétrica C, que é o inverso da resistência elétrica (isto é, $C = \frac{1}{R}$), podemos reescrever a Equação 4 como:

$$U = \frac{1}{C} \cdot i \implies i = U \cdot C \qquad (5)$$

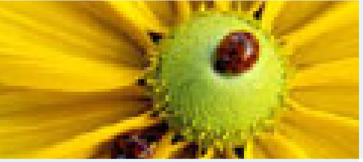
Analogia com voltagens em uma rede elétrica

Dado um nó intermediário x da rede, se aplicarmos a Equação 5 ao resistor de resistência R_{x-1} (com condutância C_{x-1}), teremos:

$$i = [V(x) - V(x-1)] \cdot C_{x-1} \tag{6}$$

Agora aplicando a Equação 5 ao resistor vizinho de resistência R_x (com condutância C_x), obtemos:

$$i = [V(x+1) - V(x)] \cdot C_x \tag{7}$$



Analogia com voltagens em uma rede elétrica

Dado que os resistores estão ligados em série, temos que a corrente elétrica i é a mesma. Logo, podemos combinar as equações e isolar $V(x)$:

$$
\begin{aligned}
&[V(x) - V(x-1)] \cdot C_{x-1} = [V(x+1) - V(x)] \cdot C_x \\
&V(x) \cdot C_{x-1} - V(x-1) \cdot C_{x-1} = V(x+1) \cdot C_x - V(x) \cdot C_x \\
&V(x) \cdot C_{x-1} + V(x) \cdot C_x = V(x+1) \cdot C_x + V(x-1) \cdot C_{x-1} \\
&V(x) \cdot [C_{x-1} + C_x] = V(x+1) \cdot C_x + V(x-1) \cdot C_{x-1} \\
&V(x) = \frac{C_{x-1} \cdot V(x-1) + C_x \cdot V(x+1)}{C_{x-1} + C_x} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

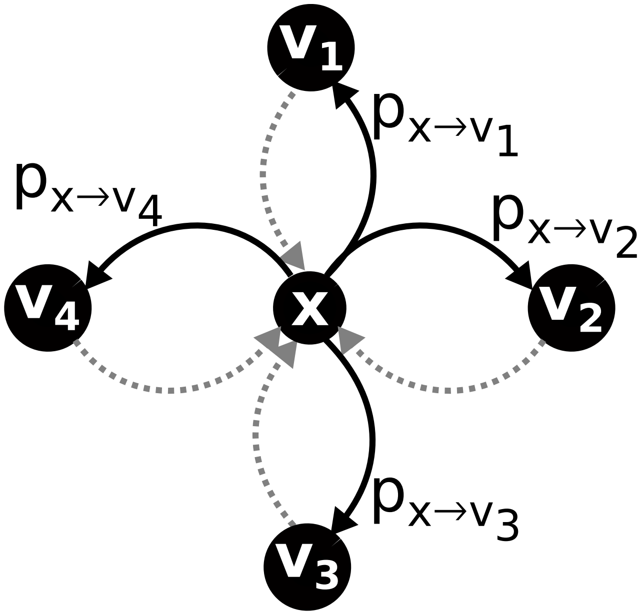
Portanto, podemos concluir que a tensão $V(x)$ no nó x é a média ponderada das tensões dos seus nós vizinhos, com pesos dados pelos valores das condutâncias.

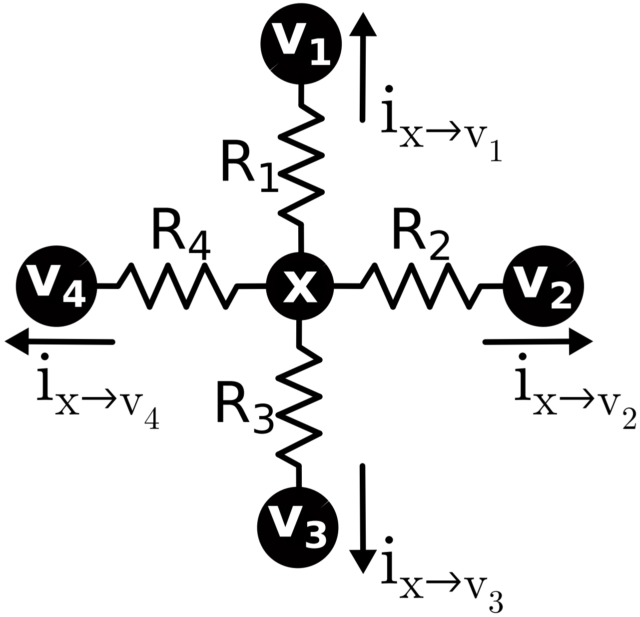
- Logo, acabamos caindo em um problema análogo ao anterior das probabilidades do bêbado. Se tomarmos $V(x) = P(x)$, podemos converter uma instância deste problema para o problema do passeio do bêbado, definindo as probabilidades de transição entre os nós, para todo nó intermediário x, da seguinte forma:

$$q_x = \frac{C_{x-1}}{C_{x-1} + C_x}$$
$$p_x = \frac{C_x}{C_{x-1} + C_x}$$

Observe que estamos assumindo que $p > 0$ e $q > 0$ no caso do bêbado e que não possuímos uma resistência infinita no problema do circuito (pois isso seria equivalente a cortar a ligação entre dois pontos do circuito).

Passeios aleatórios em duas dimensões





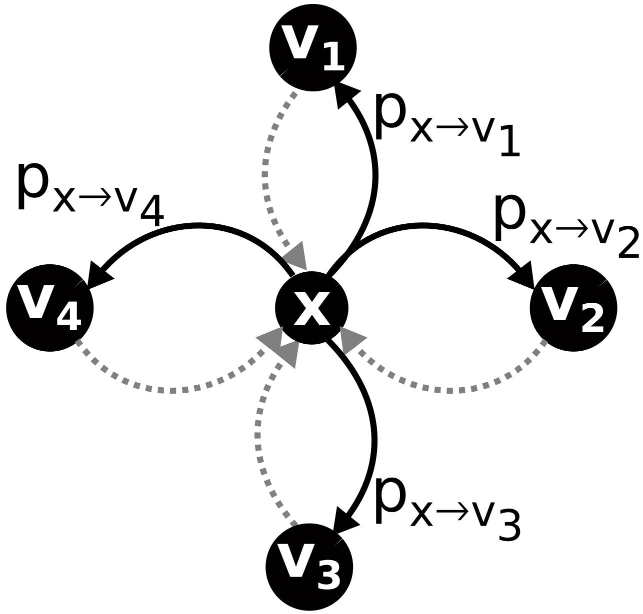
Apresentamos aqui uma generalização do problema do passeio do bêbado para o caso bidimensional com múltiplos bares e casas. Nesta configuração, cada posição $x \in \mathbb{Z}^2$ possui até quatro vizinhos (cima, direita, baixo e esquerda), no conjunto de posições adjacentes $\mathcal{A}(x) = \{v_1, \ldots, v_4\}$, sendo $p_{x\to v_k}$, $k = 1, \ldots, 4$, os valores de probabilidade das transições do bêbado para as posições vizinhas, com $\sum_{k=1}^{4} p_{x\to v_k} = 1$.

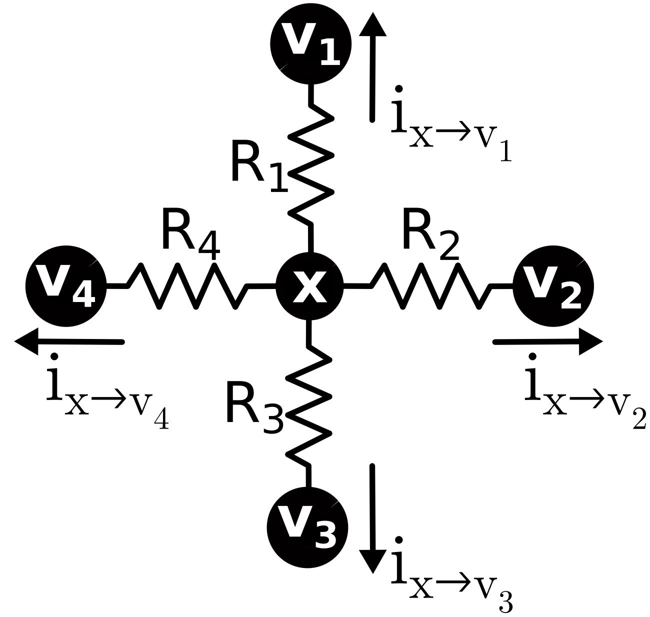
Passeios aleatórios em duas dimensões

Dados um conjunto de bares $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_r\}$ e um conjunto de casas $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$, seja $P(x)$ a probabilidade de o bêbado chegar em uma das casas antes de que em um dos bares partindo do ponto x. Primeiramente, observamos as seguintes propriedades de $P(x)$:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{B} \\ 1 & \text{se } x \in \mathcal{C} \\ \displaystyle\sum_{v \in \mathcal{A}(x)} p_{x \to v} \cdot P(v) & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{9}$$

Passeios aleatórios em duas dimensões





- A figura acima ilusta o problema similar em redes elétricas, em que queremos saber a voltagem $V(x)$ em um ponto interior que possui quatro vizinhos.
- Seja $i_{x \to v_k}$ a corrente elétrica do nó x para o nó vizinho v_k, $k = 1, \ldots, 4$, e $C_k = \frac{1}{R_k}$ as respectivas condutâncias para os resistores vizinhos.

- Aplicando a lei de Kirchhoff das correntes, temos:

$$\sum_{k=1}^{4} [i_{x \to v_k}] = 0$$

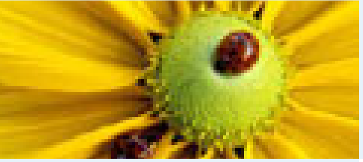
$$\sum_{k=1}^{4} C_k \cdot [V(v_k) - V(x)] = 0$$

$$\sum_{k=1}^{4} C_k \cdot V(v_k) = \sum_{k=1}^{4} C_k \cdot V(x)$$

$$V(x) \cdot \sum_{k=1}^{4} C_k = \sum_{k=1}^{4} C_k \cdot V(v_k)$$

$$V(x) = \frac{\sum_{k=1}^{4} C_k \cdot V(v_k)}{\sum_{k=1}^{4} C_k} \tag{10}$$

Ou seja, a tensão no nó x é a média ponderada da tensão dos vizinhos, com pesos dados pelos valores das condutâncias.



Logo, caímos novamente em um problema análogo ao anterior das probabilidades do bêbado. Portanto, se tomarmos $V(x) = P(x)$, podemos convertê-lo para o problema do passeio do bêbado, definindo as probabilidades de transição $p_{x \to v_k}$, para todo nó $x \notin \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, como:

$$p_{x \to v_k} = \frac{C_k}{\sum_{j=1}^{4} C_j} \tag{11}$$

Algoritmos: método de Monte Carlo

Uma forma de estimar as probabilidades $P(x)$ é via o uso de simulações (método este conhecido como *método de Monte Carlo*).

- Para cada nó intermediário x, são feitas um total de n simulações de passeios aleatórios, nas quais os deslocamentos do bêbado são realizados via sorteios.
- Cada simulação tem apenas dois resultados possíveis, ou o bêbado termina em uma casa ou em um bar.
- Contamos então, do total de simulações, quantas vezes ele chega em uma casa primeiro.
- Aí fazemos a divisão do número obtido pelo total de simulações n.

No entanto, este método é computacionalmente muito caro, pois para se conseguir uma aproximação com uma precisão razoável, a quantidade de passeios simulados deve ser extremamente elevada.

Algoritmos: método das relaxações

- Um algoritmo iterativo, mais eficiente que o anterior, é o algoritmo conhecido como o *método das relaxações*.

Algoritmos: método das relaxações

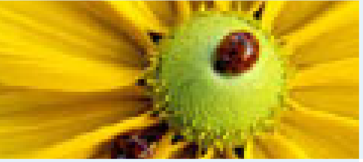
Seja P_0 o mapa de probabilidade inicial definido por:

$$P_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{B} \\ 1 & \text{se } x \in \mathcal{C} \\ 1/2 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{12}$$

Uma sequência de mapas de probabilidade $P_1, P_2, \ldots, P_K$, gradativamente mais refinados por relaxações sucessivas, é então obtida pela seguinte relação de recorrência:

$$P_{i+1}(x) = \begin{cases} P_i(x) & \text{se } x \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \\ \displaystyle\sum_{v \in \mathcal{A}(x)} p_{x \to v} \cdot P_i(v) & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{13}$$

Ao final de K iterações, o mapa final estimado $P_K(x)$ converge para $P(x)$ para valores de K suficientemente grandes.

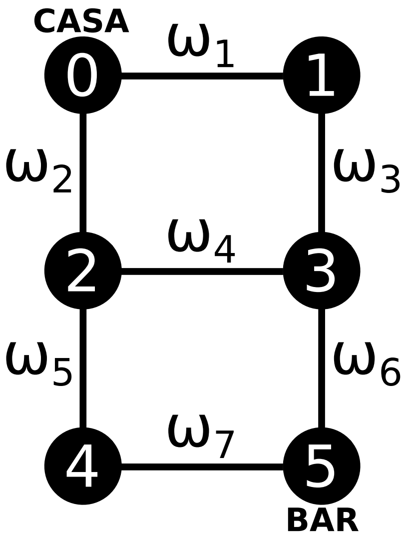


Algoritmos: sistema de equações lineares

- No método das relaxações, o número de iterações K necessário para se conseguir uma boa aproximação de $P(x)$ ainda é muito grande.
- No artigo [1], o autor adota uma solução mais eficiente via resolução de um sistema de equações lineares, que, para a nossa configuração do problema, possui solução única[1].

[1] A matriz do sistema de equações lineares resultante é não singular e, portanto, admite inversa.

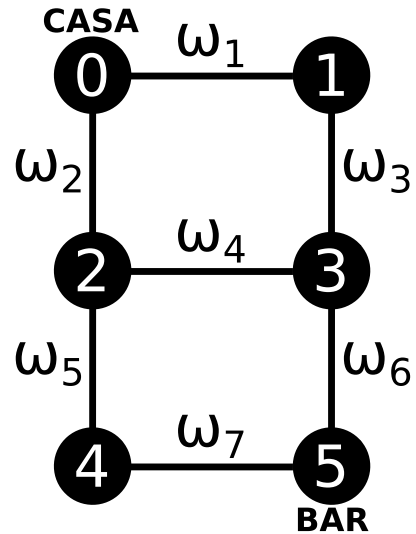
Exemplo:



$$P(0) = 1$$
$$P(1) \cdot [\omega_1 + \omega_3] = \omega_1 \cdot P(0) + \omega_3 \cdot P(3)$$
$$P(2) \cdot [\omega_2 + \omega_4 + \omega_5] = \omega_2 \cdot P(0) + \omega_4 \cdot P(3) + \omega_5 \cdot P(4)$$
$$P(3) \cdot [\omega_3 + \omega_4 + \omega_6] = \omega_3 \cdot P(1) + \omega_4 \cdot P(2) + \omega_6 \cdot P(5)$$
$$P(4) \cdot [\omega_5 + \omega_7] = \omega_5 \cdot P(2) + \omega_7 \cdot P(5)$$
$$P(5) = 0$$

Algoritmos: sistema de equações lineares

Exemplo:



$$P(0) = 1$$

$$P(1) \cdot [\omega_1 + \omega_3] + P(2) \cdot 0 + P(3) \cdot (-\omega_3) + P(4) \cdot 0 = \omega_1$$

$$P(1) \cdot 0 + P(2) \cdot [\omega_2 + \omega_4 + \omega_5] + P(3) \cdot (-\omega_4) + P(4) \cdot (-\omega_5) = \omega_2$$

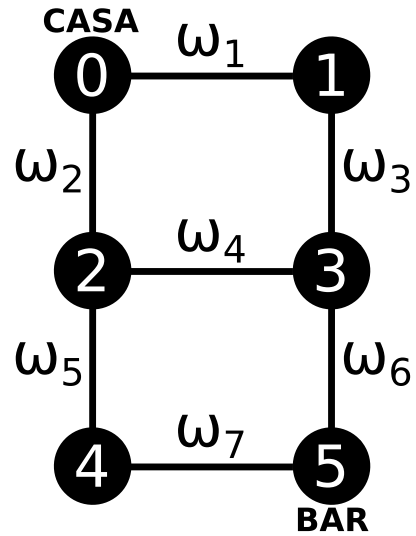
$$P(1) \cdot (-\omega_3) + P(2) \cdot (-\omega_4) + P(3) \cdot [\omega_3 + \omega_4 + \omega_6] + P(4) \cdot 0 = 0$$

$$P(1) \cdot 0 + P(2) \cdot (-\omega_5) + P(3) \cdot 0 + P(4) \cdot [\omega_5 + \omega_7] = 0$$

$$P(5) = 0$$

Algoritmos: sistema de equações lineares

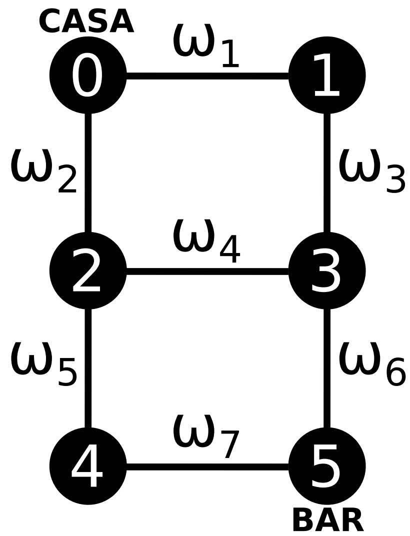
Exemplo:



$$
\begin{bmatrix}
\omega_1+\omega_3 & 0 & -\omega_3 & 0 \\
0 & \omega_2+\omega_4+\omega_5 & -\omega_4 & -\omega_5 \\
-\omega_3 & -\omega_4 & \omega_3+\omega_4+\omega_6 & 0 \\
0 & -\omega_5 & 0 & \omega_5+\omega_7
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Algoritmos: sistema de equações lineares

Exemplo:



$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1+\omega_3 & 0 & -\omega_3 & 0 \\ 0 & \omega_2+\omega_4+\omega_5 & -\omega_4 & -\omega_5 \\ -\omega_3 & -\omega_4 & \omega_3+\omega_4+\omega_6 & 0 \\ 0 & -\omega_5 & 0 & \omega_5+\omega_7 \end{bmatrix}}_{\text{matriz laplaciana (não singular para grafo conexo)}} \cdot \begin{bmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Aplicações: segmentação de imagens

- Cada pixel da imagem representará uma posição válida do bêbado, que poderá se deslocar nas quatro direções (cima, baixo, esquerda e direita).
- Valores baixos de condutância serão associados às transições entre pixels com grande variação de brilho e as probabilidades de deslocamento, nas diferentes direções, serão computadas tal como indicado pela Equação 11.
  - Deste modo o bêbado terá maior probabilidade de se deslocar por regiões homogêneas da imagem com nível de brilho similar.

Aplicações: segmentação de imagens

- O método das relaxações pode ser usado para a geração de métodos híbridos de segmentação [2, 3].
  - Para isso, tomamos o mapa de probabilidade inicial P_0 como sendo a saída de segmentação binária de um método inicial fornecido.
  - Aplicamos então poucas iterações de relaxação, usando um valor pequeno de K.
  - O mapa de probabilidade resultante $P_K(x)$ corresponderá a uma segmentação fuzzy, com um resultado intermediário entre o do método fornecido e o do *Random Walks*.

Bibliografia

[1] L. Grady. Random walks for image segmentation. *Trans. on PAMI*, 28(11):1768–1783, 2006

[2] F. Malmberg, I. Nyström, A. Mehnert, C. Engstrom, and E. Bengtsson. Relaxed image foresting transforms for interactive volume image segmentation. In *Proc.SPIE*, volume 7623, pages 7623 – 7623 – 11, 2010

[3] C. L. Demario and P. A. V. Miranda. Relaxed oriented image foresting transform for seeded image segmentation. In *2019 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 1520–1524, 2019