

# The Image Foresting Transform (IFT)

Paulo A. V. de Miranda

`pavm@ic.unicamp.br`

Laboratório de Informática Visual (LIV), Instituto de Computação (IC),  
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

# Motivação

- **Unificação:** Vários operadores de imagem são derivados de um algoritmo geral. Isto favorece
  - implementações baseadas em hardware [1],
  - compreender a relação entre alguns operadores de imagem [2, 3, 4, 5], e
  - possíveis extensões [6, 7, 8, 9, 10, 11].

# Motivação

- **Eficiência:** A maioria dos operadores de imagem podem ser implementados em tempo linear e otimizações adicionais são possíveis com cálculo diferencial [12] e paralelo [13], e para algumas aplicações específicas [14, 15, 16, 17].

# Motivação

- **Eficiência:** A maioria dos operadores de imagem podem ser implementados em tempo linear e otimizações adicionais são possíveis com cálculo diferencial [12] e paralelo [13], e para algumas aplicações específicas [14, 15, 16, 17].
- **Simplicidade:** Os operadores de imagem são reduzidos a escolha de poucos parâmetros no algoritmo da IFT e um processamento local de sua saída.

# Quais problemas podem ser resolvidos?

Problemas que estão direta ou indiretamente relacionados a um problema de partição ótima da imagem.

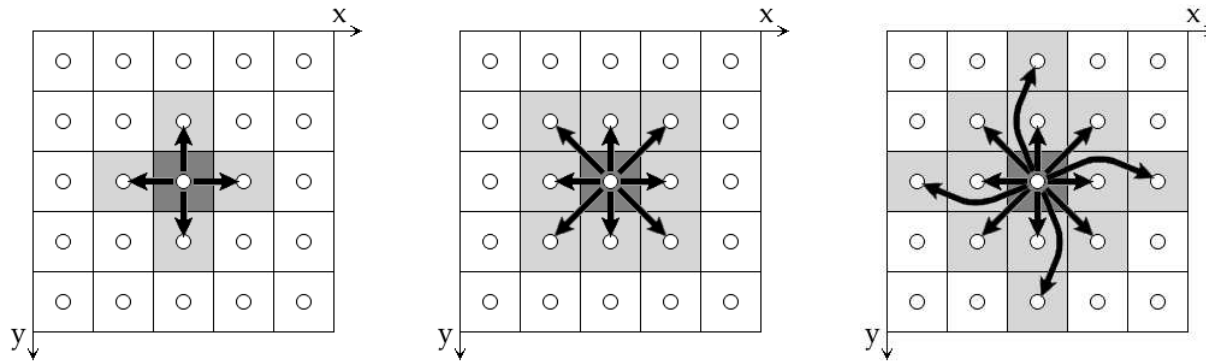
- **Transformadas de distância e operadores relacionados:** Euclidean distance transform [18], multiscale skeletonization [18], fractal dimensions [6], shape filtering [14, 18], shape saliencies [6, 19, 20], shape description [19, 21], tensor scale computation [21], geodesic paths, etc.

# Quais problemas podem ser resolvidos?

- **Filtragem e segmentação de imagens:**  
Morphological reconstructions [2] and image segmentation based on watershed transforms [3, 5, 12, 22, 23, 24], live wire [15, 25], tree pruning [7, 26, 27], graph-cut measures [8], and fuzzy-connected components [9, 16].
- **Reconhecimento de padrões:**  
Data clustering [10, 24, 28] and supervised pattern classification [11, 29].

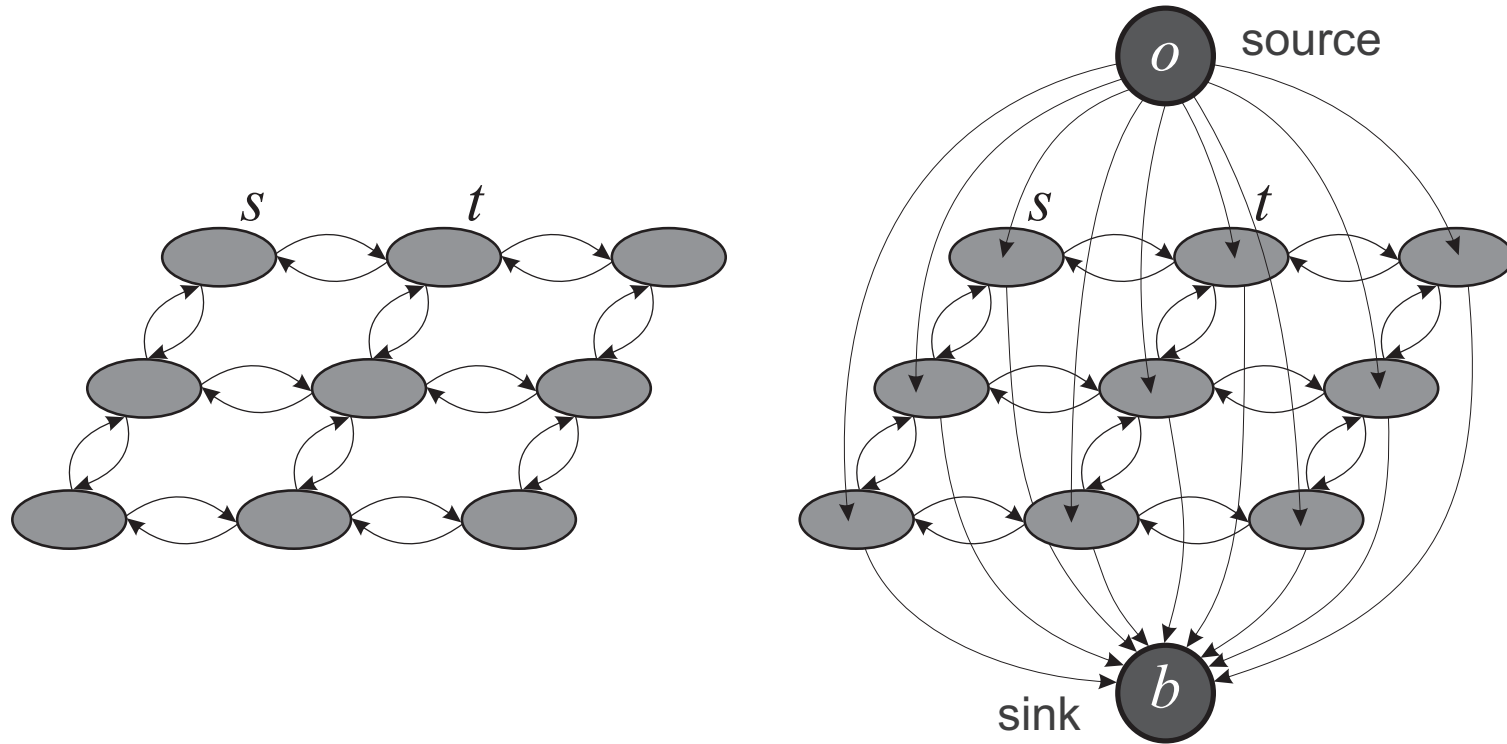
# Imagem como um grafo

A imagem é interpretada como um grafo cujos nós são os pixels e os arcos são definidos por uma **relação de adjacência**  $\mathcal{A} : (s, t) \in \mathcal{A}$  se  $\|t - s\| \leq d_i$ .



Adjacências euclidianas. (a) 2D de raio  $d_i = 1$  (vizinhos-4),  
(b) raio  $d_i = \sqrt{2}$  (vizinhos-8), (c) raio  $d_i = 2$ .

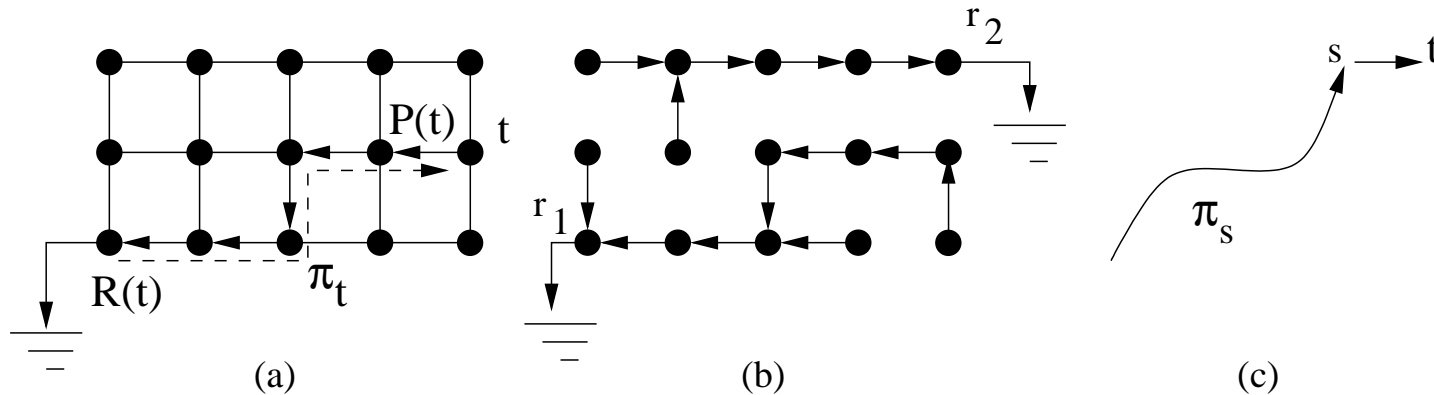
# Imagem como um grafo



(a) Grafo vizinhos-4 de uma imagem 2D. (b) Um grafo estendido por dois nós terminais (fonte e destino).

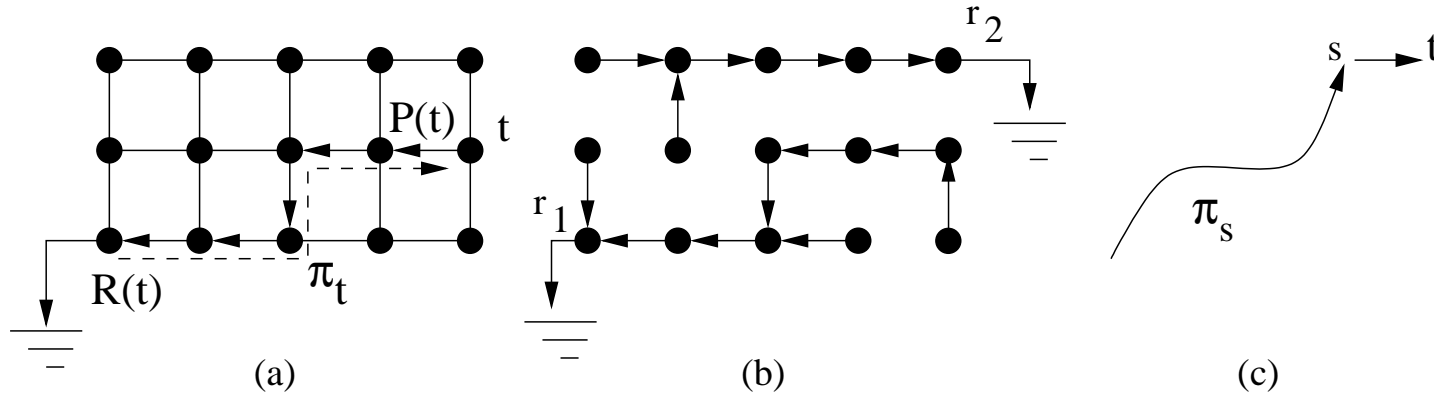


# Caminhos no grafo



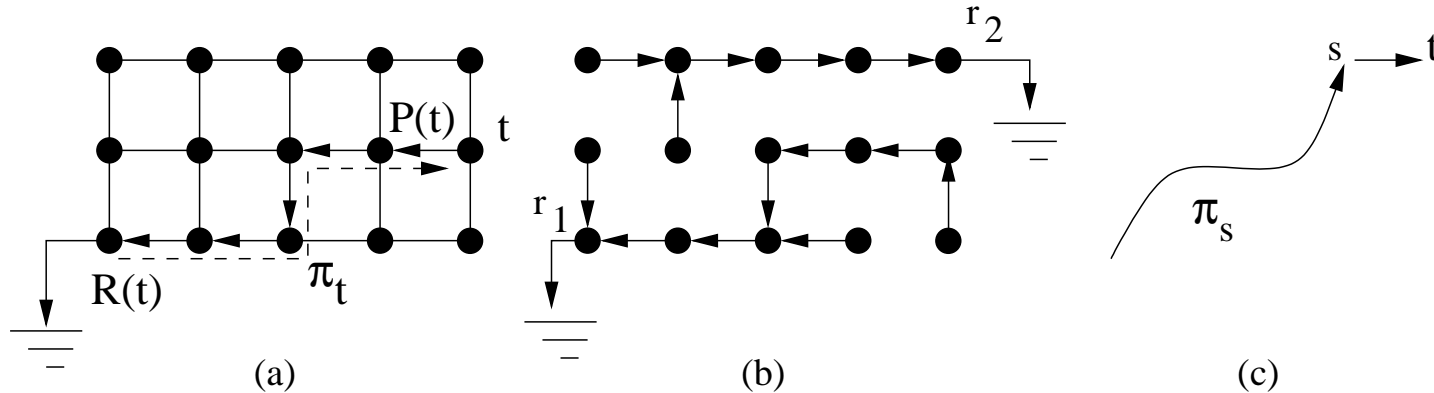
- Um caminho  $\pi_t = \langle t_1, t_2, \dots, t \rangle$  é uma seqüência de nós adjacentes, com término em algum nó  $t$ .

# Caminhos no grafo



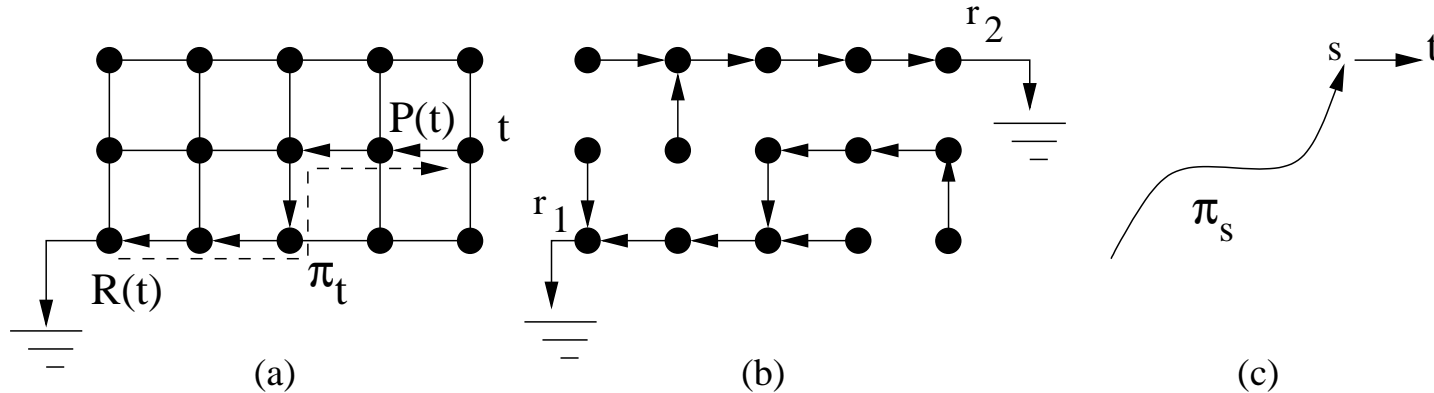
- Um caminho  $\pi_t = \langle t_1, t_2, \dots, t \rangle$  é uma seqüência de nós adjacentes, com término em algum nó  $t$ .
- O predecessor  $P(s)$  de cada nó  $s \in \pi_t$  leva a um nó raiz  $R(t)$  e  $P(R(t)) = nil$ .

# Caminhos no grafo



- Um caminho  $\pi_t = \langle t_1, t_2, \dots, t \rangle$  é uma seqüência de nós adjacentes, com término em algum nó  $t$ .
- O predecessor  $P(s)$  de cada nó  $s \in \pi_t$  leva a um nó raiz  $R(t)$  e  $P(R(t)) = nil$ .
- Um caminho  $\pi_t$  é *trivial* quando  $\pi_t = \langle t \rangle$  (i.e.,  $P(t) = nil$ ).

# Caminhos no grafo



- Um caminho  $\pi_t = \langle t_1, t_2, \dots, t \rangle$  é uma seqüência de nós adjacentes, com término em algum nó  $t$ .
- O predecessor  $P(s)$  de cada nó  $s \in \pi_t$  leva a um nó raiz  $R(t)$  e  $P(R(t)) = nil$ .
- Um caminho  $\pi_t$  é *trivial* quando  $\pi_t = \langle t \rangle$  (i.e.,  $P(t) = nil$ ).
- Usamos  $\pi_s \cdot \langle s, t \rangle$  para indicar a extensão de um caminho  $\pi_s$  por um arco  $(s, t) \in \mathcal{A}$ .

# Caminho Ótimo

- Uma **função de caminho**  $f(\pi_t)$  atribui um valor para qualquer caminho  $\pi_t$ .

# Caminho Ótimo

- Uma **função de caminho**  $f(\pi_t)$  atribui um valor para qualquer caminho  $\pi_t$ .
- Um caminho  $\pi_t$  é **ótimo** se  $f(\pi_t) \leq f(\tau_t)$  para qualquer outro  $\tau_t$ , independentemente de sua raiz.

# Caminho Ótimo

- Uma **função de caminho**  $f(\pi_t)$  atribui um valor para qualquer caminho  $\pi_t$ .
- Um caminho  $\pi_t$  é **ótimo** se  $f(\pi_t) \leq f(\tau_t)$  para qualquer outro  $\tau_t$ , independentemente de sua raiz.
- A definição dual  $f(\pi_t) \geq f(\tau_t)$  também é válida.

# Caminho Ótimo

- Uma **função de caminho**  $f(\pi_t)$  atribui um valor para qualquer caminho  $\pi_t$ .
- Um caminho  $\pi_t$  é **ótimo** se  $f(\pi_t) \leq f(\tau_t)$  para qualquer outro  $\tau_t$ , independentemente de sua raiz.
- A definição dual  $f(\pi_t) \geq f(\tau_t)$  também é válida.
- Uma floresta de caminhos ótimos é uma floresta de espalhamento onde todos os caminhos são ótimos.



# Funções de conectividade

As funções de conectividade são especificadas por uma regra de inicialização e uma regra de extensão de caminho.

$$\begin{aligned} f_{\max}(\langle t \rangle) &= H(t) \\ f_{\max}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) &= \max\{f_{\max}(\pi_s), w(s, t)\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f_{\min}(\langle t \rangle) &= H(t) \\ f_{\min}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) &= \min\{f_{\min}(\pi_s), w(s, t)\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_{sum}(\langle t \rangle) &= H(t) \\ f_{sum}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) &= f_{sum}(\pi_s) + w(s, t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$f_{euc}(\langle t \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \in \mathcal{S} \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{euc}(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle) = \|t - R(s)\|^2 \quad (4)$$

# Algoritmo da IFT

## Algorithm 1 — GENERAL IFT ALGORITHM

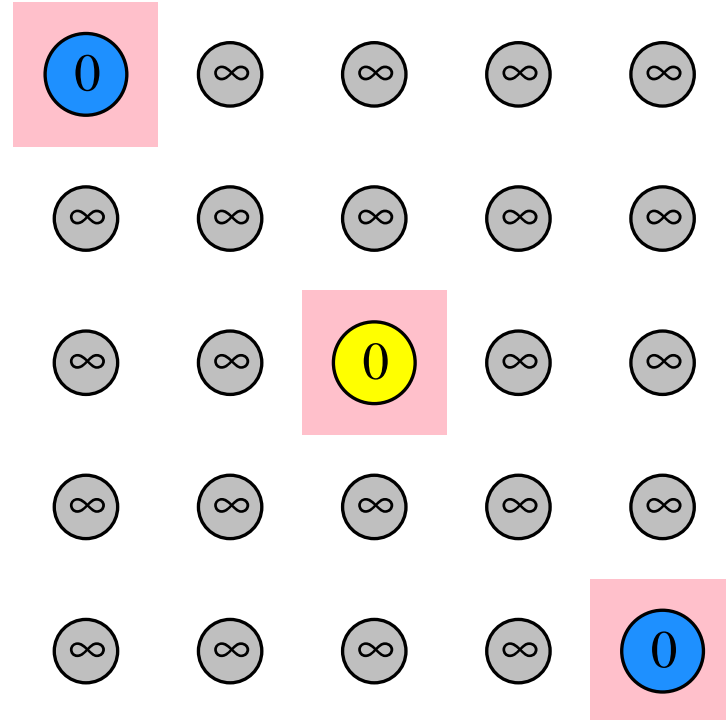
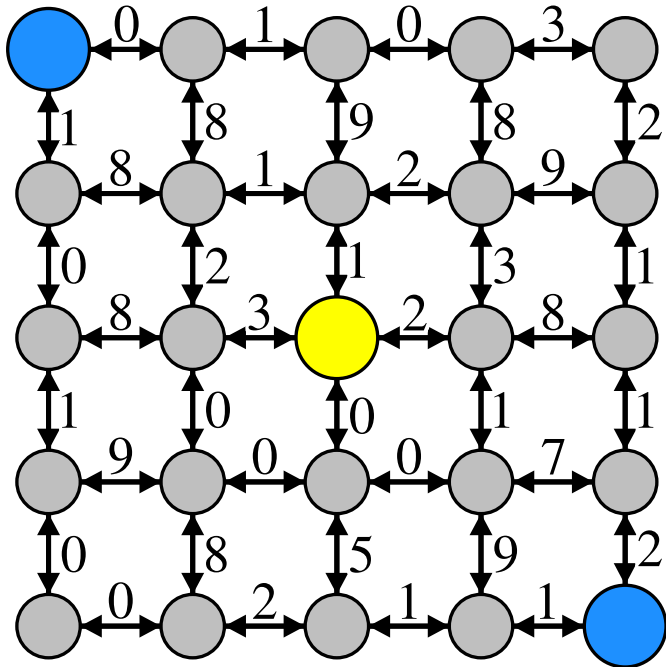
INPUT: Image  $\hat{I} = (\mathcal{I}, \vec{I})$ , adjacency  $\mathcal{A}$ , and path-value function  $f$ .

OUTPUT: Optimum-path forest  $P$  and the minimum path-value map  $V$ .

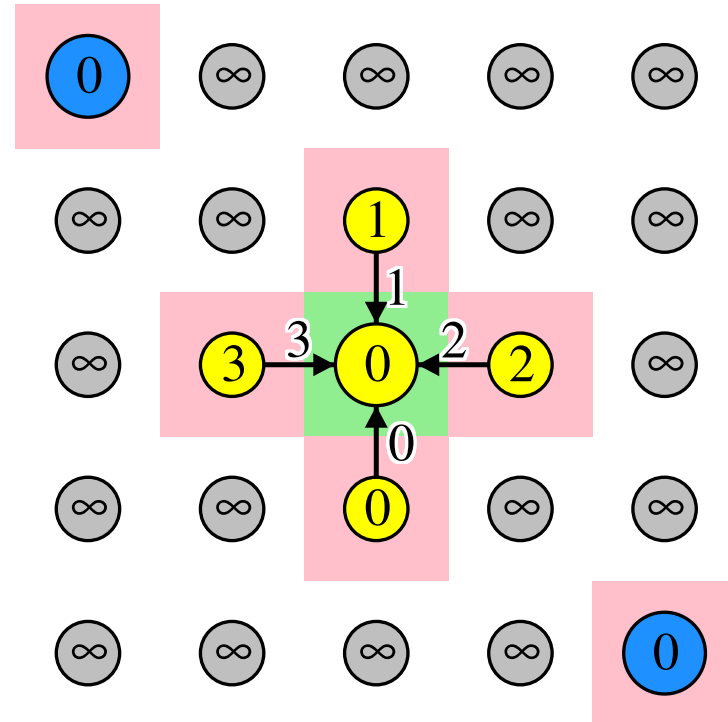
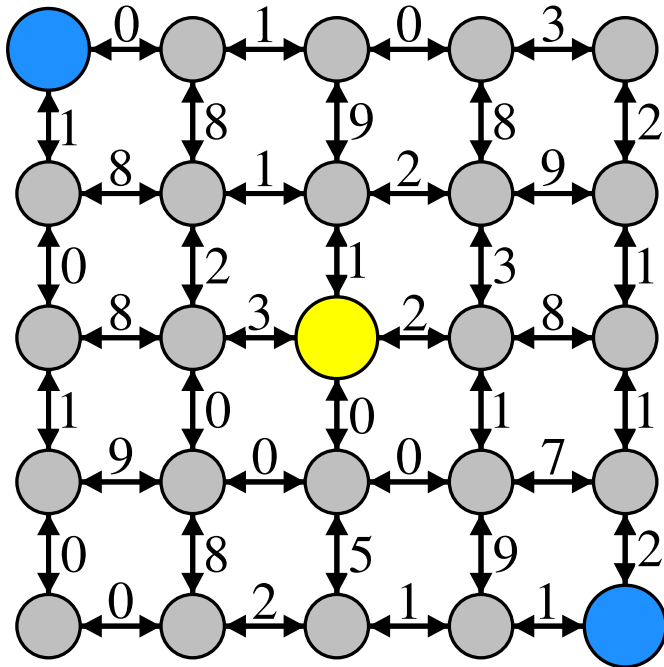
AUXILIARY: Priority queue  $Q$  and variable  $tmp$ .

1. **For each**  $t \in \mathcal{I}$ , **do**  $P(t) \leftarrow nil$  **and**  $V(t) \leftarrow f(\langle t \rangle)$ . **If**  $V(t) \neq +\infty$ , **then insert**  $t$  **in**  $Q$ .
2. **While**  $Q \neq \emptyset$ , **do**
3.     **Remove**  $s$  **from**  $Q$  **such that**  $V(s)$  **is minimum.**
4.     **For each**  $t \in \mathcal{A}(s)$ , **such that**  $V(t) > V(s)$ , **do**
5.         **Compute**  $tmp \leftarrow f(\pi_s \cdot \langle s, t \rangle)$ .
6.         **If**  $tmp < V(t)$ , **then**
7.             **If**  $V(t) \neq +\infty$ , **then remove**  $t$  **from**  $Q$ .
8.             **Set**  $P(t) \leftarrow s$ ,  $V(t) \leftarrow tmp$  **and insert**  $t$  **in**  $Q$ .

# Propagação dos caminhos

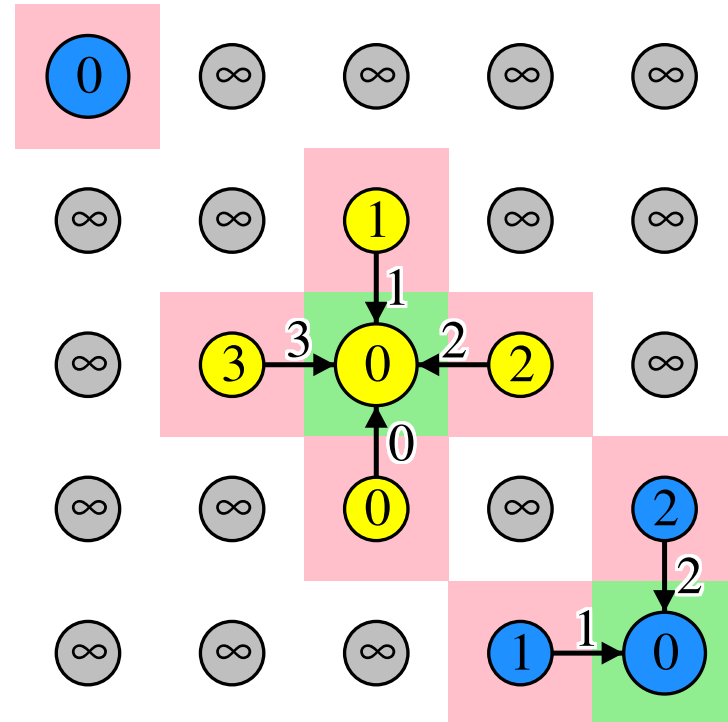
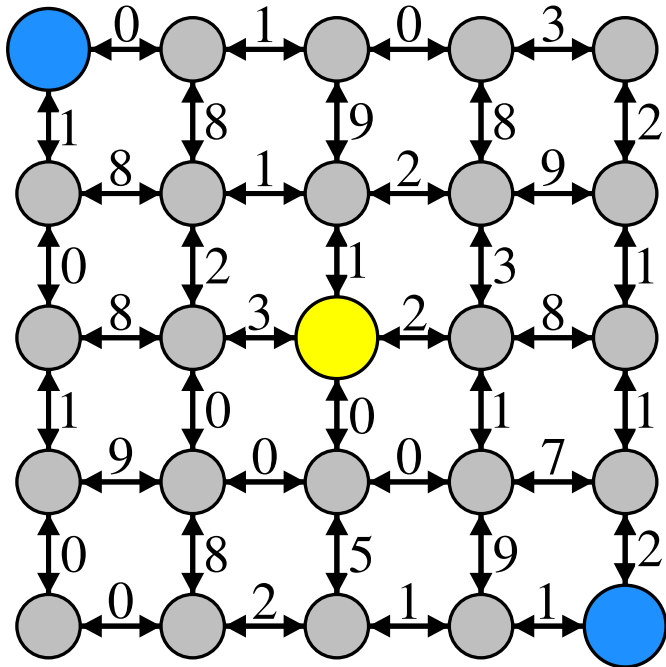


# Propagação dos caminhos



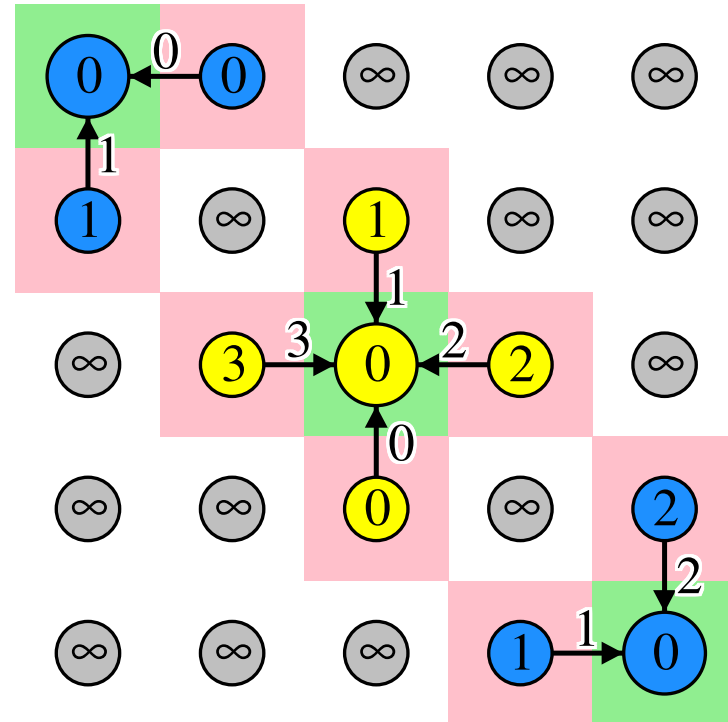
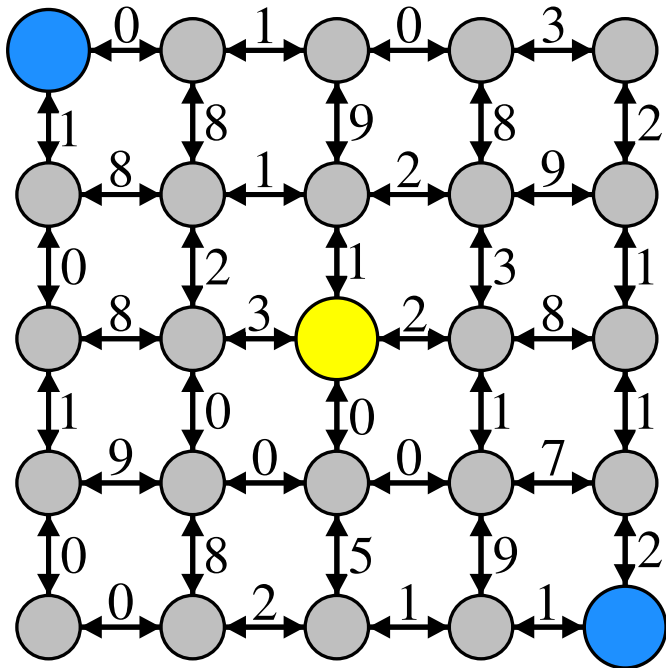
após 1 iteração.

# Propagação dos caminhos



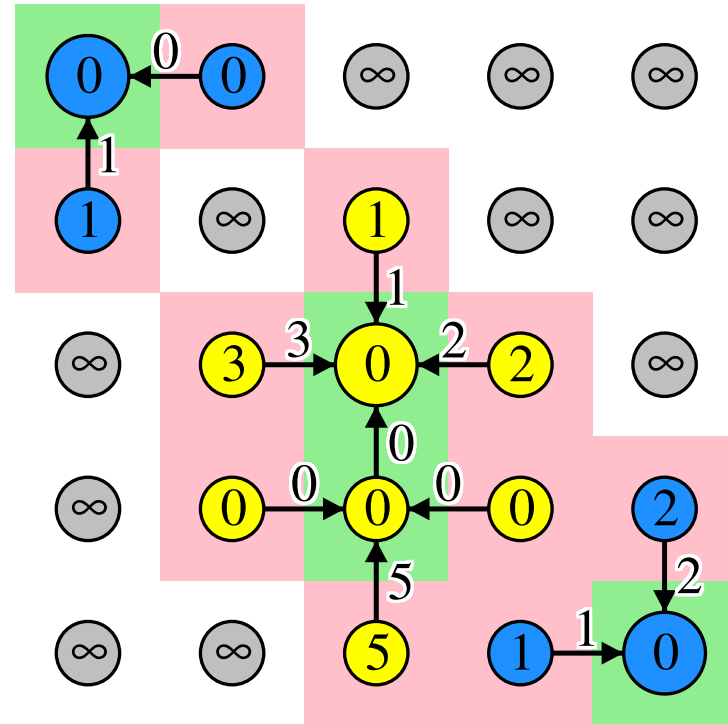
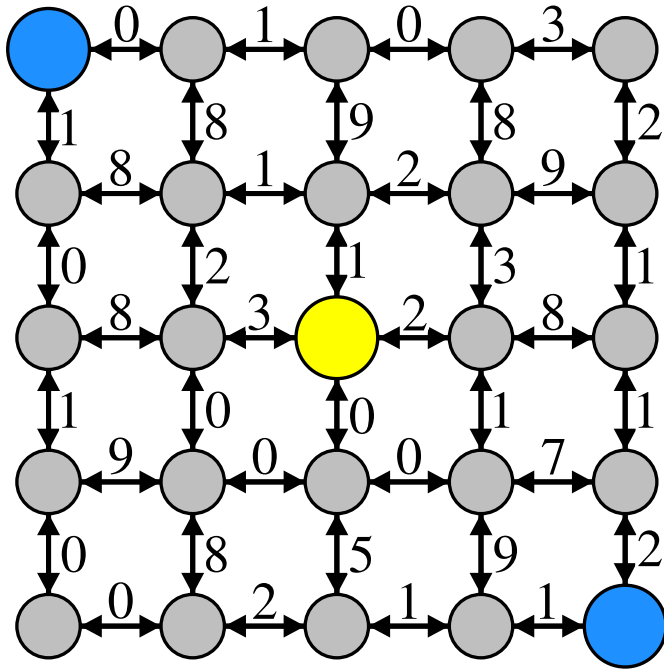
após 2 iterações.

# Propagação dos caminhos



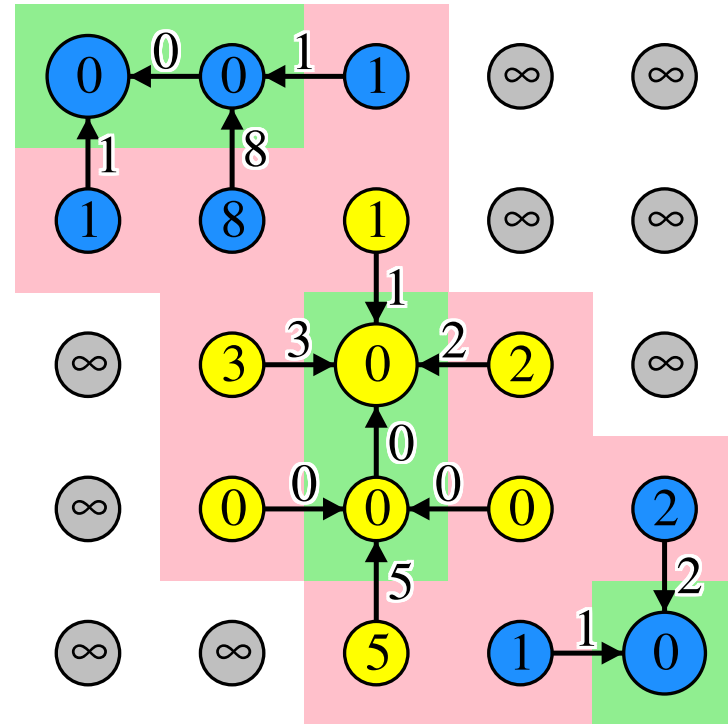
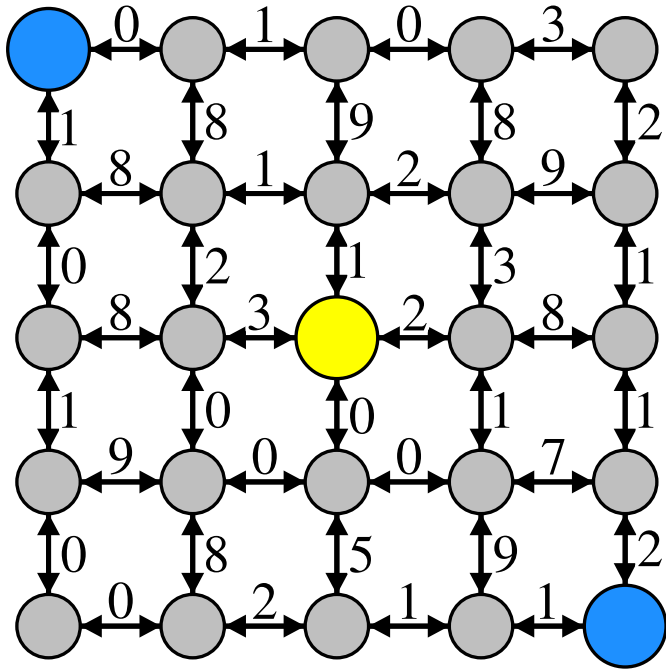
após 3 iterações.

# Propagação dos caminhos



após 4 iterações.

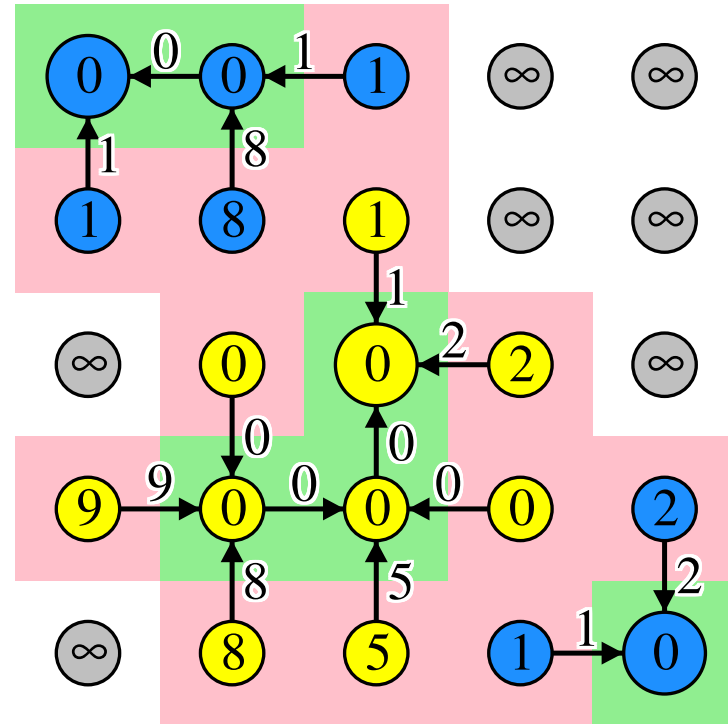
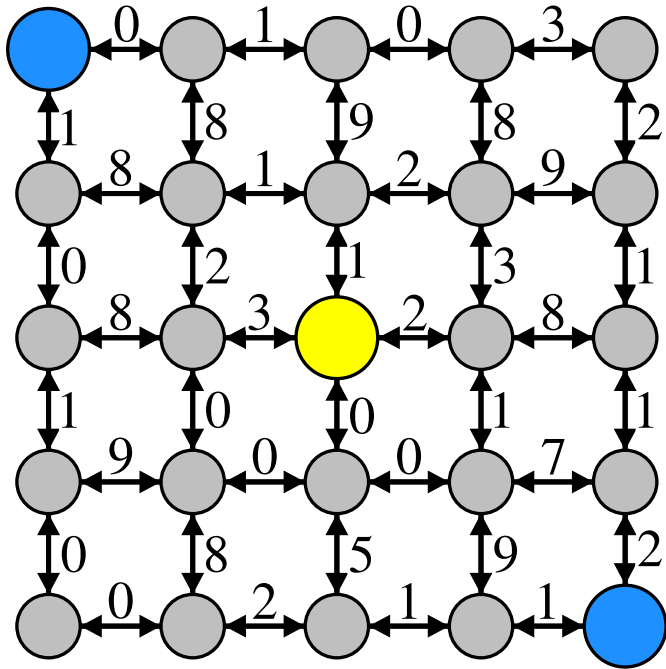
# Propagação dos caminhos



após 5 iterações.

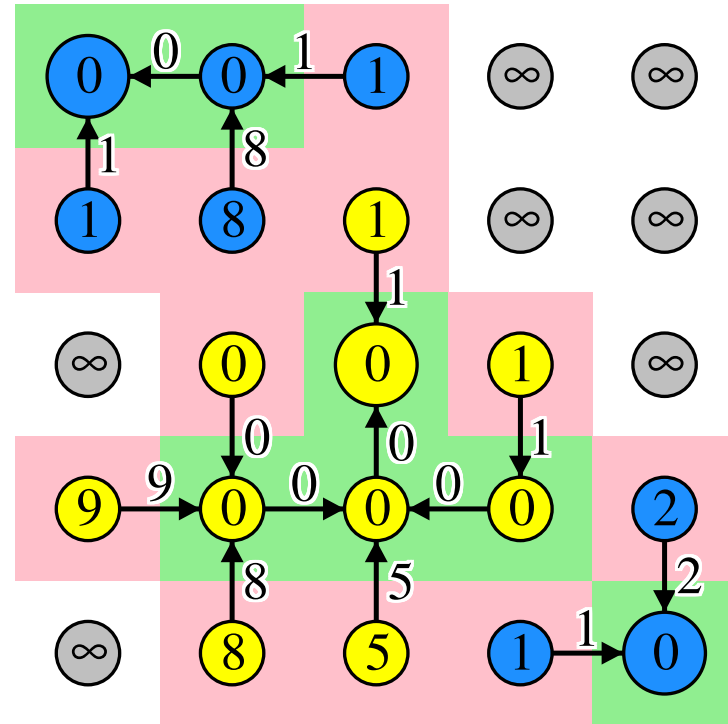
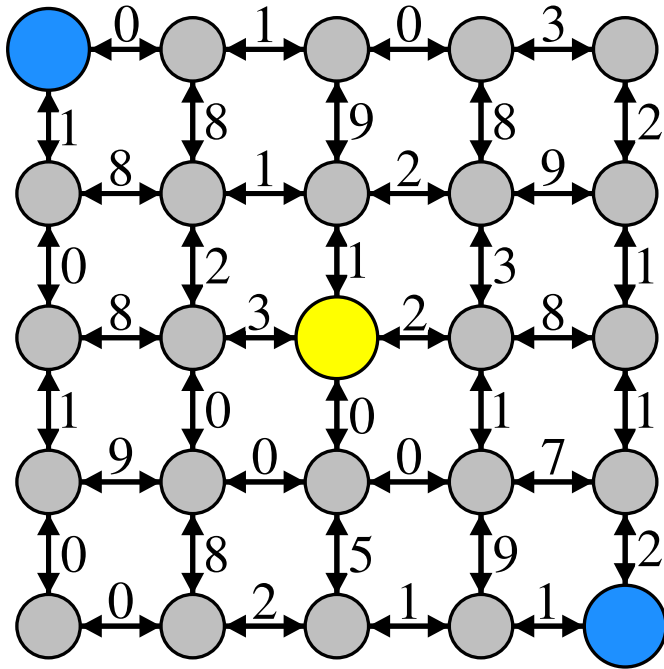


# Propagação dos caminhos



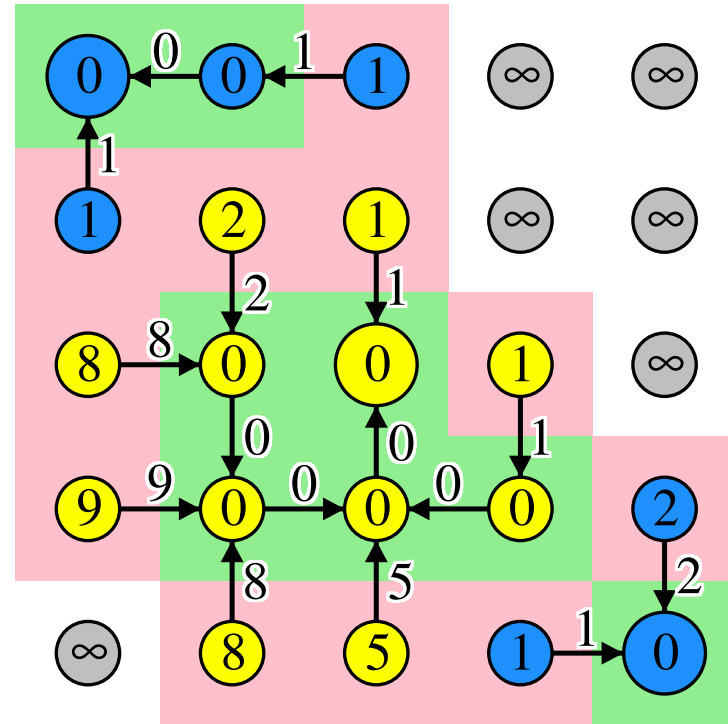
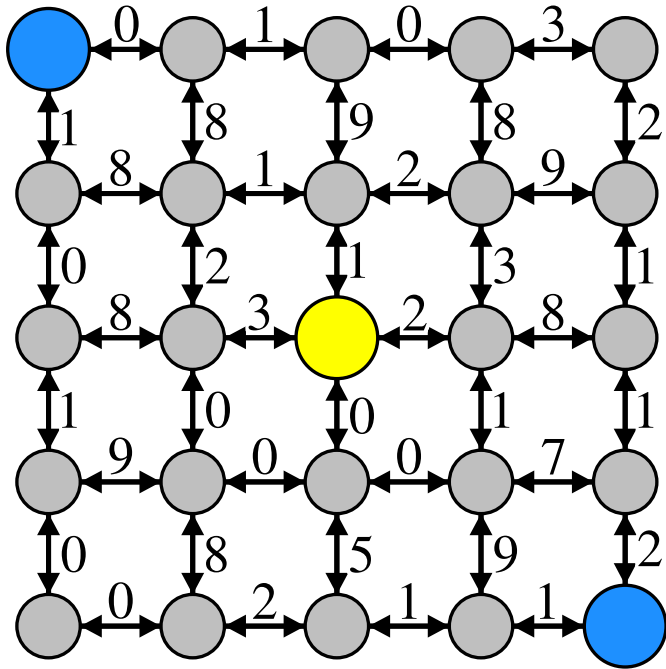
após 6 iterações.

# Propagação dos caminhos



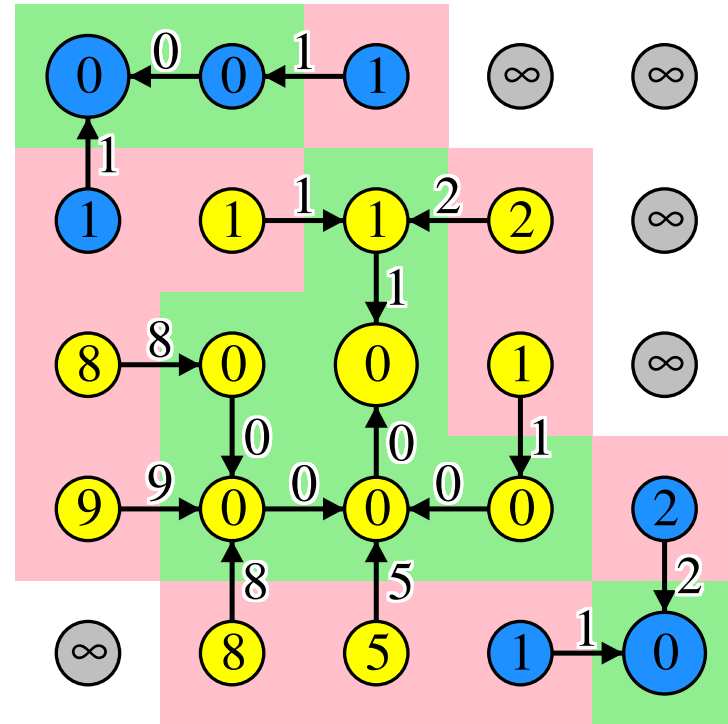
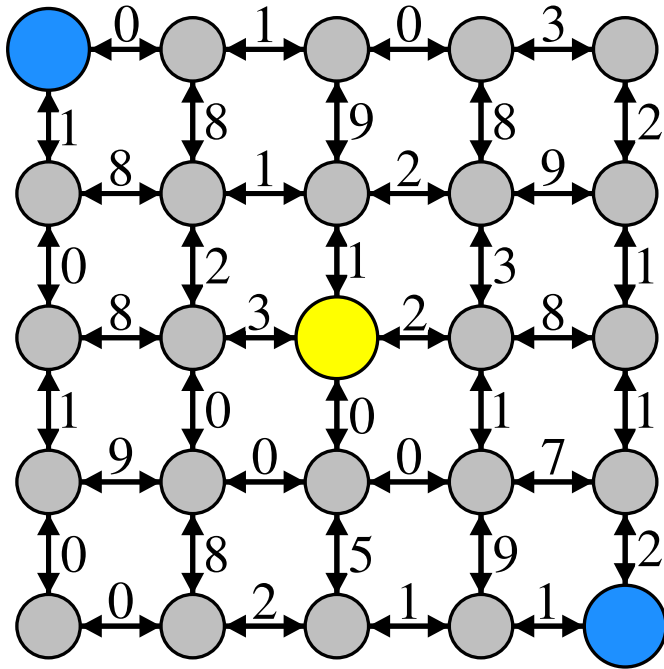
após 7 iterações.

# Propagação dos caminhos



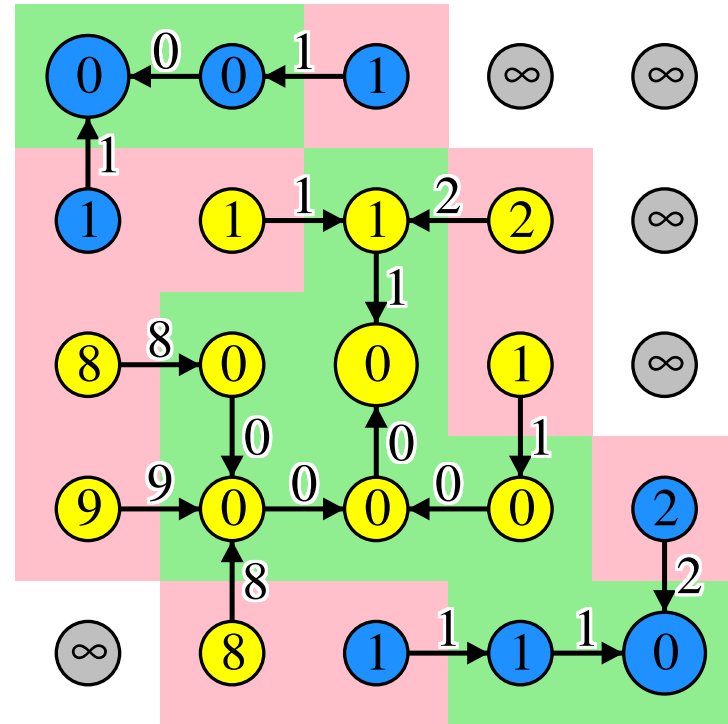
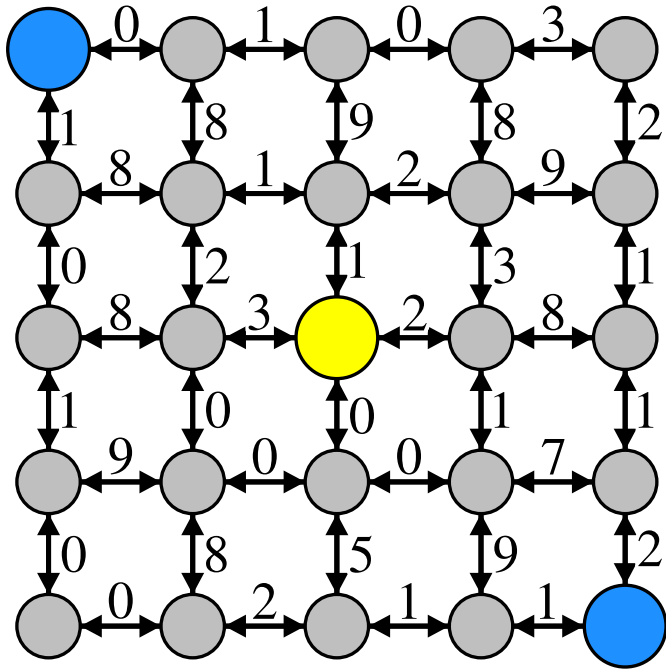
após 8 iterações.

# Propagação dos caminhos



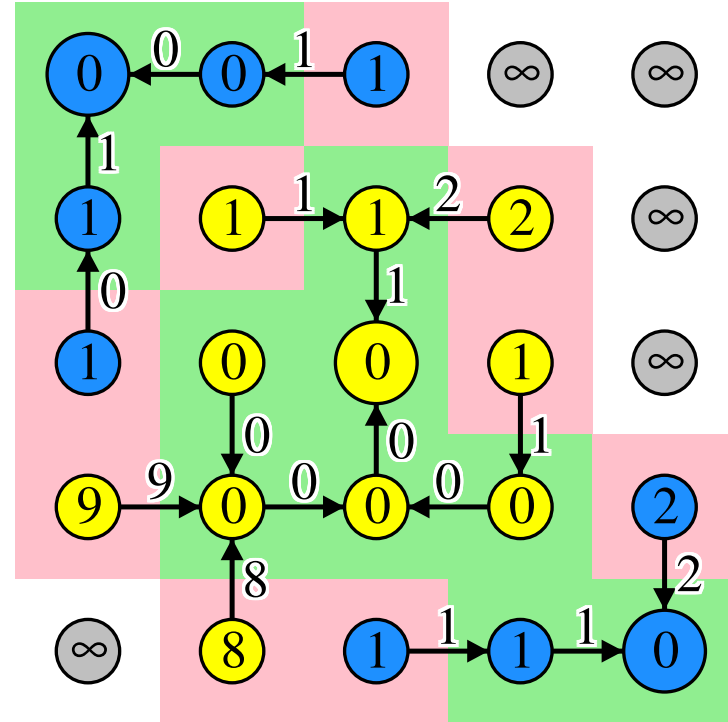
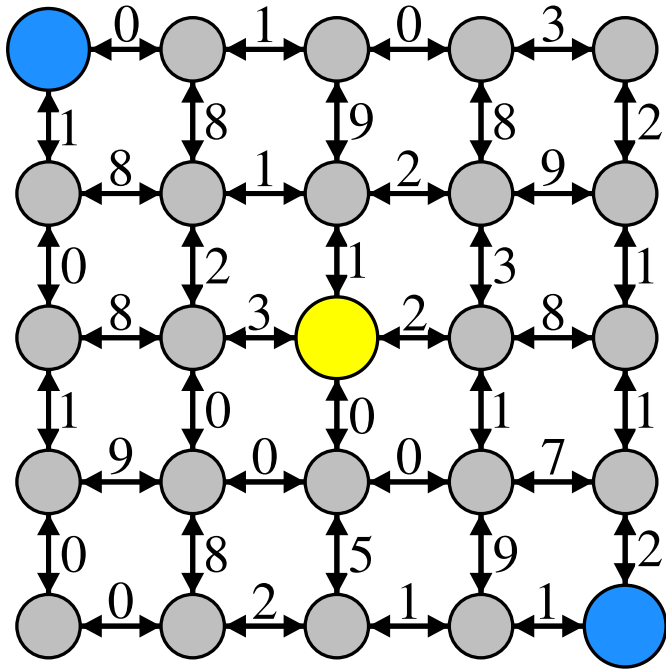
após 9 iterações.

# Propagação dos caminhos



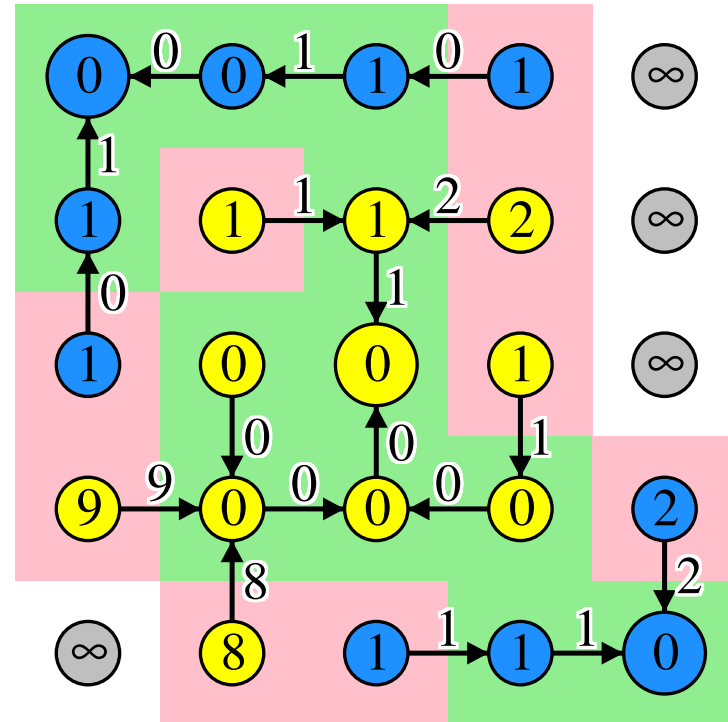
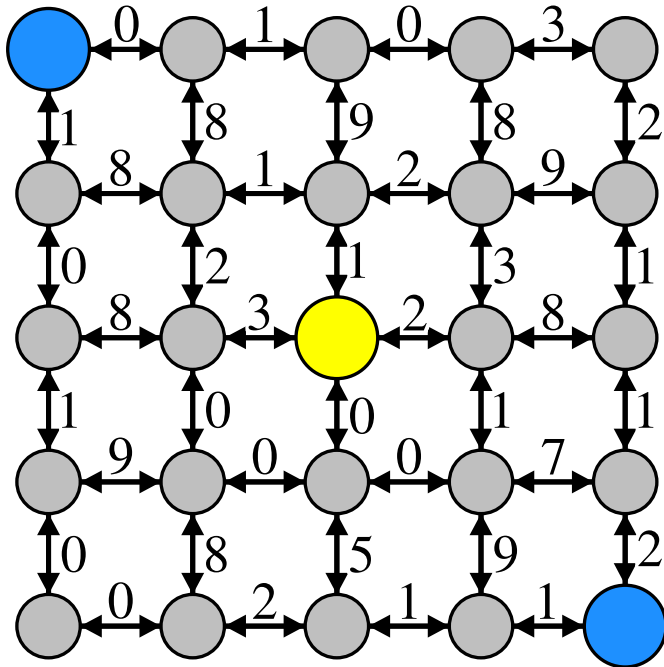
após 10 iterações.

# Propagação dos caminhos



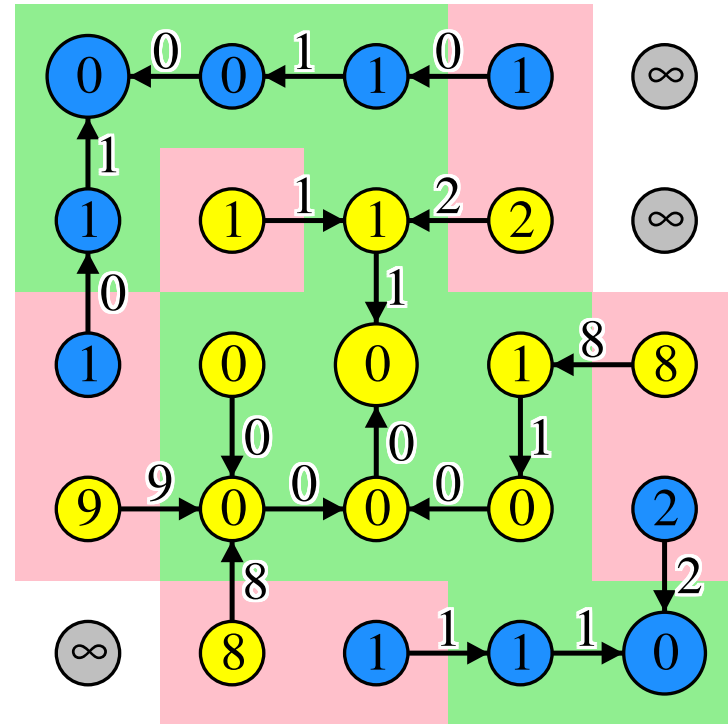
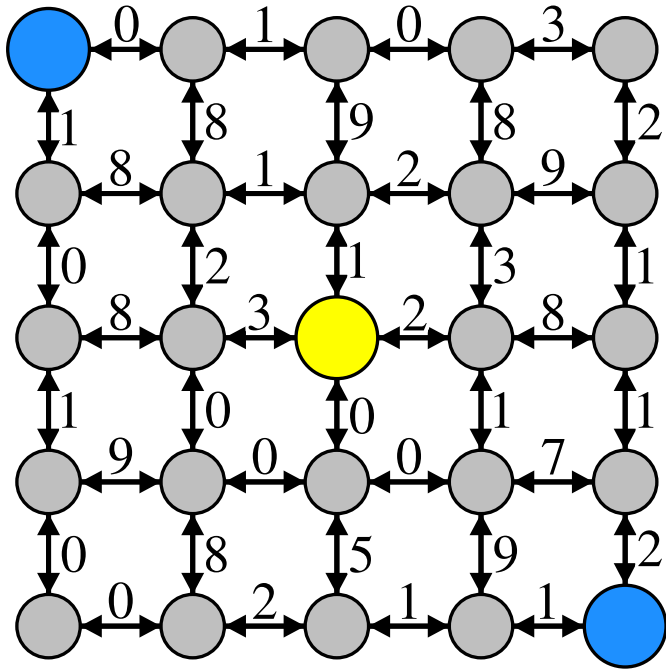
após 11 iterações.

# Propagação dos caminhos



após 12 iterações.

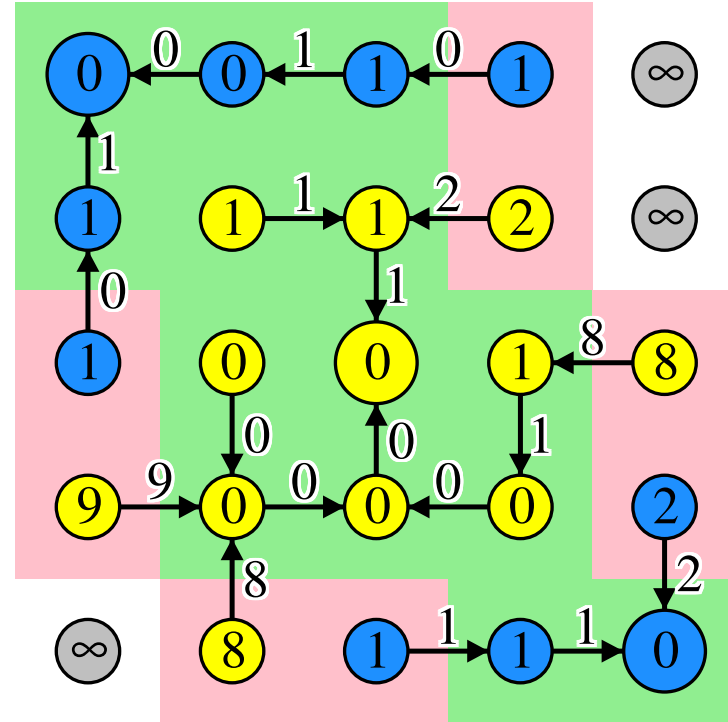
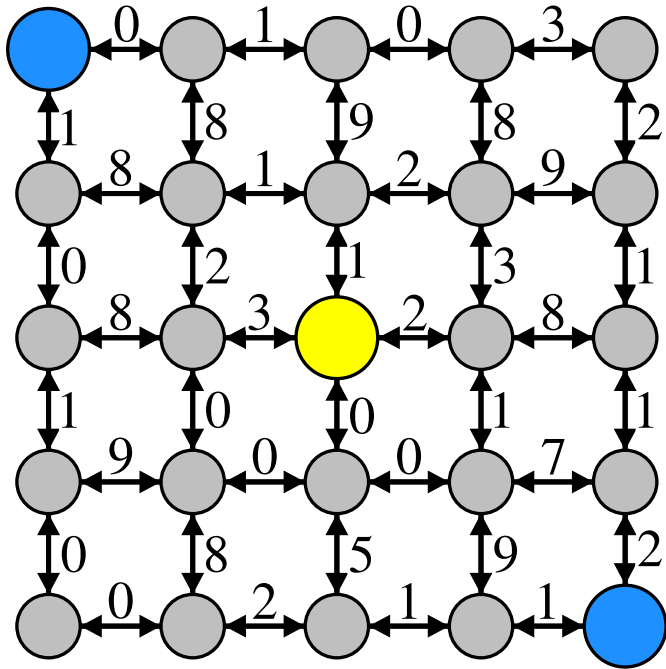
# Propagação dos caminhos



após 13 iterações.

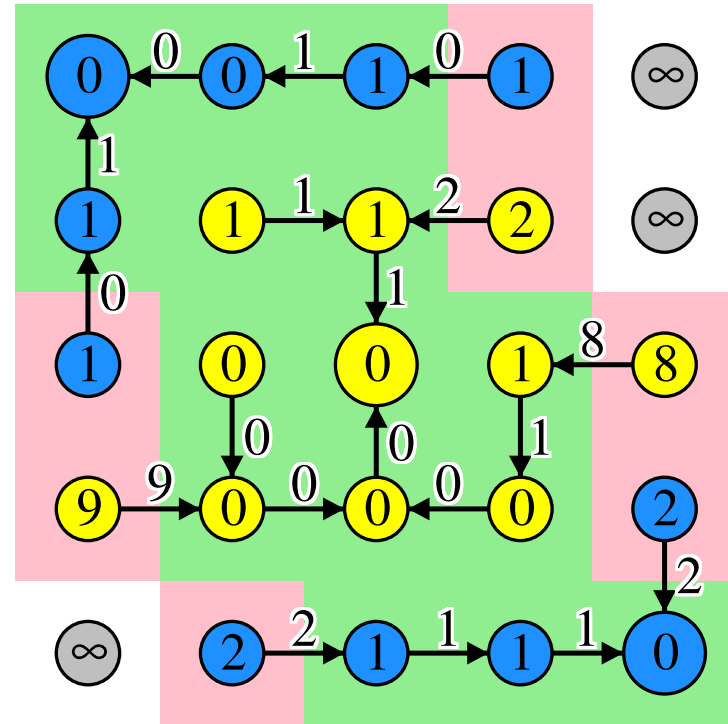
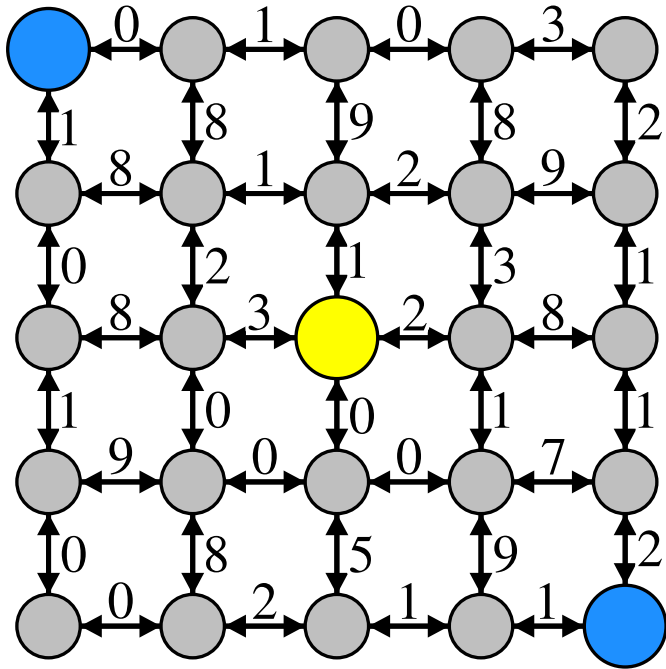


# Propagação dos caminhos



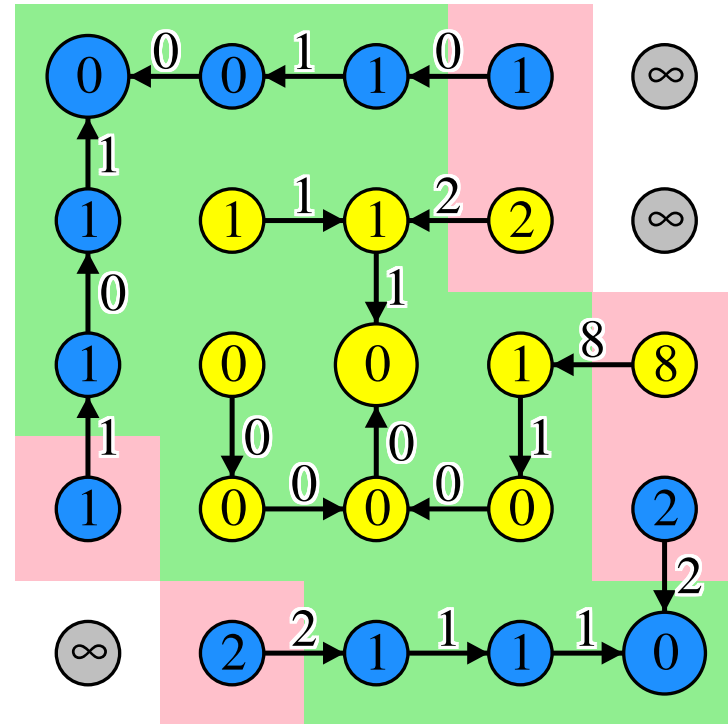
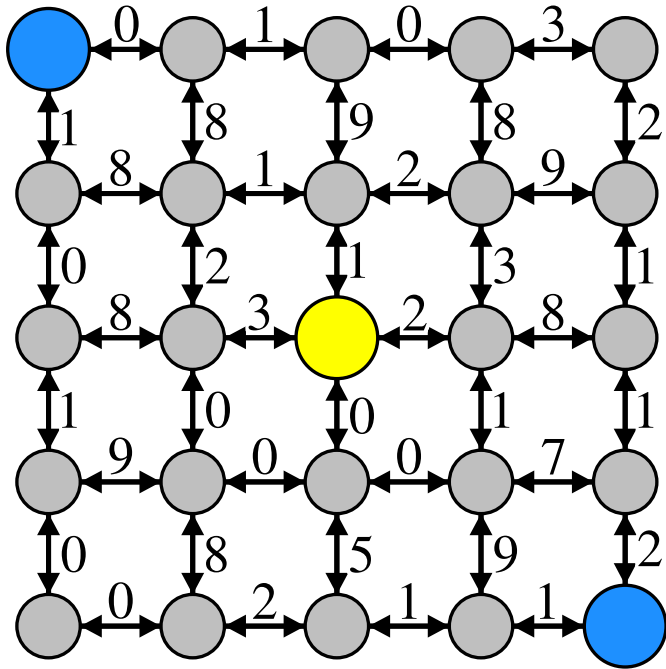
após 14 iterações.

# Propagação dos caminhos



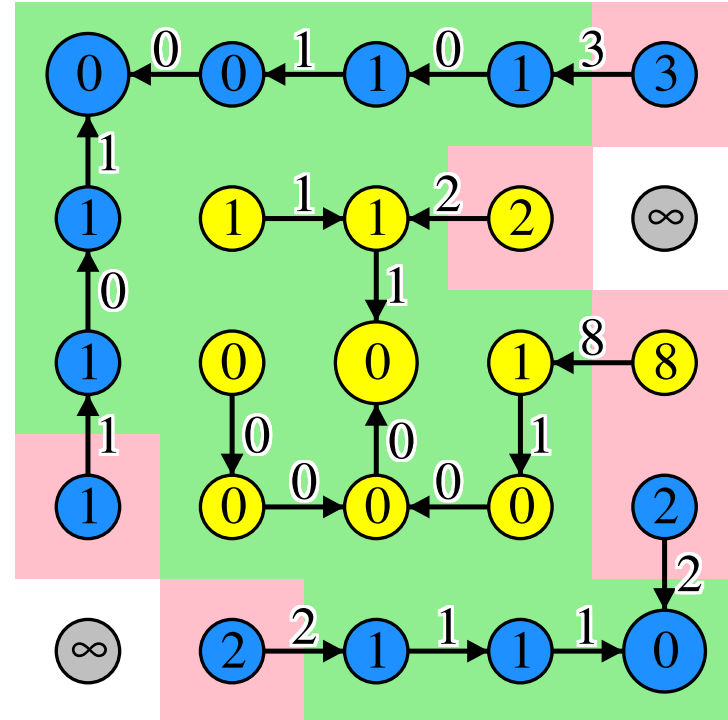
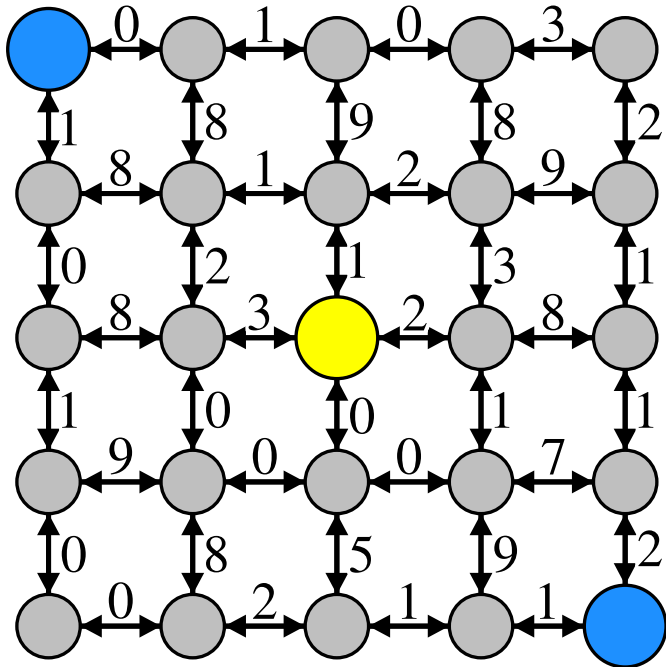
após 15 iterações.

# Propagação dos caminhos



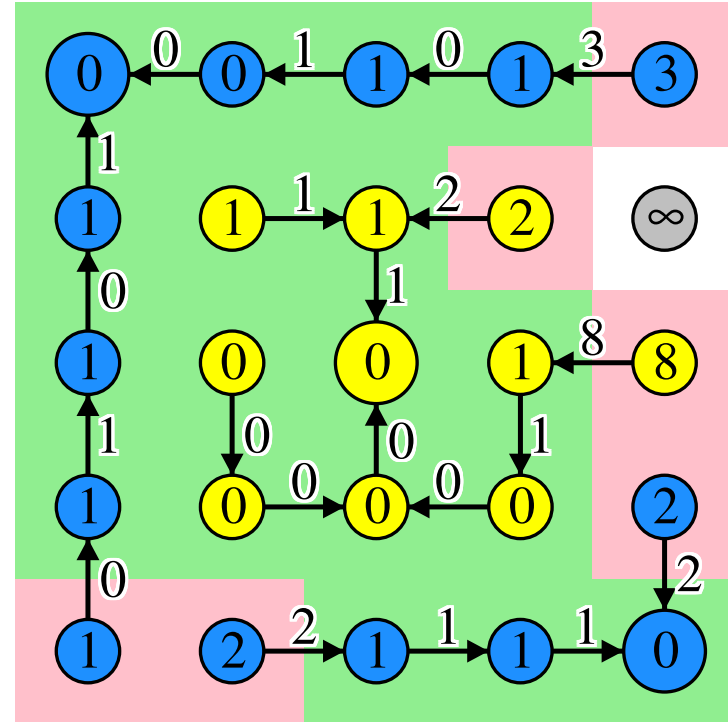
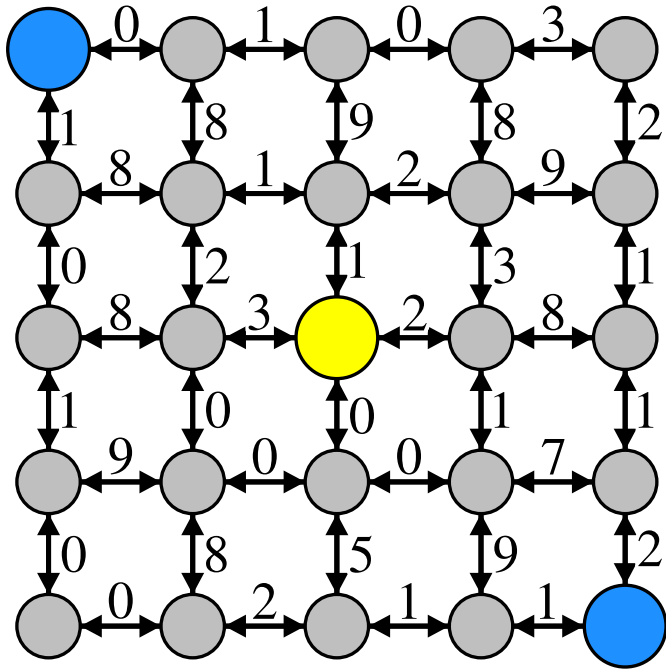
após 16 iterações.

# Propagação dos caminhos



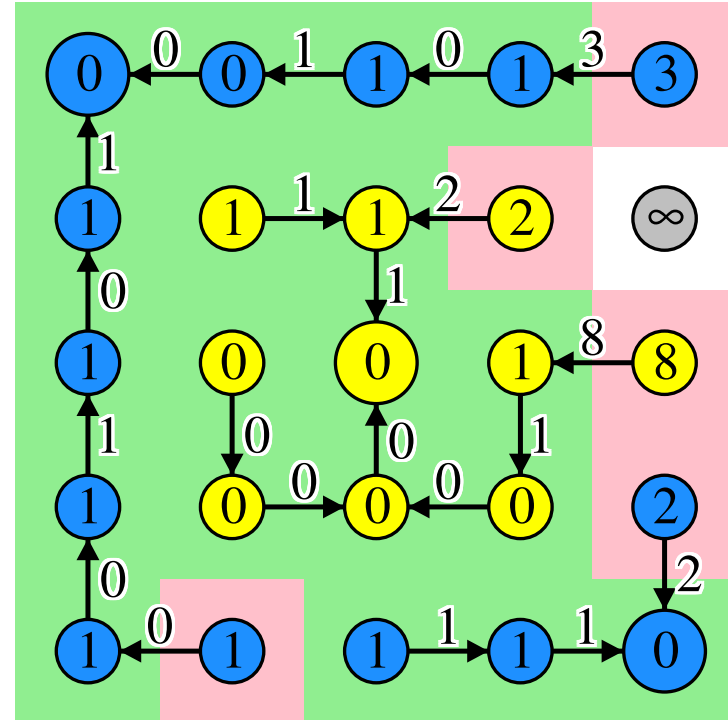
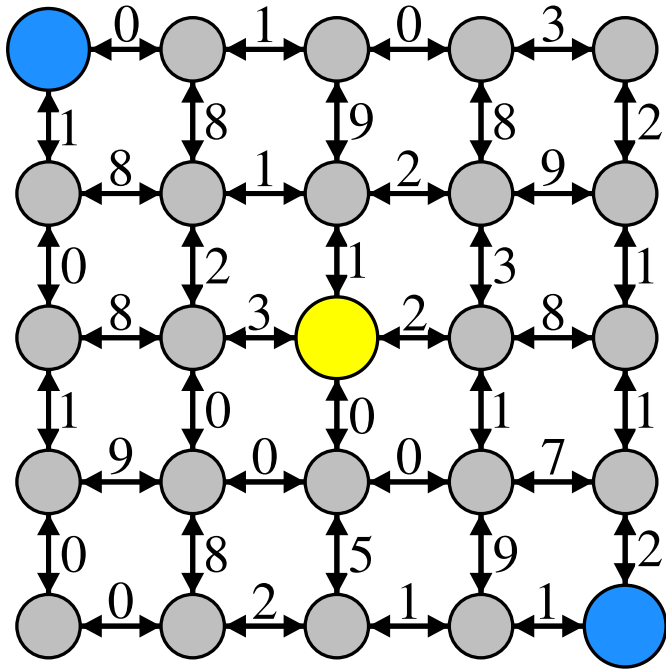
após 17 iterações.

# Propagação dos caminhos



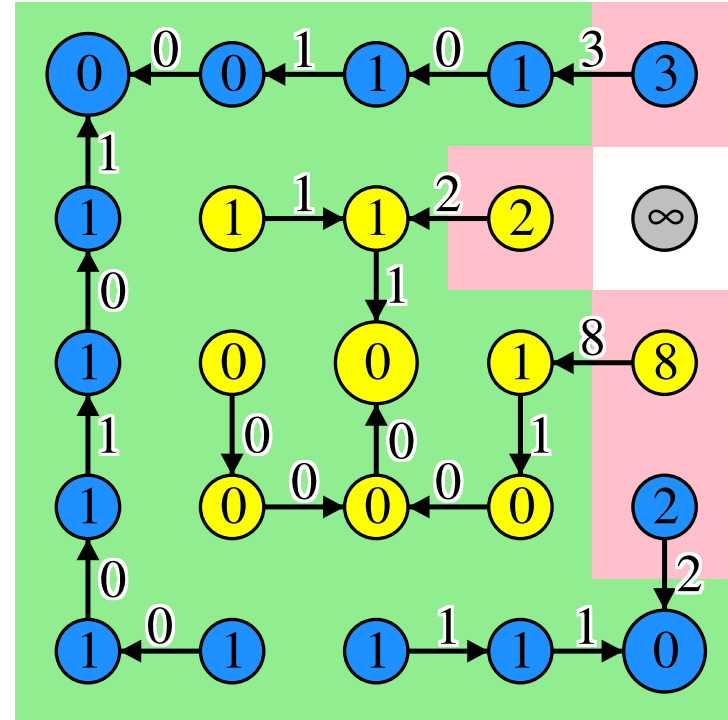
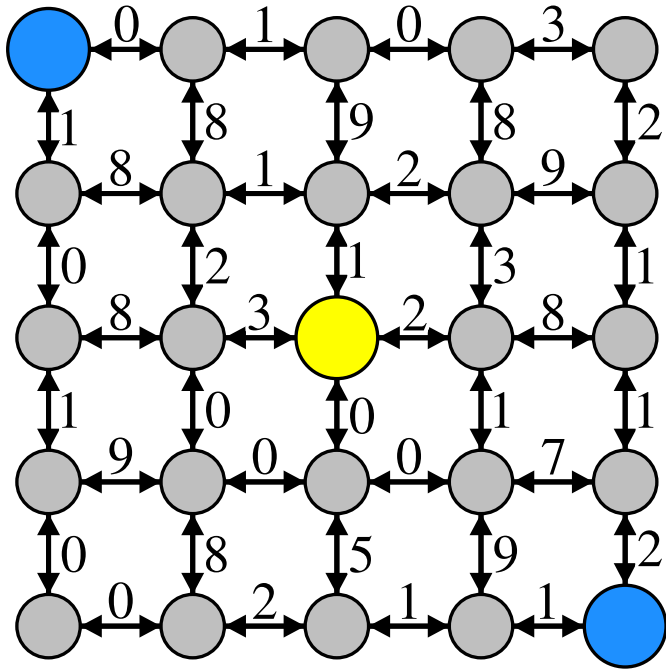
após 18 iterações.

# Propagação dos caminhos



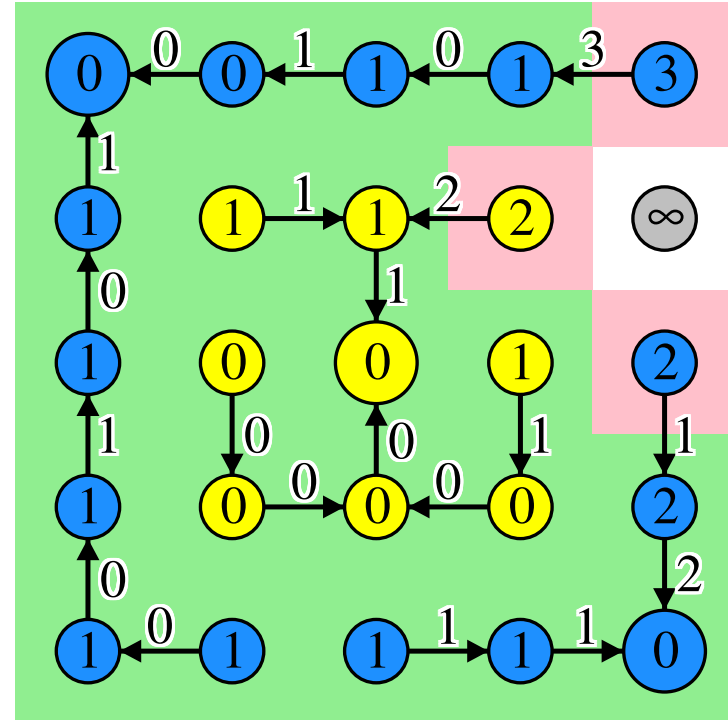
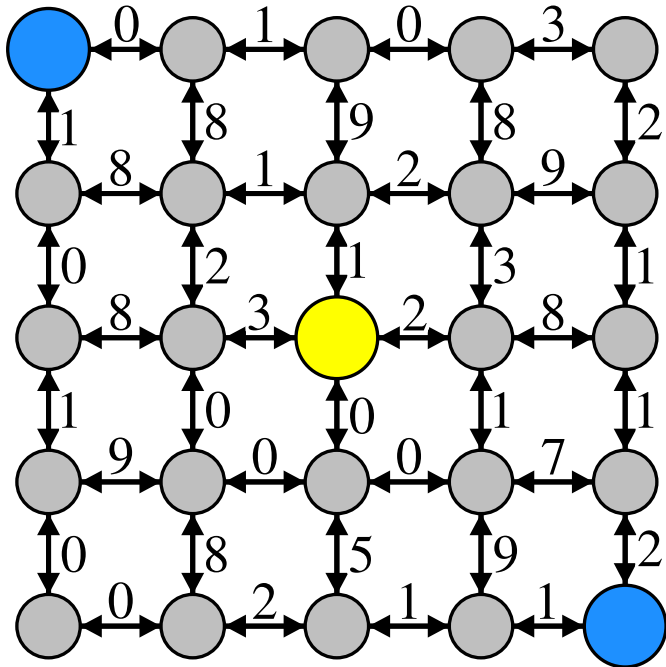
após 19 iterações.

# Propagação dos caminhos



após 20 iterações.

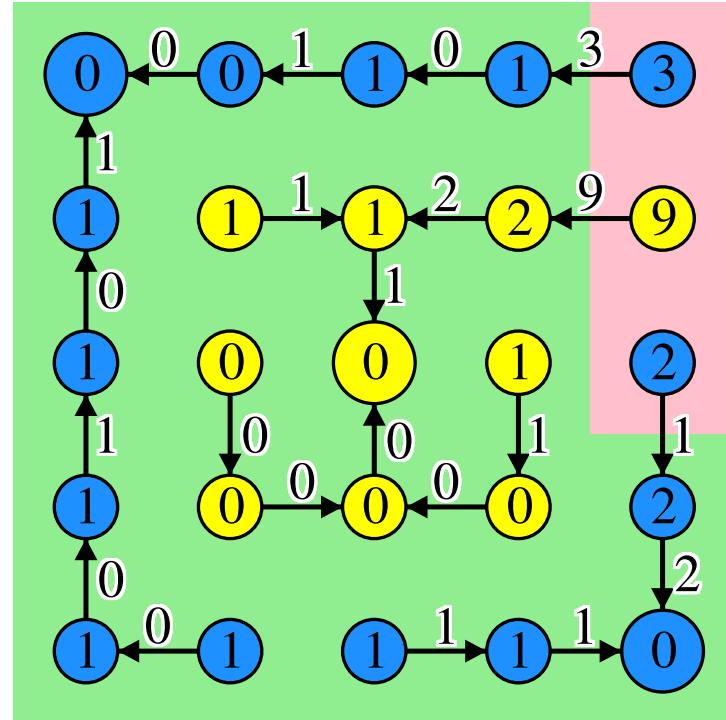
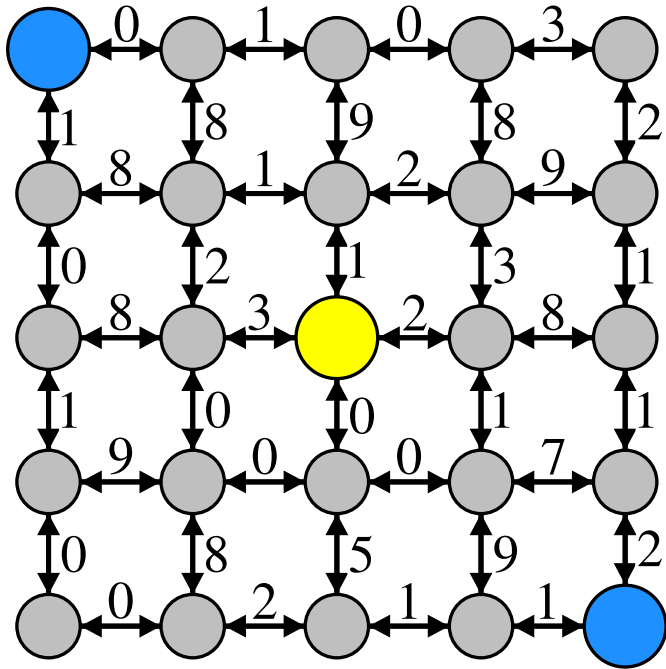
# Propagação dos caminhos



após 21 iterações.

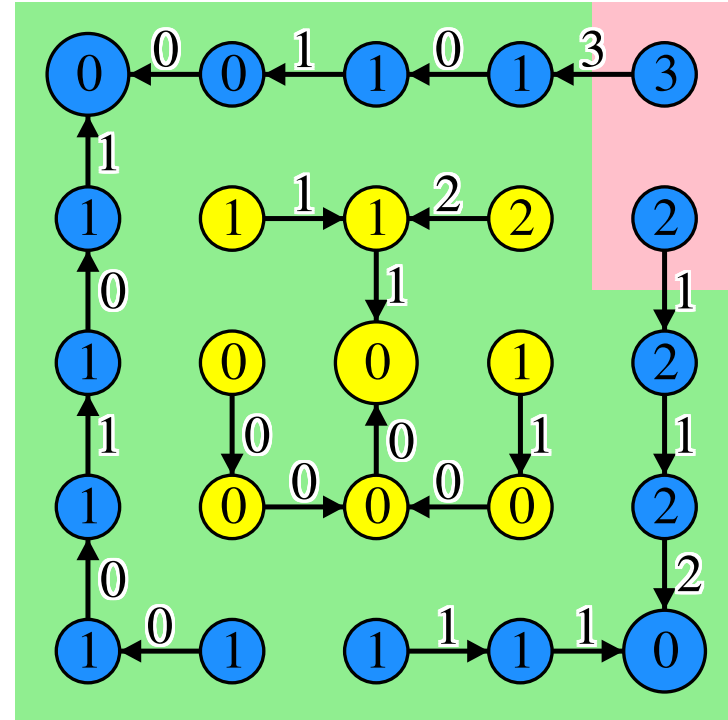
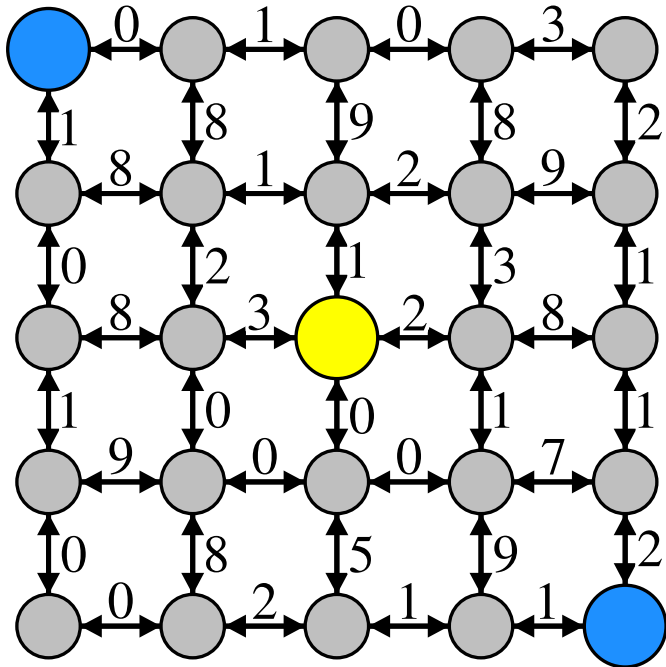


# Propagação dos caminhos



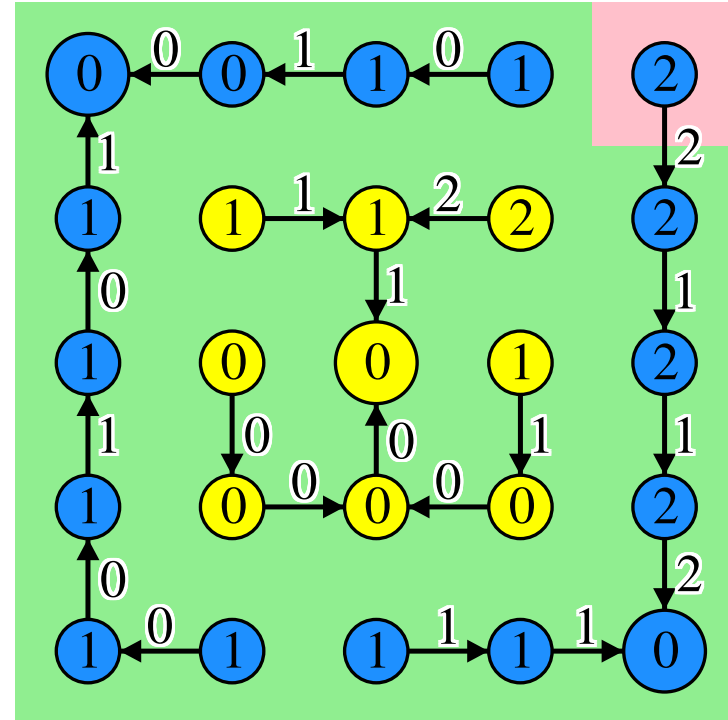
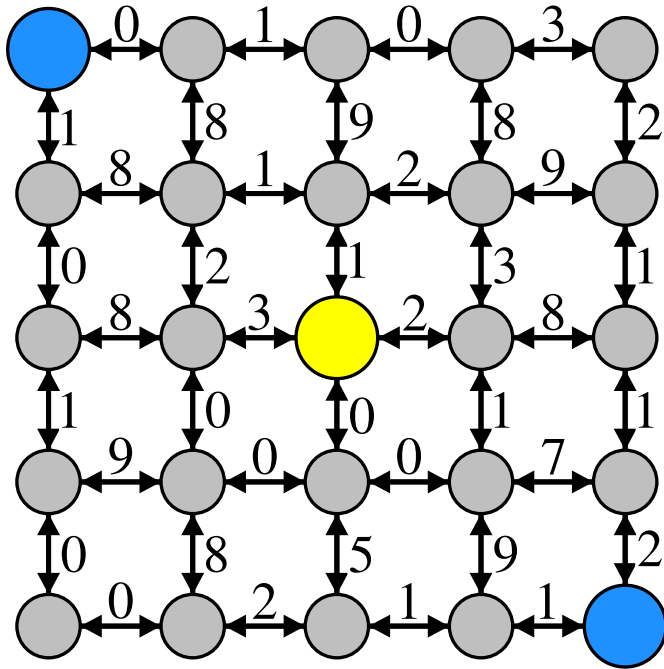
após 22 iterações.

# Propagação dos caminhos



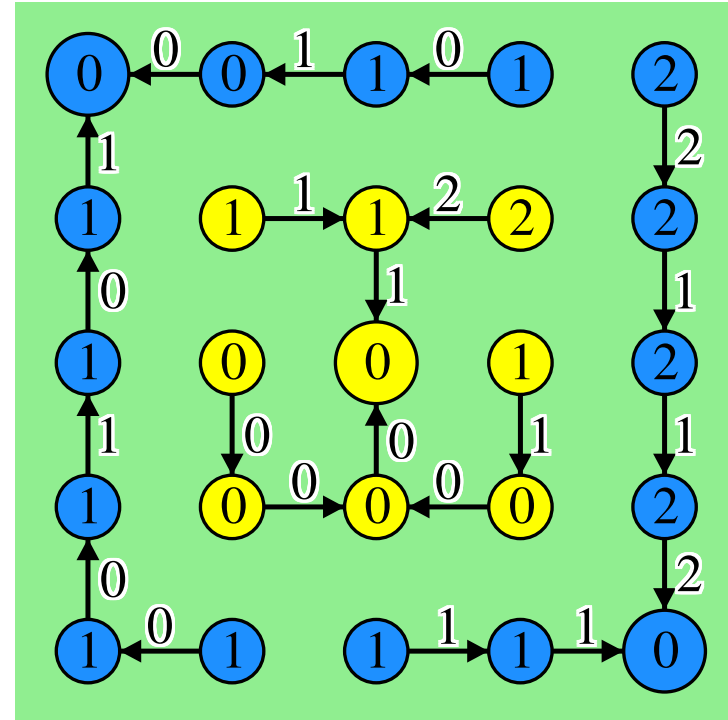
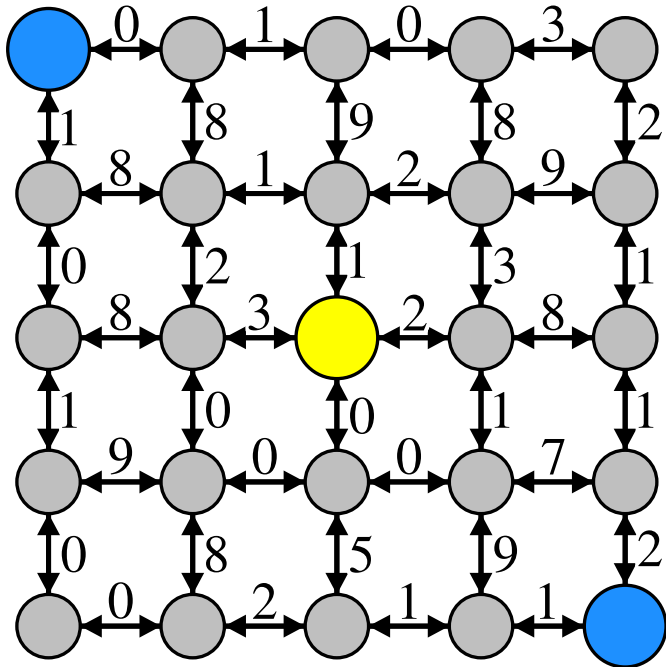
após 23 iterações.

# Propagação dos caminhos



após 24 iterações.

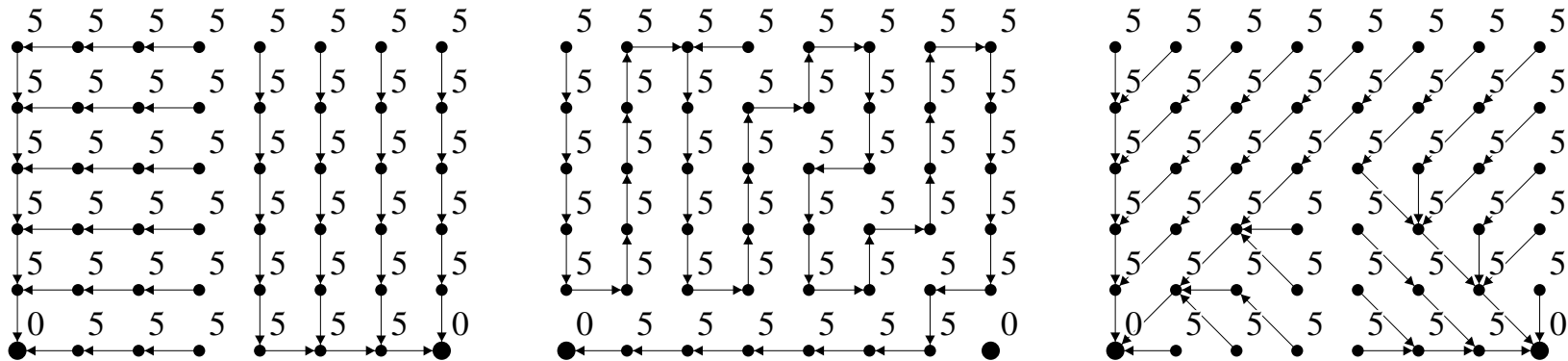
# Propagação dos caminhos



após 25 iterações.

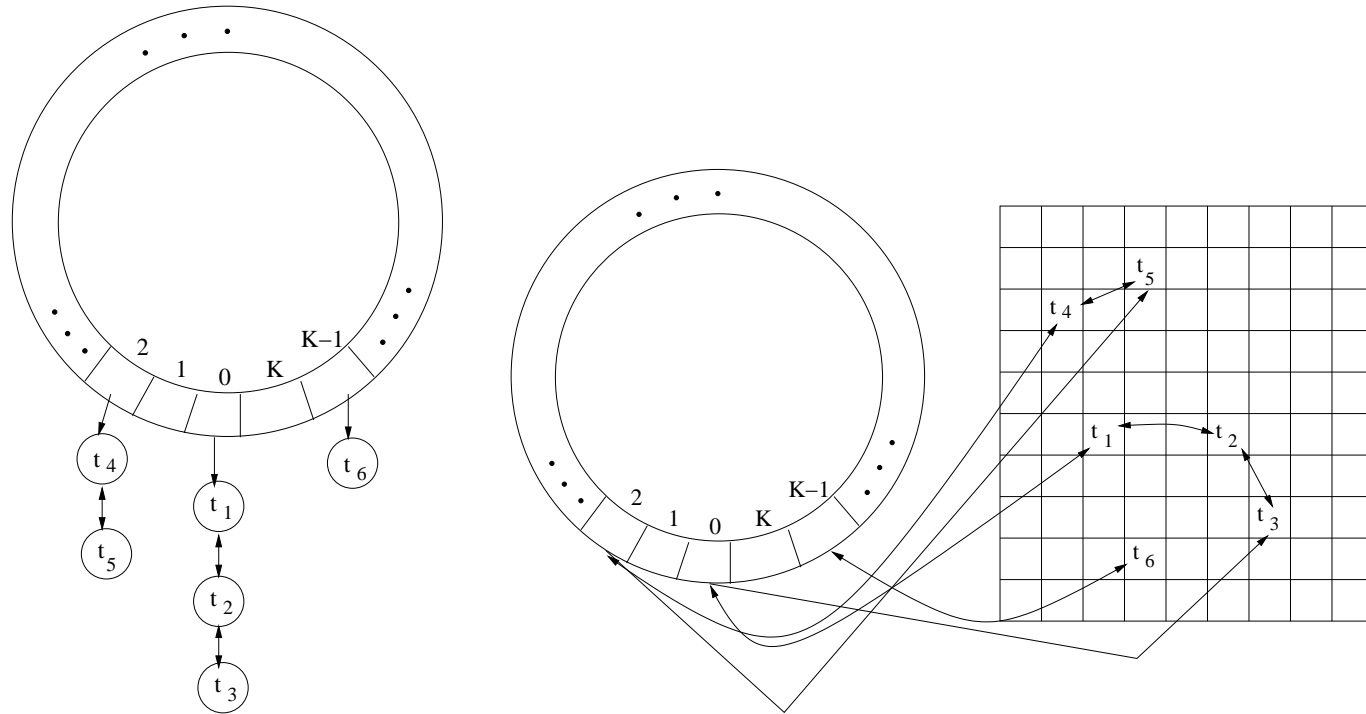
# Resolvendo empates

O que fazer quando um pixel é alcançado por dois ou mais caminhos de mesmo custo?



Exemplos de *tie-breaking*. (a) Política FIFO. (b) Política LIFO. (c) Política FIFO com adjacência vizinhos-8.

# Estrutura da fila de prioridade



(a) Estrutura de Dial para a fila Q. (b) Estrutura proposta em [15].

# References

- [1] F. Cappabianco, G. Araújo, and A.X. Falcão, “The image foresting transform architecture,” in *IEEE Intl. Conf. on Field Programmable Technology (ICFPT)*, Kokurakita, Kitakyushu, Japan, Dec 2007, pp. 137–144.
- [2] A.X. Falcão, B. S. da Cunha, and R. A. Lotufo, “Design of connected operators using the image foresting transform,” in *SPIE on Medical Imaging*, Feb 2001, vol. 4322, pp. 468–479.
- [3] R.A. Lotufo, A.X. Falcão, and F. Zampirolli, “IFT-Watershed from gray-scale marker,” in *XV Brazilian Symp. on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)*. Oct 2002, pp. 146–152, IEEE.
- [4] R. Audigier and R.A. Lotufo, “Seed-relative segmentation robustness of watershed and fuzzy connectedness approaches,” in *XX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)*, Belo Horizonte, MG, Oct 2007, pp. 61–68, IEEE.
- [5] R. Audigier and R.A. Lotufo, “Watershed by image foresting transform, tie-zone, and theoretical relationship with other watershed definitions,” in *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing (ISMM)*, Rio de Janeiro, RJ, Oct 2007, pp. 277–288, MCT/INPE.
- [6] R.S. Torres, A.X. Falcão, and L.F. Costa, “A graph-based approach for multiscale shape analysis,” *Pattern Recognition*, vol. 37, no. 6, pp. 1163–1174, 2004.

- [7] F.P.G. Bergo, A.X. Falcão, P.A.V. Miranda, and L.M. Rocha, “Automatic image segmentation by tree pruning,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 29, no. 2–3, pp. 141–162, Nov 2007.
- [8] A.X. Falcão, P.A.V. Miranda, and A. Rocha, “A linear-time approach for image segmentation using graph-cut measures,” in *8th Intl. Conf. on Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems (ACIVS)*, Antwerp, Belgium, 2006, vol. LNCS 4179, pp. 138–149, Springer.
- [9] A.X. Falcão, P.A.V. Miranda, A. Rocha, and F.P.G. Bergo, “Object detection by  $\kappa$ -connected seed competition,” in *XVIII Brazilian Symp. on Computer Graphics and Image Processing (SIB-GRAPI)*, Natal, RN, Oct 2005, pp. 97–104, IEEE.
- [10] L.M. Rocha, A.X. Falcão, and L.G.P. Meloni, “A robust extension of the mean shift algorithm using optimum path forest,” in *Proc. of the 12th Intl. Workshop on Combinatorial Image Analysis*, Buffalo, NY, USA, Apr 7th-9th 2008, pp. 29–38, RPS.
- [11] J.P. Papa, A.X. Falcão, C.T.N. Suzuki, and N.D.A. Mascarenhas, “A discrete approach for supervised pattern recognition,” in *Proc. of the 12th Intl. Workshop on Combinatorial Image Analysis*, Buffalo, NY, USA, Apr 7th-9th 2008, vol. LNCS 4958, pp. 136–147, Springer.
- [12] A. X. Falcão and F. P. G. Bergo, “Interactive volume segmentation with differential image foresting transforms,” *IEEE Trans. on Medical Imaging*, vol. 23, no. 9, pp. 1100–1108, 2004.



- [13] F.P.G. Bergo and A.X. Falcão, “A partitioned algorithm for the image foresting transform,” in *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing (ISMM)*, Rio de Janeiro, RJ, Oct 2007, pp. 425–436, MCT/INPE.
- [14] I. Ragnemalm, “Fast erosion and dilation by contour processing and thresholding of distance maps,” *Pattern Recognition Letters*, vol. 13, pp. 161–166, Mar 1992.
- [15] A.X. Falcão, J.K. Udupa, and F.K. Miyazawa, “An ultra-fast user-steered image segmentation paradigm: Live-wire-on-the-fly,” *IEEE Trans. on Medical Imaging*, vol. 19, no. 1, pp. 55–62, Jan 2000.
- [16] L.G. Nyúl, A.X. Falcão, and J.K. Udupa, “Fuzzy-connected 3D image segmentation at interactive speeds,” *Graphical Models*, vol. 64, no. 5, pp. 259–281, 2003.
- [17] R. Audigier, R.A. Lotufo, and A.X. Falcão, “3D visualization to assist iterative object definition from medical images,” *Computerized Medical Imaging and Graphics*, vol. 30, no. 4, pp. 217–230, Jun 2006.
- [18] A.X. Falcão, L.F. Costa, and B.S. da Cunha, “Multiscale skeletons by image foresting transform and its applications to neuro-morphometry,” *Pattern Recognition*, vol. 35, no. 7, pp. 1571–1582, Apr 2002.
- [19] R.S. Torres and A.X. Falcão, “Contour salience descriptors for effective image retrieval and analysis,” *Image and Vision Computing*, vol. 25, no. 1, pp. 3–13, Jan 2007.

- [20] F.A. Andaló, P.A.V. Miranda, R.S. Torres, and A.X. Falcão, “Detecting contour saliences using tensor scale,” in *14th IEEE Intl. Conf. on Image Processing*, San Antonio, Texas, Sep 2007, vol. VI, pp. 349–352.
- [21] F.A. Andaló, P.A.V. Miranda, R.S. Torres, and A.X. Falcão, “A new shape descriptor based on tensor scale,” in *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing (ISMM)*, Rio de Janeiro, RJ, Oct 2007, pp. 141–152, MCT/INPE.
- [22] R.A. Lotufo and A.X. Falcão, “The ordered queue and the optimality of the watershed approaches,” in *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing (ISMM)*, vol. 18, pp. 341–350. Kluwer, Jun 2000.
- [23] P.A.V. Miranda, A.X. Falcão, and J.K. Udupa, “CLOUDS: A model for synergistic image segmentation,” in *The Fifth IEEE Intl. Symp. on Biomedical Imaging (ISBI)*, Paris, France, May 14th–17th 2008, accepted.
- [24] F. Cappabianco, A.X. Falcão, and L.M. Rocha, “Clustering by optimum path forest and its application to automatic GM/WM classification in MR-T1 images of the brain,” in *The Fifth IEEE Intl. Symp. on Biomedical Imaging (ISBI)*, Paris, France, May 14th–17th 2008, accepted.
- [25] A.X. Falcão and J.K. Udupa, “A 3D generalization of user-steered live wire segmentation,” *Medical Imaging Analysis*, vol. 4, no. 4, pp. 389–402, Dec 2000.
- [26] P. A. V. Miranda, F. P. G. Bergo, L. M. Rocha, and A. X. Falcão, “Tree-pruning: A new algorithm and its comparative analysis with

- the watershed transform for automatic image segmentation,” in *XIX Brazilian Symp. on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)*. Oct 2006, pp. 37–44, IEEE.
- [27] A. X. Falcão, F. P. G. Bergo, and P. A. V. Miranda, “Image segmentation by tree pruning,” in *XVII Brazilian Symp. on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)*. Oct 2004, pp. 65–71, IEEE.
- [28] L.M. Rocha, A.X. Falcão, and L. Meloni, “Data clustering based on optimum-path forest and probability density function,” Tech. Rep. IC-07-031, State University of Campinas, Institute of Computing, 2007.
- [29] J.A. Montoya-Zegarra, J.P. Papa, N.J. Leite, R.S. Torres, and A.X. Falcão, “Learning how to extract rotation-invariant and scale-invariant features from texture images,” *EURASIP Journal on Advances in Signal*, 2008, to appear.