Capítulo 3

Morfologia Matemática

A MM, iniciada por J. Serra e G. Matheron nos anos sessenta, na "École Nationale Superiéure de Mines de Paris", em Fontainebleau, tornou-se uma disciplina muito importante em Visão Computacional. Seu domínio de atuação cobre um largo espectro de aplicações em que vai desde o tratamento de imagens microscópicas até o processamento de imagens de satélites, passando por aplicações industriais, médicas, automação de escritório, etc. [41, 42]. Um exemplo de aplicação da MM para classificação de texturas de revestimento de paredes pode ser visto no Apêndice A.

O objetivo deste capítulo é descrever alguns aspectos do estado da arte em MM. Na Seção 3.1, recordaremos alguns conceitos e propriedades de teoria dos reticulados. Como os mapeamentos estudados nesta tese estão definidos de $\mathcal{P}(E)$ em $\mathcal{P}(E)$, apresentamos na Seção 3.2 o reticulado de subconjuntos $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ e algumas de suas propriedades. Na Seção 3.3 definiremos os operadores estudados nesta tese. Além disso, apresentamos algumas definições e propriedades desses operadores. Na Seção 3.4 apresentamos quatro reticulados completos Booleanos estudados nesta tese. Veremos que estes reticulados são isomorfos dois a dois. Na Seção 3.5, abordaremos o estado da arte em MM no que se refere à decomposição de mapeamentos entre reticulados completos e, na Seção 3.6, no que se refere à decomposição de algumas classes de operadores especiais (crescentes e invariantes por translação, etc...). Finalmente, na Seção 3.7, apresentamos o estado da arte no que se refere à transformação de estruturas de representação dos W-operadores.

Para o leitor interessado somente nos resultados de decomposição de elementos estruturantes, é suficiente ler somente as Seções 3.2 e 3.7 (Subseção 3.7.1).

3.1 Teoria dos Reticulados

Nesta seção, recordaremos alguns conceitos e propriedades de teoria dos reticulados [14, 24] que serão utilizados ao longo desta tese.

3.1.1 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Uma relação binária $\leq$ sobre um conjunto não vazio A é uma *relação de ordem* se, e somente se, ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplo 3.1 *Dado um conjunto E, a relação de inclusão $\subseteq$ no conjunto $\mathcal{P}(E)$ é uma relação de ordem.*

Um conjunto A munido com uma relação de ordem $\leq$ é um *conjunto parcialmente ordenado* ou, resumidamente, um *poset* (do inglês, "partial ordered set") e ele é denotado por $(A, \leq)$, ou simplesmente por A quando a relação de ordem está claramente definida pelo contexto.

Exemplo 3.2 *Se E é um conjunto tal que $|E| > 1$, então $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.*

3.1.2 Elementos Notáveis de um Conjunto Parcialmente Ordenado

3.1.2.1 Limitantes Superiores e Inferiores

Seja $(A, \leq)$ um poset. Sejam $\ell, u \in A$ e $X \subseteq A$. Dizemos que u é um *limitante superior* de X, se para todo $x \in X$ temos que $x \leq u$. Dizemos que ℓ é um *limitante inferior* de X se para todo $x \in X$, temos que $\ell \leq x$. Se X tem ambos um limitante superior e um limitante inferior, então X é chamado um *subconjunto limitado* de A.

3.1.2.2 Maior e Menor Elementos

Sejam $(A, \leq)$ um poset e $X \subseteq A$. Um elemento $a \in X$ é chamado *menor elemento* de X se $a \leq x$ para todo $x \in X$. Um elemento $b \in X$ é chamado *maior elemento* de X se $x \leq b$ para todo $x \in X$.

Exemplo 3.3 *O menor e o maior elemento do poset $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ são, respectivamente, $\emptyset$ e E, uma vez que, para todo elemento $X \in \mathcal{P}(E)$, verifica-se que $\emptyset \subseteq X \subseteq E$.*

3.1.2.3 Supremo e Ínfimo

Sejam A um poset e $X \subseteq A$. Se X tem um limitante superior $u \in A$, o menor elemento do conjunto de limitantes superiores de X, se existe, é chamado de *supremo* de X em A e é denotado por $\vee X$. Similarmente, se X tem um limitante inferior $\ell \in A$, o maior elemento do conjunto dos limitantes inferiores de X, se existe, é chamado de *ínfimo* de X em A e é denotado por $\wedge X$.

Exemplo 3.4 *O ínfimo e o supremo de um subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(E)$ são, respectivamente, $\cap\{X : X \in \mathcal{X}\}$ e $\cup\{X : X \in \mathcal{X}\}$.*

Note que o supremo e o ínfimo de X podem ou não pertencer a X. Se supremo pertence a X, então ele é o maior elemento de X. Similarmente, se o ínfimo pertence a X, então ele é o menor elemento de X.

3.1.3 Reticulados

Um conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ é um *reticulado* se, e somente se, qualquer conjunto de dois elementos $\{x, y\} \subseteq L$ possui um ínfimo e um supremo, denotados, respectivamente, por $x \wedge y$ e $x \vee y$.

Um *sub-reticulado* de um reticulado L é um conjunto $A \subseteq L$ tal que, para todo $a, b \in A$, $a \wedge b \in A$ e $a \vee b \in A$.

Um reticulado L é um *reticulado completo* se, e somente se, qualquer subconjunto de L possui um ínfimo e um supremo em L. Qualquer reticulado finito é um reticulado completo.

Exemplo 3.5 *O poset $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um reticulado completo, pois qualquer subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tem um ínfimo e um supremo dados, respectivamente, por $\wedge\mathcal{X} = \cap\{X : X \in \mathcal{X}\}$ e $\vee\mathcal{X} = \cup\{X : X \in \mathcal{X}\}$.*

Um reticulado L é um *reticulado distributivo* se, e somente se, para todo $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Dado um reticulado L com o menor e maior elementos $\mathcal{O}$ e $\mathcal{I}$, respectivamente. Se $x, y \in L$ são tais que $x \wedge y = \mathcal{O}$ e $x \vee y = \mathcal{I}$, então y é chamado *complemento* de x e denotamos $y = x^c$. O reticulado L é chamado de um *reticulado complementado* se, e somente se, qualquer elemento de L tem um complemento.

Um reticulado L é um *reticulado Booleano* se, e somente se, ele é distributivo e complementado.

Exemplo 3.6 *O poset $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um reticulado Booleano, pois ele é distributivo (isto é, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$) e complementado (isto é, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, $X \cap X^c = \emptyset$ e $X \cup X^c = E$).*

Teorema 3.7 (Lei de De Morgan) *Seja L um reticulado Booleano. Se $a, b \in L$, então $(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$ e $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$.*

3.1.3.1 Princípio da Dualidade

Seja $(L, \leq)$ um poset. Seja $\geq$ a relação inversa de $\leq$ sobre L (isto é, $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$). Diremos que $(L, \geq)$, ou simplesmente $\tilde{L}$, é o *poset dual* de $(L, \leq)$.

Princípio da Dualidade [24, p. 19]: Se $(L, \leq)$ é um poset, então para toda definição, propriedade, afirmação, etc., referindo-se ao poset $(L, \leq)$ existe uma correspondente dual referindo-se ao poset $(L, \geq)$.

Por exemplo, se para um reticulado $(L, \leq)$ vale a propriedade: $a, b \in L \Rightarrow a \wedge b \leq a \vee b$, então pelo princípio da dualidade, temos a seguinte propriedade dual válida para o reticulado dual de L: $a, b \in \tilde{L} \Rightarrow a \vee b \geq a \wedge b$.

3.1.3.2 Isomorfismo de Reticulados

Sejam $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ dois reticulados. Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Dizemos que f é um *isomorfismo de reticulado* de A em B se, e somente se, para todo $x, y \in A$, temos que $x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y)$. Dizemos que f é um *dual-isomorfismo* se, e somente se, para todo $x, y \in A$, temos que $x \leq_A y \Leftrightarrow f(y) \leq_B f(x)$.

Dois reticulados A e B são ditos *isomorfos* (respectivamente, *dual-isomorfos*) se, e somente se, existe um isomorfismo (respectivamente, dual-isomorfismo) entre eles.

3.2 Reticulado de Conjuntos $P(E)$

Seja E um conjunto não vazio. Vimos nos Exemplos 3.5 e 3.6 que o poset $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um reticulado completo Booleano. Nesta seção veremos algumas definições e propriedades deste reticulado.

Seja E um conjunto não vazio que é um grupo Abeliano com respeito à operação binária denotada por $+$. O elemento neutro (que é também chamado de *origem*) de $(E, +)$ é denotado por o.

O *transposto de um conjunto* $X \in \mathcal{P}(E)$ (em relação à origem) é o subconjunto $X^t \in \mathcal{P}(E)$ dado por $X^t = \{x \in E : -x \in X\}$.

Para todo $X \in \mathcal{P}(E)$ e $h \in E$, X_h denota a translação de X por h, isto é,

$$X_h = \{x \in E : x - h \in X\}.$$

Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. A *adição* e *subtração de Minkowski* de X e Y são, respectivamente, os conjuntos $X \oplus Y \in \mathcal{P}(E)$ e $X \ominus Y \in \mathcal{P}(E)$ dados por $X \oplus Y = \cup\{X_y : y \in Y\}$ e $X \ominus Y = \cap\{X_{-y} : y \in Y\}$.

Na proposição [24, p. 82] que se segue, apresentamos algumas propriedades da adição de Minkowski.

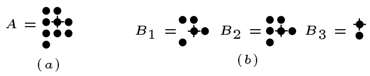

Figura 3.1: (a) Um conjunto $A \in \mathcal{P}(E)$. (b) Alguns invariantes de A.

Proposição 3.8 *Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$ e $h \in E$. Então,*

(a) $X \oplus Y = \{x + y \in E : x \in X, y \in Y\}$ [24, p. 81, Eq. 4.20],
(b) $X \oplus \{h\} = X_h$ *(efeito de translação),*
(c) $X_h \oplus Y = X \oplus Y_h = (X \oplus Y)_h$,
(d) $Y \subseteq Z \Rightarrow X \oplus Y \subseteq X \oplus Z$,
(e) $X \oplus (Y \cup Z) = (X \oplus Y) \cup (X \oplus Z)$,
(f) $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$ *(associatividade),*
(g) $X \subseteq Y \Rightarrow X \oplus Z \subseteq Y \oplus Z$,
(h) $X \oplus Y = Y \oplus X$ *(comutatividade).*

Na próxima proposição [24, p. 82], apresentamos algumas propriedades da subtração de Minkowski.

Proposição 3.9 *Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$ e $h \in E$. Então,*

(a) $X \ominus Y = \{h \in E : Y_h \subseteq X\}$ [24, p. 81, Eq. 4.22],
(b) $X \ominus \{h\} = X_{-h}$ *(efeito de translação),*
(c) $X_h \ominus Y = X \ominus Y_{-h} = (X \ominus Y)_h$,
(d) $Y \subseteq Z \Rightarrow X \ominus Y \supseteq X \ominus Z$,
(e) $X \ominus (Y \cup Z) = (X \ominus Y) \cap (X \ominus Z)$,
(f) $(X \ominus Y) \ominus Z = Y \ominus (X \oplus Z)$,
(g) $X \subseteq Y \Rightarrow X \ominus Z \subseteq Y \ominus Z$.

Como uma conseqüência da Proposição 3.8.c, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.10 *Se $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, então, para todo $h \in E$, $X \oplus Y = X_{-h} \oplus Y_h$.*

Prova: Seja $Z = X \oplus Y$. Assim,

$$\begin{array}{rcll} X \oplus Y = Z & \Leftrightarrow & (X \oplus Y)_h = Z_h & \\ & \Leftrightarrow & X \oplus Y_h = Z_h & \text{(pela Proposição 3.8.}c\text{)} \\ & \Leftrightarrow & (X \oplus Y_h)_{-h} = Z & \\ & \Leftrightarrow & X_{-h} \oplus Y_h = Z & \text{(pela Proposição 3.8.}c\text{).} \end{array}$$

■

A adição e subtração de Minkowski satisfazem a seguinte propriedade [24, p. 84], conhecida como *relação de adjunção.*

Proposição 3.11 *Se $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$, então $X \oplus Y \subseteq Z \Leftrightarrow X \subseteq Z \ominus Y$.*

3.2.1 Invariante de um Conjunto

Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Dizemos que Y é um *conjunto invariante*, ou simplesmente, um *invariante* de X se, e somente se, $X = (X \ominus Y) \oplus Y$. Por exemplo, os conjuntos B_1, B_2, B_3, apresentados na Figura 3.1.b, são invariantes do conjunto A apresentado na Figura 3.1.a.

Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Dizemos que Y é um *aberto* de X se, e somente se, Y é um invariante de X.

Os resultados seguintes (Proposições 3.12 e 3.13) fornecem algumas propriedades de uma subtração de Minkowski seguida de uma adição de Minkowski pelo mesmo elemento estruturante. A Proposição 3.12 [24, p. 89, Eq. 4.56] é uma conseqüência imediata da Proposição 3.9.a e da definição de adição de Minkowski. A Proposição 3.13 é uma conseqüência direta da Proposição 3.11, substituindo X por $Z \ominus Y$.

Proposição 3.12 *Se $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, então $(X \ominus Y) \oplus Y = \cup\{Y_h : h \in E \text{ e } Y_h \subseteq X\}$.*

Proposição 3.13 *Se $Z, Y \in \mathcal{P}(E)$, então $(Z \ominus Y) \oplus Y \subseteq Z$.*

As Proposições 3.14 e 3.15 mostram algumas propriedades de invariantes de um dado conjunto em $\mathcal{P}(E)$. A primeira foi mostrada por Serra [41, p. 53] e a segunda por Zhuang e Haralick [51, Prop. 5].

Proposição 3.14 *Sejam $A, X \in \mathcal{P}(E)$. Então, X é um invariante de A se, e somente se, existe $Y \in \mathcal{P}(E)$ tal que $A = Y \oplus X$.*

Proposição 3.15 *Sejam $A, X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Se $A = X \oplus Y$, então X e Y são ambos invariantes de A.*

Os dois próximos resultados (Proposições 3.16 e 3.17) relacionam invariança com translação. A Proposição 3.16 é uma conseqüência imediata das Proposições 3.10, 3.14 e 3.15; enquanto que a Proposição 3.17 é uma conseqüência da Proposição 3.8.c.

Proposição 3.16 *Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Se Y é um invariante de X, então, para todo $h \in E$, Y_h é também um invariante de X.*

Proposição 3.17 *Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ e $h \in E$. Então, Y é invariante de X se, e somente se, Y é invariante de X_h.*

Prova:

($\Rightarrow$)

$$
\begin{aligned}
X_h &= ((X \ominus Y) \oplus Y)_h && \text{(uma vez que } Y \text{ é invariante de } X\text{)}\\
&= (X \ominus Y)_h \oplus Y && \text{(pela Proposição 3.8.}c\text{)}\\
&= (X_h \ominus Y) \oplus Y && \text{(pela Proposição 3.8.}c\text{).}
\end{aligned}
$$

Portanto Y é um invariante de X_h.

($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
X &= (X_h)_{-h}\\
&= ((X_h \ominus Y) \oplus Y)_{-h} && \text{(uma vez que } Y \text{ é invariante de } X_h\text{)}\\
&= ((X \ominus Y)_h \oplus Y)_{-h} && \text{(pela Proposição 3.8.}c\text{)}\\
&= ((X \ominus Y) \oplus Y)_{h-h} && \text{(pela Proposição 3.8.}c\text{).}\\
&= (X \ominus Y) \oplus Y.
\end{aligned}
$$

Portanto Y é um invariante de X. ■

3.3 Reticulado dos Operadores

Um mapeamento de $\mathcal{P}(E)$ em $\mathcal{P}(E)$ é chamado um *operador*. Os operadores serão denotados por letras gregas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ O conjunto de todos operadores será denotado por Ψ (letra grega maiúscula). O conjunto Ψ herda a estrutura de reticulado completo Booleano do conjunto $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ quando definimos a relação de ordem $\leq$ sobre os elementos de Ψ como, para quaisquer $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \psi_1(X) \subseteq \psi_2(X) \quad (X \in \mathcal{P}(E)).$$

O supremo e ínfimo de dois operadores ψ_1 e ψ_2 de Ψ verificam, respectivamente, $(\psi_1 \vee \psi_2)(X) = \psi_1(X) \cup \psi_2(X)$ e $(\psi_1 \wedge \psi_2)(X) = \psi_1(X) \cap \psi_2(X)$, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$.

O operador $\nu \in \Psi$ definido por $\nu(X) = X^c$, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, é chamado *operador de negação*.

O operador $\iota \in \Psi$ definido por $\iota(X) = X$, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, é chamado *operador identidade*. Observe que $\nu\nu = \iota$.

O *operador dual* de um operador ψ, denotado ψ^*, é dado por $\psi^* = \nu\psi\nu$. Observamos que $(\psi^*)^* = \psi$, uma vez que $\nu\nu = \iota$.

Um operator $\psi \in \Psi$ é chamado *crescente* se, e somente se, para todo $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $X \subseteq Y \Rightarrow \psi(X) \subseteq \psi(Y)$.

Um operator $\psi \in \Psi$ é chamado *extensivo* (respectivamente, *anti-extensivo*) se, e somente se, $\psi \leq \iota$ (respectivamente, $\iota \leq \psi$).

Um operator $\psi \in \Psi$ é chamado *idempotente* se, e somente se, $\psi\psi = \psi$.

A proposição seguinte é uma conseqüência imediata da definição de operador dual.

Proposição 3.18 *Seja* $\psi \in \Psi$.

(a) *ψ é crescente se, e somente se, ψ^* é crescente;*
(b) *ψ é idempotente se, e somente se, ψ^* é idempotente;*
(c) *ψ é extensivo se, e somente se, ψ^* é anti-extensivo.*

Prova: Prova de (a): Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(E)$.

$(\Rightarrow)$

$$\begin{array}{rcll} X \subseteq Y & \Leftrightarrow & \nu(Y) \subseteq \nu(X) & \text{(pela Proposição 2.2.}b\text{)} \\ & \Rightarrow & \psi(\nu(Y)) \subseteq \psi(\nu(X)) & \text{(uma vez que } \psi \text{ é crescente)} \\ & \Leftrightarrow & \nu(\psi(\nu(X))) \subseteq \nu(\psi(\nu(Y))) & \text{(pela Proposição 2.2.}b\text{)} \\ & \Leftrightarrow & (\nu\psi\nu)(X) \subseteq (\nu\psi\nu)(Y) & \\ & \Leftrightarrow & \psi^*(X) \subseteq \psi^*(Y). & \end{array}$$

$(\Leftarrow)$

Provamos que se ψ é crescente, então ψ^* também é crescente. Agora, considere que $\varphi = \psi^*$ é crescente. Assim, pela prova anterior, temos que $\varphi^* = (\psi^*)^* = \psi$ é crescente.

Prova de (b):

$$\begin{array}{rcll} \psi\psi = \psi & \Leftrightarrow & \nu\psi\psi\nu = \nu\psi\nu & \\ & \Leftrightarrow & \nu\psi\nu\nu\psi\nu = \nu\psi\nu & \text{(uma vez que } \nu\nu = \iota) \\ & \Leftrightarrow & (\nu\psi\nu)(\nu\psi\nu) = \nu\psi\nu & \\ & \Leftrightarrow & \psi^*\psi^* = \psi^*. & \end{array}$$

Prova de (c):

$$\begin{array}{rcll} \iota \leq \psi & \Leftrightarrow & \iota\nu \leq \psi\nu & \\ & \Leftrightarrow & \nu\psi\nu \leq \nu\iota\nu & \\ & \Leftrightarrow & \psi^* \geq \nu\nu & \\ & \Leftrightarrow & \psi^* \leq \iota & \text{(uma vez que } \nu\nu = \iota). \end{array}$$

■

Um operator $\psi \in \Psi$ é dito ser uma *abertura* (respectivamente, um *fechamento*) se, e somente se, ele é crescente, anti-extensivo e idempotente (respectivamente, crescente, extensivo e idempotente). Note que, pela Proposição 3.18, ψ é uma abertura se, e somente se, ψ^* é um fechamento.

3.4 Outros Reticulados Estudados

Nas Subseções de 3.4.1 a 3.4.5, apresentamos cinco reticulados completos Booleanos estudados nesta tese. Veremos que os quatro reticulados apresentados nas Seções de 3.4.2 a 3.4.4 são isomorfos dois a dois. Dessa forma, um determinado problema definido em um desses reticulados pode ser estudado em qualquer um dos outros e, conseqüentemente, um resultado teórico obtido para um desses reticulados possui um equivalente em cada um dos outros.

3.4.1 Reticulado de Conjuntos $\boldsymbol{P(W)}$

Seja W um subconjunto finito de E. O par $(\mathcal{P}(W), \subseteq)$ é um reticulado completo Booleano [14]. O maior e o menor elementos de $\mathcal{P}(W)$ são, respectivamente, W e $\emptyset$. O ínfimo e o supremo de X e Y em $\mathcal{P}(W)$ são, respectivamente, $X \cap Y$ e $X \cup Y$. O conjunto complemento de $X \in \mathcal{P}(W)$ com respeito a W, denotado X^c_W ou, simplesmente, X^c, quando o conjunto W está claramente definido no contexto, é $X^c_W = \{x \in W : x \notin X\}$.

3.4.2 Reticulado de Coleção de Conjuntos $\boldsymbol{P(P(W))}$

Seja $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ a coleção de todas subcoleções de $\mathcal{P}(W)$. Elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ serão denotados por letras caligráficas maiúsculas da forma $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ O par $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ é um reticulado completo Booleano [12], onde a relação $\subseteq$ é definida por, para quaisquer $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \Leftrightarrow (X \in \mathcal{X} \Rightarrow Y \in \mathcal{Y})$. O maior e o menor elementos de $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ são, respectivamente, $\mathcal{P}(W)$ e $\emptyset$. O supremo e o ínfimo de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ são, respectivamente, $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} = \{X \in \mathcal{P}(W) : X \in \mathcal{X} \text{ ou } X \in \mathcal{Y}\}$ e $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{X \in \mathcal{P}(W) : X \in \mathcal{X} \text{ e } X \in \mathcal{Y}\}$. O complemento de $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ com respeito a $\mathcal{P}(W)$ é $\mathcal{X}^c = \{X \in \mathcal{P}(W) : X \notin \mathcal{X}\}$.

Para todo $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ e $h \in E$, $\mathcal{X}_h \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W_h))$ denota a translação de todos elementos de $\mathcal{X}$ por h, ou seja, $\mathcal{X}_h = \{X_h \in \mathcal{P}(W_h) : X \in \mathcal{X}\}$. Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$. Claramente, se $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, então, para todo $h \in E$, $\mathcal{X}_h \subseteq \mathcal{Y}_h$. Usando este fato, temos a seguinte propriedade facilmente verificável.

Proposição 3.19 *Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Se $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, então*

$$(a)\ \cup\{\mathcal{X}_h : h \in C\} \subseteq \cup\{\mathcal{Y}_h : h \in C\},$$
$$(b)\ \cap\{\mathcal{X}_h : h \in C\} \subseteq \cap\{\mathcal{Y}_h : h \in C\}.$$

3.4.3 Reticulado de Coleção de Intervalos Maximais

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(W)$ tais que $A \subseteq B$. Um *intervalo* contido em $\mathcal{P}(W)$ de extremidades A e B é o elemento $[A, B]$ de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ dado por $[A, B] = \{X \in \mathcal{P}(W) : A \subseteq X \subseteq B\}$. Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, as extremidades *esquerda* e *direita* do intervalo $[A, B]$. Para todos os pares (A, B) tais que $A \nsubseteq B$, $[A, B]$ representa a coleção vazia.

Dado um elemento $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$, podemos construir inúmeras coleções de intervalos. Por exemplo, $\{[X, X] \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W)) : X \in \mathcal{X}\}$ ou $\{[A, B] \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W)) : [A, B] \subseteq \mathcal{X}\}$. Note

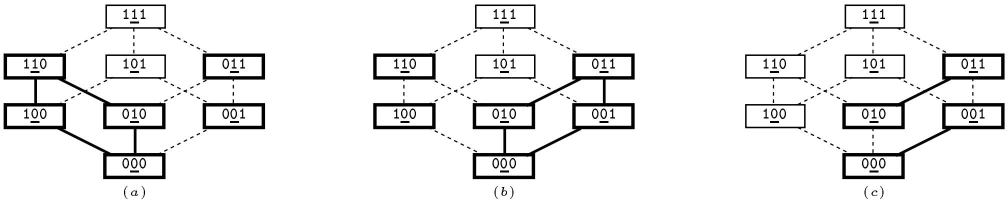

Figura 3.2: Diagramas que representam algumas coleções de um reticulado completo Booleano.

que uma coleção de intervalos é um subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$, mas um subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ não é necessariamente uma coleção de intervalos. Nesta seção, vamos definir uma coleção de intervalos maximais e uma relação de ordem $\leq$ entre seus elementos. Veremos também que essa coleção munida com a relação $\leq$ é um reticulado completo Booleano.

Subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ que são coleções de intervalos serão denotados por letras maiúsculas em negrito como $\mathbf{A}_W, \mathbf{B}_W, \mathbf{C}_W, ...$, ou, simplesmente, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, ...$, se o conjunto W está claramente definido no contexto.

Dada uma coleção de intervalos $\mathbf{X}$ contidos em $\mathcal{P}(W)$, um intervalo $[A, B] \in \mathbf{X}$ é chamado *intervalo maximal* em $\mathbf{X}$ se, e somente se, não existe um outro intervalo $[A', B'] \in \mathbf{X}$, distinto de $[A, B]$, tal que $[A, B] \subseteq [A', B']$.

A coleção de todos intervalos maximais de $\mathbf{X}$ é denotada por $Max(\mathbf{X})$. É claro que, se todos intervalos em $\mathbf{X}$ são maximais, então $\mathbf{X} = Max(\mathbf{X})$.

Seja $\mathcal{X}$ um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$. A coleção de todos intervalos maximais que estão contidos em $\mathcal{X}$ é denotada $\mathbf{M}(\mathcal{X})$, ou seja, $\mathbf{M}(\mathcal{X}) = Max(\{[A, B] \subseteq \mathcal{P}(W) : [A, B] \subseteq \mathcal{X}\})$.

Denotaremos por $\mathcal{U}(\mathbf{X})$ a coleção de todos elementos de $\mathcal{P}(W)$ que são elementos dos intervalos em $\mathbf{X}$, isto é, $\mathcal{U}(\mathbf{X}) = \{X \in \mathcal{P}(W) : X \in [A, B],\ [A, B] \in \mathbf{X}\}$.

Note que para qualquer $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(W)$, $\mathcal{U}(Max(\mathcal{X})) = \mathcal{X}$. Assim, qualquer coleção $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(W)$ pode ser representada por seus intervalos maximais.

Por simplicidade de notação, representaremos os subconjuntos de W por sucessões de $\cdot$'s, `0`'s e `1`'s, onde '$\cdot$' representa que o ponto não pertence a W, '`0`' denota que o ponto pertence a W mas não pertence ao subconjunto e '`1`' significa que ele pertence ambos ao subconjunto e a W. Além disso, a origem nessa representação é mostrada por um caractere sublinhado. Por exemplo, se W é o conjunto $\{(-1, 0), (1, 0)\}$, o subconjunto $\{(1, 0)\}$ é representado por `0`$\underline{\cdot}$`1`

As subcoleções de um reticulado finito Booleano podem ser representadas por diagramas como os apresentados na Figura 3.2. As caixas representam os elementos do reticulado, e os segmentos de linhas tracejadas (isto é, arestas tracejadas) representam a ordem parcial. As caixas em negrito representam os elementos da subcoleção. Os intervalos maximais dentro de uma subcoleção são representados por arestas em negrito.

Para uma maior clareza, se dois intervalos maximais de uma coleção têm uma aresta em comum, então eles serão representados em dois diagramas distintos.

Exemplo 3.20 *Seja* $W = 1\underline{1}1$ *e seja* $\mathcal{X} = \{0\underline{0}0, 1\underline{0}0, 0\underline{1}0, 0\underline{0}1, 1\underline{1}0, 0\underline{1}1\}$*. A coleção de todos intervalos maximais contidos em* $\mathcal{X}$ *é* $\mathbf{M}(\mathcal{X}) = \{[0\underline{0}0, 1\underline{1}0], [0\underline{0}0, 0\underline{1}1]\}$*. As Figuras* 3.2.*a e* 3.2.*b mostram* $\mathbf{M}(\mathcal{X})$*.*

Note que $\mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X}))$ não é necessariamente igual a $Max(\mathbf{X})$. Por exemplo, se $\mathbf{Y} = \{[0\underline{0}0, 0\underline{0}0], [0\underline{0}0, 0\underline{0}1], [0\underline{1}0, 0\underline{1}1]\}$, a coleção de intervalos maximais em $\mathbf{Y}$ é $Max(\mathbf{Y}) = \{[0\underline{0}0, 0\underline{0}1], [0\underline{1}0, 0\underline{1}1], \}$ e $\mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{Y})) = \{[0\underline{0}0, 0\underline{1}1]\}$. A Figura 3.2.$c$ apresenta $\mathcal{U}(\mathbf{Y})$ e $Max(\mathbf{Y})$.

Denotaremos por Π_W o conjunto $\{\mathbf{M}(\mathcal{X}) : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(W)\}$. Definimos a ordem parcial $\leq$ sobre os elementos de Π_W, estabelecendo que, para todo $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Pi_W$,

$$\mathbf{X} \leq \mathbf{Y} \;\Leftrightarrow\; \forall [A, B] \in \mathbf{X},\ \exists [A', B'] \in \mathbf{Y} : [A, B] \subseteq [A', B'].$$

O poset $(\Pi_W, \leq)$ constitui um reticulado completo Booleano [12]. O supremo e o ínfimo de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ em Π_W verificam, respectivamente, $\mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y} = \mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X}) \cup \mathcal{U}(\mathbf{Y}))$ e $\mathbf{X} \sqcap \mathbf{Y} = \mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{U}(\mathbf{Y}))$. O complemento de $\mathbf{X} \in \Pi_W$ é denotado por $\overline{\mathbf{X}}$ e verifica $\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{M}((\mathcal{U}(\mathbf{X}))^c)$. Essas expressões valem, pois o mapeamento $\mathbf{M}(\cdot)$, definido de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ em Π_W, é um isomorfismo de reticulado [12]. A inversa do mapeamento $\mathbf{M}(\cdot)$ é o mapeamento $\mathcal{U}(\cdot)$ [12]. Com isto, podemos enunciar a seguinte proposição [12].

Proposição 3.21 *O mapeamento* $\mathbf{M} : \mathcal{P}(\mathcal{P}(W)) \to \Pi_W$*, é um isomorfismo de reticulado entre* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ *e* Π_W*. A inversa de* $\mathbf{M}$ *é o mapeamento* $\mathcal{U} : \Pi_W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$*.*

A Figura 3.4 apresenta um diagrama que mostra graficamente o isomorfismo de reticulado entre $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ e $(\Pi_W, \leq)$.

Para todo $\mathbf{X} \in \Pi_W$ e $h \in E$, $\mathbf{X}_h \in \Pi_{W_y}$ denota a translação de todos intervalos de $\mathbf{X}$ por h, isto é, $\mathbf{X}_h = \{[A_h, B_h] \in \Pi_{W_h} : [A, B] \in \mathbf{X}\}$.

Proposição 3.22 *Se* $\mathbf{X} \in \Pi_W$ *e* $h \in E$*, então* $(\mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X})))_h = \mathbf{M}((\mathcal{U}(\mathbf{X}))_h)$*.*

Prova: Primeiramente, provaremos que $\mathcal{U}(\mathbf{X}_h) = (\mathcal{U}(\mathbf{X}))_h$. De fato,

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{U}(\mathbf{X}_h) &\Leftrightarrow \exists [A, B] \in \mathbf{X}_h : D \in [A, B] \\ &\Leftrightarrow \exists [A, B] \in \mathbf{X} : D_{-h} \in [A, B] \\ &\Leftrightarrow D_{-h} \in \mathcal{U}(\mathbf{X}) \\ &\Leftrightarrow D \in (\mathcal{U}(\mathbf{X}))_h. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que $\mathcal{U}(\mathbf{X}_h) = (\mathcal{U}(\mathbf{X}))_h$, então $\mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X}_h)) = \mathbf{M}((\mathcal{U}(\mathbf{X}))_h)$ e, como $\mathbf{M}(\cdot)$ é a inversa de $\mathcal{U}(\cdot)$, $\mathbf{X}_h = \mathbf{M}((\mathcal{U}(\mathbf{X}))_h)$.

Finalmente, uma vez que $\mathbf{X} = \mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X}))$, então $(\mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X})))_h = \mathbf{M}((\mathcal{U}(\mathbf{X}))_h)$. ∎

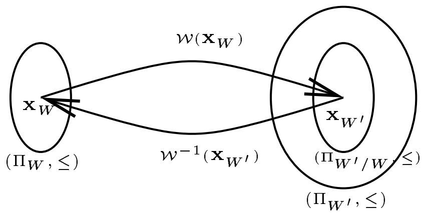

Figura 3.3: Isomorfismo de reticulado entre Π_W and $\Pi_{W'/W}$.

O próximo resultado é uma conseqüência imediata do isomorfismo de reticulado entre $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ e $(\Pi_W, \leq)$.

Proposição 3.23 *Se $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \Pi_W$ e $h \in E$, então*

$$\begin{array}{ll} (a)\ \mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \sqcup \mathbf{X}, & (d)\ \mathbf{X} \sqcap \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \sqcap \mathbf{X}, \\ (b)\ (\mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y}) \sqcup \mathbf{Z} = \mathbf{X} \sqcup (\mathbf{Y} \sqcup \mathbf{Z}), & (e)\ (\mathbf{X} \sqcap \mathbf{Y}) \sqcap \mathbf{Z} = \mathbf{X} \sqcap (\mathbf{Y} \sqcap \mathbf{Z}), \\ (c)\ (\mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y})_h = \mathbf{X}_h \sqcup \mathbf{Y}_h, & (f)\ (\mathbf{X} \sqcap \mathbf{Y})_h = \mathbf{X}_h \sqcap \mathbf{Y}_h. \end{array}$$

Prova: As propriedades (a), (b), (d) e (e) são imediatas, uma vez que $(\Pi_W, \leq)$ é um reticulado completo. Provaremos agora a propriedade (c).

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_h \sqcup \mathbf{Y}_h) &= \mathbf{M}(\ \mathcal{U}(\mathbf{X}_h)\ \cup\ \mathcal{U}(\mathbf{Y}_h)\ ) && \text{(pela propriedade de isomorfismo)} \\ &= \mathbf{M}(\ (\mathcal{U}(\mathbf{X}))_h\ \cup\ (\mathcal{U}(\mathbf{Y}))_h\ ) \\ &= \mathbf{M}(\ (\mathcal{U}(\mathbf{X}) \cup \mathcal{U}(\mathbf{Y}))_h\ ) \\ &= (\ \mathbf{M}(\mathcal{U}(\mathbf{X}) \cup \mathcal{U}(\mathbf{Y}))\ )_h && \text{(pela Proposição 3.22)} \\ &= (\mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y})_h && \text{(pela propriedade de isomorfismo).} \end{aligned}$$

Analogamente à prova da propriedade (c), pode-se provar a propriedade (f). ■

Sejam $W, W' \in \mathcal{P}(E)$ tais que $W \subseteq W'$. Definimos o conjunto $\Pi_{W'/W} \subseteq \Pi_{W'}$ como $\Pi_{W'/W} = \{\mathbf{X} \in \Pi_{W'} : A' \subseteq W \text{ e } B' - W = W^c,\ \forall\ [A', B'] \in \mathbf{X}\}$.

Proposição 3.24 *Sejam $W', W \in \mathcal{P}(E)$ tais que $W \subseteq W'$. O mapeamento $\mathcal{W}(\cdot)$, de $(\Pi_W, \leq)$ em $(\Pi_{W'/W}, \leq)$, definido por*

$$\mathcal{W}(\mathbf{X}_W) = \{[A', B'] \subseteq \mathcal{P}(W') : A' = A \text{ e } B' = B \cup W^c,\ [A, B] \in \mathbf{X}_W\}$$

constitui um isomorfismo de reticulado entre $(\Pi_W, \leq)$ e $(\Pi_{W'/W}, \leq)$. A inversa do mapeamento $\mathcal{W}(\cdot)$ é o mapeamento $\mathcal{W}^{-1}(\cdot)$, de $\Pi_{W'/W}$ em Π_W, definido por

$$\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{X}_{W'}) = \{[A, B] \subseteq \mathcal{P}(W) : A = A' \text{ and } B = B' \cap W,\ [A', B'] \in \mathbf{X}_{W'}\}.$$

Prova: Se $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ e $[X, Y] \in \mathbf{X}_W$, então $X \subseteq Y \subseteq W$. Provaremos a bijeção entre Π_W e $\Pi_{W'/W}$. Primeiro, mostraremos que $\mathcal{W}(\cdot)$ é uma função injetora, isto é, para todo $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$, temos que $\mathcal{W}^{-1}(\mathcal{W}(\mathbf{X}_W)) = \mathbf{X}_W$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^{-1}(\mathcal{W}(\mathbf{X}_W)) &= \{[A,B] \subseteq \mathcal{P}(W) : A = A', B = B' \cap W, [A',B'] \in \mathcal{W}(\mathbf{X}_W)\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(pela definição de } \mathcal{W}^{-1}(\cdot)) \\
&= \{[A,B] \subseteq \mathcal{P}(W) : A = A', B = B' \cap W, \\
&\qquad\qquad\qquad A' = X, B' = Y \cup W^c, [X,Y] \in \mathbf{X}_W\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(pela definição de } \mathcal{W}(\cdot)) \\
&= \{[A,B] \subseteq \mathcal{P}(W) : A = X, B = (Y \cup W^c) \cap W, [X,Y] \in \mathbf{X}_W\} \\
&= \{[A,B] \subseteq \mathcal{P}(W) : A = X, B = Y, [X,Y] \in \mathbf{X}_W\} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{(pela Proposição 2.4, uma vez que } Y \subseteq W) \\
&= \{[A,B] \subseteq \mathcal{P}(W) : [A,B] \in \mathbf{X}_W\} \\
&= \mathbf{X}_W.
\end{aligned}$$

Agora, vamos provar que $\mathcal{W}(\cdot)$ é uma função sobrejetora, isto é, para todo $\mathbf{X}_{W'} \in \Pi_{W'/W}$, temos que $\mathcal{W}(\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{X}_{W'})) = \mathbf{X}_{W'}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{X}_{W'})) &= \{[A',B'] \subseteq \mathcal{P}(W') : A' = A, B' = B \cup W^c, [A,B] \in \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{X}_{W'})\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(pela definição de } \mathcal{W}(\cdot)) \\
&= \{[A',B'] \subseteq \mathcal{P}(W') : A' = A, B' = B \cup W^c, \\
&\qquad\qquad\qquad A = X', B = Y' \cap W, [X',Y'] \in \mathbf{X}_{W'}\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(pela definição de } \mathcal{W}^{-1}(\cdot)) \\
&= \{[A',B'] \subseteq \mathcal{P}(W') : A' = X', B' = (Y' \cap W) \cup W^c, [X',Y'] \in \mathbf{X}_{W'}\} \\
&= \{[A',B'] \subseteq \mathcal{P}(W') : A' = X', B' = Y', [X',Y'] \in \mathbf{X}_{W'}\} \\
&\qquad \text{(pela Proposição 2.5, uma vez que } Y' \subseteq W' \text{ e } Y' - W = W^c) \\
&= \{[A',B'] \subseteq \mathcal{P}(W') : [A',B'] \in \mathbf{X}_{W'}\} \\
&= \mathbf{X}_{W'}.
\end{aligned}$$

Logo, uma vez que $\mathcal{W}(\cdot)$ é injetora e sobrejetora, então, $\mathcal{W}(\cdot)$ é bijetora. Agora, vamos mostrar que $\mathcal{W}(\cdot)$ preserva a ordem parcial. Sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Pi_W$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \leq \mathbf{Y} &\Leftrightarrow \forall [A,B] \in \mathbf{X},\ \exists [X,Y] \in \mathbf{Y} : [A,B] \subseteq [X,Y] \\
&\Leftrightarrow \forall [A,B] \in \mathbf{X},\ \exists [X,Y] \in \mathbf{Y} : [A, B \cup W^c] \subseteq [X, Y \cup W^c] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(uma vez que } B, Y \subseteq W) \\
&\Leftrightarrow \forall [A,B'] \in \mathcal{W}(\mathbf{X}),\ \exists [X,Y'] \in \mathcal{W}(\mathbf{Y}) : [A,B'] \subseteq [X,Y'] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(pela definição de } \mathcal{W}(\cdot)) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{W}(\mathbf{X}) \leq \mathcal{W}(\mathbf{Y}).
\end{aligned}$$

■

Sejam $W, W' \in \mathcal{P}(E)$ tais que $W \subseteq W'$. A Figura 3.3 mostra um desenho que descreve graficamente o isomorfismo de reticulado entre $(\Pi_W, \leq)$ e $(\Pi_{W'/W}, \leq)$.

Como conseqüência da Proposição 3.24, se $W \subseteq W'$, então podemos mudar a representação de uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ para $\mathbf{X}_{W'} \in \Pi_{W'/W} \subseteq \Pi_{W'}$, e vice-versa.

Sejam $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. A *adição* e *subtração de Minkowski* de $\mathbf{X}_W$ por C são, respectivamente, as coleções de intervalos maximais $\mathbf{X}_W \oplus C \in \Pi_{W \oplus C}$ e $\mathbf{X}_W \ominus C \in \Pi_{W \oplus C^t}$ dadas por $\mathbf{X}_W \oplus C = \sqcup\{(\mathbf{X}_h)_{W \oplus C} : h \in C\}$ e $\mathbf{X}_W \ominus C = \sqcap\{(\mathbf{X}_{-h})_{W \oplus C^t} : h \in C\}$.

Tecnicamente, a coleção $\mathbf{X}_W \oplus C \in \Pi_{W \oplus C}$ pode ser construída de seguinte forma. Para cada $h \in C$, faça a translação dos intervalos em $\mathbf{X}$ por h, para obter a coleção $(\mathbf{X}_h)_{W_h} \in \Pi_{W_h}$. Uma vez que $W_h \subseteq W \oplus C$, para todo $h \in C$, mude a representação de $(\mathbf{X}_h)_{W_h} \in \Pi_{W_h}$ para $(\mathbf{X}_h)_{W \oplus C} \in \Pi_{W \oplus C}$. Finalmente, obtenha o supremo das coleções $(\mathbf{X}_h)_{W \oplus C}$, para todo $h \in C$. A coleção $\mathbf{X} \ominus C$ é construída de forma similar. Por exemplo, sejam $W = \mathtt{1\underline{1}1}$ e $\mathbf{X}_W = \{[\mathtt{0\underline{0}0}, \mathtt{0\underline{0}1}], [\mathtt{0\underline{0}1}, \mathtt{0\underline{1}1}], [\mathtt{0\underline{1}1}, \mathtt{1\underline{1}1}]\}$. Se $C = \mathtt{1\underline{1}0}$, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_W \oplus C &= \{[\mathtt{00\underline{0}0}, \mathtt{10\underline{0}1}], [\mathtt{00\underline{0}1}, \mathtt{10\underline{1}1}], [\mathtt{00\underline{1}1}, \mathtt{11\underline{1}1}]\} \sqcup \\
&\quad \{[\mathtt{00\underline{0}0}, \mathtt{00\underline{1}1}], [\mathtt{00\underline{1}0}, \mathtt{01\underline{1}1}], [\mathtt{01\underline{1}0}, \mathtt{11\underline{1}1}]\} \\
&= \{[\mathtt{00\underline{1}0}, \mathtt{01\underline{1}1}], [\mathtt{00\underline{0}0}, \mathtt{00\underline{1}1}], [\mathtt{01\underline{1}0}, \mathtt{11\underline{1}1}], \\
&\quad [\mathtt{00\underline{0}0}, \mathtt{10\underline{0}1}], [\mathtt{00\underline{1}1}, \mathtt{11\underline{1}1}], [\mathtt{00\underline{0}1}, \mathtt{10\underline{1}1}]\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_W \ominus C &= \{[\mathtt{0\underline{0}00}, \mathtt{0\underline{0}11}], [\mathtt{0\underline{0}10}, \mathtt{0\underline{1}11}], [\mathtt{0\underline{1}10}, \mathtt{1\underline{1}11}]\} \sqcap \\
&\quad \{[\mathtt{0\underline{0}00}, \mathtt{1\underline{0}01}], [\mathtt{0\underline{0}01}, \mathtt{1\underline{0}11}], [\mathtt{0\underline{0}11}, \mathtt{1\underline{1}11}]\} \\
&= \{[\mathtt{0\underline{1}11}, \mathtt{1\underline{1}11}], [\mathtt{0\underline{0}11}, \mathtt{0\underline{1}11}], [\mathtt{0\underline{0}00}, \mathtt{0\underline{0}01}], [\mathtt{0\underline{0}01}, \mathtt{0\underline{0}11}]\}
\end{aligned}$$

3.4.4 Reticulado das Funções Binárias

O conjunto de todas funções $f : \mathcal{P}(W) \to \{0,1\}$, denotado por $\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}$, é chamado de *conjunto de funções binárias* definidas sobre $\mathcal{P}(W)$. Definimos a ordem parcial $\leq$ sobre os elementos de $\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}$, estabelecendo que, para quaisquer $f, g \in \{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}$, $f \leq g \Leftrightarrow f(X) \leq f(X)$, para todo $X \in \mathcal{P}(W)$. O par $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}, \leq)$ constitui um reticulado completo Booleano [12].

Um isomorfismo entre os reticulados $(\Pi_W, \leq)$ e $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}, \leq)$ é dada pela próxima proposição [12].

Proposição 3.25 *Seja F um mapeamento de Π_W em $\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}$ definido por, para todo $X \in \mathcal{P}(W)$,*

$$F(\mathbf{X})(X) = \begin{cases} 1 & \textit{se } X \in \mathcal{U}(\mathbf{X}) \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

constitui um isomorfismo de reticulado entre $(\Pi_W, \leq)$ e $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}, \leq)$. A sua inversa é definida por

$$F^{-1}(f) = \mathbf{M}(\{X \in \mathcal{P}(W) : f(X) = 1\}).$$

A Figura 3.4 apresenta um diagrama que mostra graficamente o isomorfismo de reticulado entre $(\Pi_W, \leq)$ e $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}, \leq)$.

3.4.5 Reticulado dos $\boldsymbol{W}$-Operadores

Um operador $\psi \in \Psi$ é chamado *invariante por translação* (IT) se, e somente se, para todo $x \in E$ e $X \in \mathcal{P}(E)$, $\psi(X_x) = \psi(X)_x$.

Seja W um subconjunto finito de E. Um operador $\psi \in \Psi$ é chamado *localmente definido* (LD) na janela W se, e somente se, para todo $x \in E$ e $X \in \mathcal{P}(E)$, $x \in \psi(X) \Leftrightarrow x \in \psi(X \cap W_x)$.

Um operador $\psi \in \Psi$ é chamado um *W-operador* se, e somente se, ele é IT e LD em uma janela W. O conjunto de todos W-operadores é denotado por Ψ_W. O par $(\Psi_W, \leq)$ constitui um sub-reticulado do reticulado $(\Psi, \leq)$ [12].

Na proposição [12] seguinte, apresentamos algumas propriedades de composições de W-operadores em janelas distintas.

Proposição 3.26 *Sejam ψ_1 e ψ_2 dois W-operadores LD's em W_1 e W_2, respectivamente. Então,*

$$\begin{array}{ll} (a) & \psi_1 \vee \psi_2 \text{ e } \psi_1 \wedge \psi_2 \text{ são LD's em } W_1 \cup W_2; \\ (b) & \psi_2\psi_1 \text{ é LD em } W_1 \oplus W_2; \\ (c) & \nu\psi_1,\ \psi_1\nu,\ \psi_1\iota,\ \iota\psi_1 \text{ são LD's em } W_1. \end{array}$$

Note que, pela Proposição 3.26.c, os operadores ν e ι são neutros em relação ao tamanho da janela. Assim, obviamente, ψ é um W-operador LD em W, se e somente se, ψ^* é também um W-operador LD em W.

A seguir, estudamos alguns isomorfismos de reticulados envolvendo $(\Psi_W, \leq)$. Para isso, precisamos fazer a seguinte definição.

O *núcleo* ou *kernel* de um operator $\psi \in \Psi_W$ é o conjunto $\mathcal{K}_W(\psi) \in \mathcal{P}(W)$ dado por $\mathcal{K}_W(\psi) = \{X \in \mathcal{P}(W) : o \in \psi(X)\}$.

Um isomorfismo entre os reticulados $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ e $(\Psi_W, \leq)$ é dado pela seguinte proposição [12].

Proposição 3.27 *O mapeamento $\mathcal{K}_W(\cdot)$ de $(\Psi_W, \leq)$ em $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$ constitui um isomorfismo de reticulado entre $(\Psi_W, \leq)$ e $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$. A inversa do mapeamento $\mathcal{K}_W(\cdot)$ é o mapeamento $\mathcal{K}_W^{-1}(\cdot)$, onde $\mathcal{K}_W^{-1}(\cdot)$ é definido como $\mathcal{K}_W^{-1}(\mathcal{X})(X) = \{x \in E : X_{-x} \cap W \in \mathcal{X}\}$.*

Um isomorfismo entre os reticulados $(\Psi_W, \leq)$ e $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}, \leq)$ é dado pela próxima proposição [12].

Proposição 3.28 *O mapeamento T de Ψ_W em $\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}$ definido como, para todo, $X \in \mathcal{P}(E)$,*

$$T(\psi)(X) = \begin{cases} 1 & \textit{se } o \in \psi(X) \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

constitui um isomorfismo de reticulado entre $(\Psi_W, \leq)$ e $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}, \leq)$. A inversa do mapeamento T é o mapeamento T^{-1}, definido como, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, $T^{-1}(f)(X) = \{x \in E : f(X_{-x} \cap W) = 1\}$.

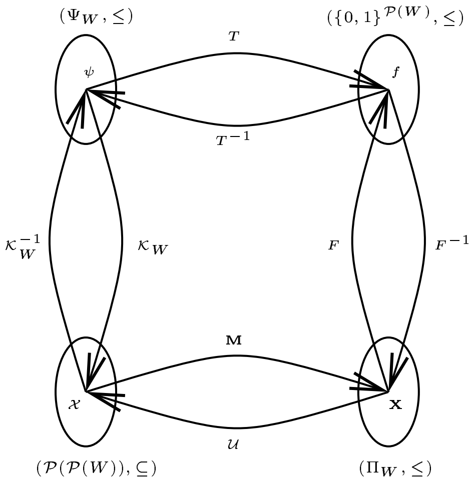

Figura 3.4: Os quatro isomorfismos de reticulados.

A Figura 3.4 apresenta um diagrama que mostra graficamente os isomorfismos entre os reticulados $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$, $(\Pi_W, \leq)$, $(\{0,1\}^{\mathcal{P}(W)}, \leq)$ e $(\Psi_W, \leq)$.

Como estes reticulados são isomorfos dois a dois, temos que um determinado problema definido em um desses reticulados pode ser estudado em qualquer um dos outros. Assim, um resultado teórico em um desses reticulados possui um equivalente em cada um dos outros reticulados.

3.5 Teorema da Decomposição de Operadores

Um primeiro estudo sobre decomposição de operadores foi introduzido em um trabalho publicado por Matheron [32] onde foi estabelecido que qualquer operador IT e crescente é um supremo de operadores elementares denominados erosões, ou dualmente, um ínfimo de operadores elementares denominados dilatações. Uma generalização deste resultado para operadores IT's, mas não necessariamente crescentes, foi obtida por Banon e Barrera [6].

Nesta seção apresentaremos o estado da arte sobre decomposição de W-operadores. A maioria dos resultados apresentados nesta seção para W-operadores foram obtidos por Barrera e Salas [12].

3.5.1 Operadores Elementares: Erosão e Dilatação

Seja $C \in \mathcal{P}(E)$. A *dilatação* e *erosão* por C são os operadores δ_C e ε_C definidos por, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, $\delta_C(X) = X \oplus C$ e $\varepsilon_C(X) = X \ominus C$. Se C é um subconjunto finito, dizemos que ele é um *elemento estruturante* (EE).

Devemos observar que δ_C e ε_C são operadores IT's [24, p. 85][8, p. 71, Prop. 4.14]. Além disso, se W é um subconjunto finito de E e $C \in \mathcal{P}(W)$, então δ_C e ε_C são W-operadores [12]. A seguir, apresentamos algumas propriedades de erosões e dilatações.

A próxima proposição [24, p. 85] mostra que a dilatação e a erosão comutam, respectivamente, com a união e a intersecção.

Proposição 3.29 *Se $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, então $\delta_C(A \cup B) = \delta_C(A) \cup \delta_C(B)$ e $\varepsilon_C(A \cap B) = \varepsilon_C(A) \cap \varepsilon_C(B)$.*

A proposição [24, p. 84, Eq. 4.41] seguinte mostra que o operador dual de uma erosão é uma dilatação e vice-versa.

Proposição 3.30 *Se $C \in \mathcal{P}(E)$, então $\delta_C^* = \varepsilon_{C^t}$ e $\varepsilon_C^* = \delta_{C^t}$.*

Na proposição [12] seguinte, apresentamos uma propriedade de composição de um W-operador com uma dilatação ou com uma erosão.

Proposição 3.31 *Se ψ é um W-operador LD em W, então os operadores $\delta_C\psi$ e $\varepsilon_C\psi$ são LD's, respectivamente, em $W \oplus C^t$ e $W \oplus C$.*

Devemos observar que a Proposição 3.31 fornece o pior caso para o crescimento da janela na composição de W-operadores. Pode acontecer que uma composição, de dois operadores LD's em uma mesma janela W, produza um operador que ainda é LD em W. Por exemplo, se $\delta_A\varepsilon_A$ é LD em W, então $(\delta_A\varepsilon_A)(\delta_A\varepsilon_A)$ é também LD em W, uma vez que $(\delta_A\varepsilon_A)(\delta_A\varepsilon_A) = \delta_A\varepsilon_A$.

3.5.2 Decomposição Canônica de W-Operadores

Seja $W \subseteq E$, W finito, e sejam $A, B \in \mathcal{P}(W)$ tais que $A \subseteq B$. O operador $\lambda_{A,B}^W \in \Psi_W$, definido por, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, $\lambda_{A,B}^W(X) = \{x \in E : A \subseteq X_{-x} \cap W \subseteq B\}$, é denominado *operador sup-gerador*, ou simplesmente, *sup-gerador*. O operador $\mu_{A,B}^W \in \Psi_W$, definido por, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, $\mu_{A,B}^W(X) = \{x \in E : X_{-x} \cap A^t \neq \emptyset$ ou $(X_{-x} \cap W^t) \cup B^t \neq W^t\}$, é denominado *operador inf-gerador*, ou simplesmente, *inf-gerador*.

A seguinte proposição [6, 12] é uma propriedade dos operadores sup-geradores e inf-geradores.

Proposição 3.32 *Sejam $A, B \in \mathcal{P}(W)$ tais que $A \subseteq B$. Então, $\lambda_{A,B}^W = \varepsilon_A \wedge \nu\delta_{(B^c)^t}$ e $\mu_{A,B}^W = \delta_A \vee \nu\varepsilon_{(B^c)^t}$, onde o complemento de B é em relação a W.*

O próximo resultado [6, 12] mostra como é o núcleo de um sup-gerador $\lambda_{A,B}^W$.

Proposição 3.33 *O núcleo de um sup-gerador é um intervalo, isto é,* $\mathcal{K}(\lambda^W_{A,B}) = [A, B]$.

A seguinte proposição [12] mostra que o operador dual de um sup-gerador é um inf-gerador e vice-versa.

Proposição 3.34 *Se* $C \in \mathcal{P}(E)$, *então* $(\lambda^W_{A,B})^* = \mu^{W^t}_{A^t,B^t}$ *e* $(\mu^W_{A,B})^* = \lambda^{W^t}_{A^t,B^t}$.

Banon e Barrera [6] mostraram uma conseqüência interessante da Proposição 3.32. Quando $B = W$ o operador sup-gerador $\lambda^W_{A,B}$ e o inf-gerador $\mu^W_{A,B}$ coincidem, respectivamente, com os operadores erosão e dilatação por A, isto é, $\lambda^W_{A,W} = \varepsilon_A$ e $\mu^W_{A,W} = \delta_A$.

Para não sobrecarregar a notação, denotaremos os operadores $\lambda^W_{A,B}$ e $\mu^W_{A,B}$ simplesmente por $\lambda_{A,B}$ e $\mu_{A,B}$, se o conjunto W está claramente definido no contexto.

A decomposição de W-operadores em termos de sup-geradores (ou equivalentemente, em termos de operadores elementares) é apresentada pela sup-representação dada pelo seguinte teorema [6, 12].

Teorema 3.35 *Se* $\psi \in \Psi_W$, *então* $\psi = \bigvee\{\lambda_{A,B} : [A, B] \subseteq \mathcal{K}_W(\psi)\}$.

A decomposição de W-operadores em termos de inf-geradores é apresentada pela inf-representação dada pelo seguinte teorema [6, 12].

Teorema 3.36 *Se* $\psi \in \Psi_W$, *então* $\psi = \bigwedge\{\mu^{W^t}_{A^t,B^t} : [A, B] \subseteq \mathcal{K}_W(\psi^*)\}$.

Pelo Teorema 3.35 (ou equivalentemente, pelo Teorema 3.36), o conjunto formado (*i*) pelos operadores erosão e dilatação, (*ii*) o operador de negação e (*iii*) as operações de intersecção e união é suficiente para representar qualquer W-operador. Este é o principal paradigma da MM e que pode ser formalizada pelo uso de uma linguagem formal, chamada aqui de *linguagem morfológica* (LM), cujo vocabulário compreende os operadores erosão e dilatação, o operador de negação, e as operações de intersecção e união. Esta linguagem é completa (isto é, ela é suficiente para descrever qualquer W-operador) e expressiva (isto é, a grande maioria dos W-operadores podem ser descritos por frases que usam relativamente poucas palavras). Uma frase da LM é denominada uma *representação* de um operador. Uma implementação da LM é chamada de *máquina morfológica* (MaqM) e um programa da MaqM é uma implementação de um operador para esta máquina.

3.5.3 Decomposição Minimal de W-Operadores

Um primeiro estudo sobre decomposição minimal de operadores IT's e crescentes, para decomposição apresentada por Matheron, foi introduzido por Maragos [30]. Seguindo a mesma idéia, Banon e Barrera [6] apresentaram uma generalização mostrando uma decomposição minimal para operadores IT's (não necessariamente crescentes).

A decomposição canônica de um W-operador (Teorema 3.35 ou 3.36) representa um resultado teórico bastante interessante. No entanto, com uma simples verificação, podemos observar que existem redundâncias nesta decomposição. Basta verificar que, se existem dois intervalos $[A,B]$ e $[A',B']$ contidos em $\mathcal{K}_W(\psi)$ tais que $[A,B] \subseteq [A',B']$, então o intervalo $[A,B]$ é redundante, pois

$$\begin{aligned} [A,B] \subseteq [A',B'] \quad &\Rightarrow \quad \lambda_{A,B} \leq \lambda_{A',B'} \\ &\Rightarrow \quad \lambda_{A,B} \vee \lambda_{A',B'} = \lambda_{A',B'}. \end{aligned}$$

Assim, podemos definir um outro conjunto de intervalos equivalente ao núcleo, de cardinalidade menor ou igual, que também caracteriza a decomposição.

Para todo operador $\psi \in \Psi_W$, a *base* de ψ, denotada por $\mathbf{B}_W(\psi)$, ou simplesmente $\mathbf{B}(\psi)$ se W está claramente definido no contexto, é a coleção de todos intervalos maximais contidos em $\mathcal{K}_W(\psi)$, isto é, $\mathbf{B}_W(\psi) = \mathbf{M}(\mathcal{K}_W(\psi))$.

Observe que a cardinalidade da base de um W-operador ψ é sempre menor ou igual à cardinalidade do seu núcleo.

A seguinte proposição mostra a base de um sup-gerador $\lambda_{A,B}^W$ e é uma conseqüência imediata da Proposição 3.33.

Proposição 3.37 *A base de um sup-gerador é composta por um único intervalo, isto é,* $\mathbf{B}(\lambda_{A,B}^W) = \{[A,B]\}$.

O seguinte teorema [12] mostra que a decomposição de um W-operador ψ, dada pelo Teorema 3.35, pode ser simplificada usando a sua base em vez do seu núcleo.

Teorema 3.38 *Se* $\psi \in \Psi_W$, *então* $\psi = \bigvee\{\lambda_{A,B} : [A,B] \in \mathbf{B}_W(\psi)\}$.

A decomposição dada pelo Teorema 3.36 também pode ser simplificada [12].

Teorema 3.39 *Se* $\psi \in \Psi_W$, *então* $\psi = \bigwedge\{\mu_{A^t,B^t}^{W^t} : [A,B] \in \mathbf{B}_W(\psi^*)\}$.

A decomposição do operador $\psi \in \Psi_W$ dada nos Teoremas 3.38 e 3.39 são chamadas, respectivamente, de *sup-representação* ou *sup-decomposição* (*minimal*) e *inf-representação* ou *inf-decomposição* (*minimal*) de ψ.

3.5.4 Propriedades da Base de um W-Operador

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades da base de um W-operador. Com estas propriedades será possível encontrar a base de um W-operador ψ a partir de qualquer representação de ψ.

Dado um operador $\psi \in \Psi_W$ e um elemento $h \in E$, o operador ψ_h é LD em W_h. O resultado seguinte [12] mostra como construir a base de ψ_h a partir da base de ψ.

Proposição 3.40 *Se $\psi \in \Psi_W$ e $h \in E$, então $\mathbf{B}_{W_h}(\psi_h) = (\mathbf{B}_W(\psi))_{-h}$.*

Dado um operador $\psi \in \Psi_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$, pela Proposição 3.31, os operadores $\delta_C\psi$ e $\varepsilon_C\psi$ são LD's, respectivamente, em $W \oplus C^t$ e $W \oplus C$. A proposição seguinte [12] mostra como construir as bases de $\delta_C\psi$ and $\varepsilon_C\psi$ a partir da base de ψ.

Proposição 3.41 *Se $\psi \in \Psi_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$, então*

$$\mathbf{B}_{W\oplus C^t}(\delta_C\psi) = \mathbf{B}_W(\psi) \oplus C^t,$$
$$\mathbf{B}_{W\oplus C}(\varepsilon_C\psi) = \mathbf{B}_W(\psi) \ominus C^t.$$

Dados dois W-operadores $\psi_1, \psi_2 \in \Psi_W$ tais que ψ_1 e ψ_2 são LD's, respectivamente, em W_1 e W_2, então, pela Proposição 3.26.a, os operadores $\psi_1 \vee \psi_2$ e $\psi_1 \wedge \psi_2$ são LD's em $W_1 \cup W_2$. A proposição seguinte [12] mostra como construir as bases de $\psi_1 \vee \psi_2$ e $\psi_1 \wedge \psi_2$ a partir das bases de ψ_1 e ψ_2.

Proposição 3.42 *Se ψ_1 e ψ_2 são dois W-operadores LD's, respectivamente, em W_1 e W_2, então*

$$\mathbf{B}_{W_1\cup W_2}(\psi_1 \vee \psi_2) = \mathbf{B}_{W_1}(\psi_1) \sqcup \mathbf{B}_{W_2}(\psi_2),$$
$$\mathbf{B}_{W_1\cup W_2}(\psi_1 \wedge \psi_2) = \mathbf{B}_{W_1}(\psi_1) \sqcap \mathbf{B}_{W_2}(\psi_2).$$

Na proposição seguinte [12], mostramos como construir a base da composição de um W-operador ψ com o operador de negação, a partir da base de ψ.

Proposição 3.43 *Se $\psi \in \Psi_W$, então $\mathbf{B}_W(\nu\psi) = \overline{\mathbf{B}_W(\psi)}$.*

Com os resultados apresentados nas Proposições 3.41, 3.42 e 3.43 podemos construir a base de qualquer W-operador ψ a partir de uma representação de ψ, ou seja, de uma frasa da LM que representa ψ [12]. A idéia é utilizar estes resultados recursivamente para construir passo a passo (incrementalmente) a base de ψ. Neste processo, a condição inicial é a base do operador identidade, $\mathbf{B}_W(\iota) = \{[\{o\}, W]\}$. Um estudo mais aprofundado deste resultado pode ser encontrado em [12].

Como conseqüência da construção incremental da base de um operador ψ a partir de qualquer representação ψ, podemos verificar se duas frases da LM são equivalentes ou sinônimas, uma vez que estrutura de decomposição, dada pelo Teorema 3.38, caracteriza unicamente um W-operador, isto é, se duas representações de operadores têm a mesma base, então estas elas representam, de fato, o mesmo operador.

Para finalizar esta seção, apresentamos mais uma propriedade da base de W-operadores [12]. Seja $\psi \in \Psi_W$. Através desta propriedade podemos construir a base de ψ^* a partir da base de ψ.

Proposição 3.44 *Seja* $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ *um conjunto de índices. Seja* $\psi \in \Psi_W$. *Se* $\mathbf{B}(\psi) = \{[A_i, B_i] : i \in I\}$, *então a base de* ψ^* *é*

$$\mathbf{B}(\psi^*) = \overline{\sqcup\{\{[B_i^c, A_i^c]\} : i \in I\}}.$$

3.6 Decomposição de Operadores Especiais

Para algumas classes de operadores, devido a certas propriedades algébricas, podemos obter estruturas de decomposição mais simples do que a decomposição canônica. Nesta seção, apresentamos as decomposições de duas classes particulares de operadores obtidas por Matheron. Na Subseção 3.6.1 apresentamos a decomposição de operadores crescentes e IT's. Na Subseção 3.6.2, apresentamos a decomposição das aberturas e fechamentos IT's.

3.6.1 Operadores Crescentes Invariantes por Translação

Seja $\psi \in \Psi_W$ um operador crescente. A definição de operadores crescentes implica que seu núcleo tem a propriedade de herança, ou seja, para todo $X, Y \in \mathcal{P}(W)$ tais que $X \subseteq Y$, se $X \in \mathcal{K}(\psi)$, então $Y \in \mathcal{K}(\psi)$. Logo, para todo $[A, B] \in \mathbf{B}(\psi)$, temos que $B = W$ e os operadores $\lambda_{A,B}$ e $\mu_{A,B}$ das famílias de sup-geradores e inf-geradores dos Teoremas 3.35 e 3.36 tornam-se, respectivamente, erosões e dilatações [6]. Dessa forma, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.45 *Seja* $\psi \in \Psi_W$. *Se* ψ *é crescente, então*

$$\begin{array}{ll} (a) & \psi = \bigvee\{\varepsilon_A : [A, W] \in \mathbf{B}_W(\psi)\} \\ (b) & \psi = \bigwedge\{\delta_{A^t} : [A, W] \in \mathbf{B}_W(\psi^*)\}. \end{array}$$

Se $W = E$, a classe dos W-operadores é ela mesma a classe de operadores IT's, e sob esta condição, o resultado de decomposição apresentado no Teorema 3.45 é o resultado clássico da decomposição de operadores crescentes e IT's obtida por Matheron [32].

Como a base de um operador $\psi \in \Psi_W$ se simplifica no caso em que ψ é crescente, ou seja, a extremidade direita de todo intervalo na base de ψ é a própria janela W, então a Proposição 3.44 pode ser facilmente simplificada para o seguinte resultado.

Proposição 3.46 *Seja* $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ *um conjunto de índices. Seja* $\psi \in \Psi_W$ *um operador crescente. Se* $\mathbf{B}(\psi) = \{[A_i, W] : i \in I\}$, *então a base de* ψ^* *é*

$$\mathbf{B}(\psi^*) = \sqcap\{[\{a\}, W] : a \in A_i^c \text{ e } i \in I\}.$$

3.6.2 Aberturas e Fechamentos Invariantes por Translação

Para cada $A \in \mathcal{P}(W)$, a abertura morfológica γ_A (respectivamente, fechamento morfológico ϕ_A) é o operador construído pela composição da erosão ε_A (respectivamente, da dilatação δ_A) com a dilatação δ_A (respectivamente, da erosão ε_A), ou seja, $\gamma_A = \delta_A \varepsilon_A$ (respectivamente, $\phi_A = \varepsilon_A \delta_A$).

O núcleo de uma abertura morfológica é dado pela seguinte proposição.

Proposição 3.47 *Se $A \in \mathcal{P}(W)$, então $\mathcal{K}_W(\gamma_A) = \{X \in \mathcal{P}(W) : A_{-h} \subseteq X \text{ e } h \in A\}$.*

Prova: Pela definição de γ_A e pela Proposição 3.12, temos que, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, $\gamma_A(X) = \cup\{A_h : h \in E \text{ e } A_h \subseteq X\}$. Assim, para todo $Y \in \mathcal{P}(W)$,

$$\begin{aligned} Y \in \mathcal{K}(\gamma_A) &\Leftrightarrow o \in \gamma_A(Y) \\ &\Leftrightarrow o \in \cup\{A_h : h \in E \text{ e } A_h \subseteq Y\} \\ &\Leftrightarrow \exists h \in E : o \in A_h \text{ e } A_h \subseteq Y \\ &\Leftrightarrow \exists h \in E : h \in A \text{ e } A_{-h} \subseteq Y \\ &\Leftrightarrow \exists h \in A : A_{-h} \subseteq Y \\ &\Leftrightarrow Y \in \{X \in \mathcal{P}(W) : A_{-h} \subseteq X \text{ e } h \in A\}. \end{aligned}$$

■

Uma abertura morfológica (respectivamente, um fechamento morfológico) é independente da translação, isto é, para todo $h \in E$, $\gamma_A = \gamma_{A_h}$ (respectivamente, $\phi_A = \phi_{A_h}$).

Um *invariante* de um operador $\psi \in \Psi$ é um subconjunto $X \in \mathcal{P}(E)$ tal que $\psi(X) = X$. O conjunto de todos invariantes de ψ será denotado por $Inv(\psi)$, isto é, $Inv(\psi) = \{X \in \mathcal{P}(E) : \psi(X) = X\}$.

Matheron [32, Prop. 7.1.3] provou a seguinte decomposição para aberturas e fechamentos IT's.

Teorema 3.48 *Seja $\psi \in \Psi$.*

(a) Se ψ é uma abertura IT, então $\psi = \bigvee\{\gamma_A : A \in Inv(\psi)\}$
(b) Se ψ é um fechamento IT, então $\psi = \bigwedge\{\phi_{A^t} : A \in Inv(\psi^*)\}$.

Devemos alertar o leitor para não confundir a definição de invariante de um conjunto (definido na Subseção 3.2.1) com invariante de um operador (definido acima). Lembramos também que na Subseção 3.2.1, definimos que um conjunto $A \in \mathcal{P}(W)$ é um aberto de $B \in \mathcal{P}(W)$ se, e somente se, A é um invariante de B. Os invariantes (ou equivalentemente, os abertos) de um determinado conjunto têm a seguinte propriedade [41, p. 54].

Proposição 3.49 *Sejam $A, B \in \mathcal{P}(W)$. Se A é um invariante de B, então $\gamma_B \leq \gamma_A$ e $\phi_A \leq \phi_B$.*

A propriedade dada pela Proposição 3.49 permite a construção de granulometrias [43] e, por esta razão, esta propriedade é chamada de *granulometria de absorção*.

3.7 Mudança de Estrutura de Representação

Para um W-operador ψ podem existir inúmeras frases sinônimas da LM que o representem. Na Subseção 3.5.4, vimos algumas propriedades para construir incrementalmente a base de um operador ψ a partir de uma representação de ψ. Nesta seção apresentaremos o estado da arte no que se refere ao problema de transformação de representação de um operador ψ, a partir de sua base, para encontrar frases da LM que implementem eficientemente o operador ψ. Este problema é extremamente complexo e pode ser visto como o problema inverso da construção incremental da base.

A escolha de "boas" representações de um operador depende da arquitetura da máquina na qual o operador será implementado. Em geral, decomposições seqüênciais são mais adequadas para máquinas convencionais, enquanto que decomposições híbridas (seqüencial-paralela) são mais adequadas para máquinas paralelas.

Atualmente, na literatura, existem poucos artigos que estudaram o problema geral de transformação de representação de um operador, uma vez que se trata de um problema extremamente difícil. Um primeiro trabalho, feito por Jones [27], foi o estudo de mudança de representação de operadores IT's e crescentes. O problema estudado no artigo do Jones pode ser enunciado da seguinte forma: dada a sup-decomposição de um operador IT e crescente ψ_1, encontrar todos subconjuntos possíveis para $C \in \mathcal{P}(E)$ e de todas possíveis sup-decomposições dos operadores ψ_2 e ψ_3, também IT's e crescentes, tais que verifiquem uma das seguintes equações:

$$\begin{array}{ll} (a) & \psi_1 = \delta_C\psi_2 \vee \psi_3; \\ (b) & \psi_1 = \delta_C\psi_2 \wedge \psi_3; \\ (c) & \psi_1 = \varepsilon_C\psi_2 \vee \psi_3; \\ (d) & \psi_1 = \varepsilon_C\psi_2 \wedge \psi_3. \end{array}$$

No trabalho do Jones são apenas apresentados, para cada equação, alguns limites superiores e inferiores para o subconjunto C e para as sup-decomposições de ψ_2 e ψ_3, com o objetivo de diminuir o espaço de busca das soluções das equações apresentadas acima. No entanto, ele não fez um estudo detalhado do problema, apresentando os resultados de uma maneira bastante intrincada.

3.7.1 Mudança de Representação de Erosões e Dilatações

Uma vez que, no caso geral, o problema de encontrar a melhor representação de um operador é extremamente difícil, restringimos o estudo das propriedades da sup-decomposição para certas classes de operadores. De fato, existe um número considerável de estudos desse problema para a família das erosões e dilatações.

Uma propriedade de dilatações e erosões é que elas podem ter uma decomposição seqüencial [41, p. 47].

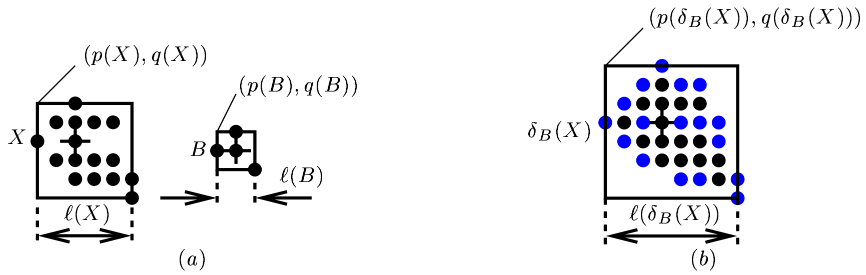

Figura 3.5: (a) Os conjuntos X e B. (b) Dilatação de X por B.

Proposição 3.50 *Sejam* $A, B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathcal{P}(E)$. *Então,* $\delta_A = \delta_{B_1}\delta_{B_2}\cdots\delta_{B_n}$ *e* $\varepsilon_A = \varepsilon_{B_1}\varepsilon_{B_2}\cdots\varepsilon_{B_n}$ *se, e somente se,* $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \;\cdots\; \oplus\; B_n$.

Teoricamente, a decomposição seqüencial de erosões e dilatações pode ser considerada a partir de dois pontos de vista. Por um lado, considerando a sup-decomposição (respectivamente, inf-decomposição), uma erosão (respectivamente, dilatação) é o operador mais simples que pode ser representado, uma vez que a sup-decomposição (respectivamente, inf-decomposição) de uma erosão (respectivamente, dilatação) é uma erosão (respectivamente, dilatação) [24, p. 86, Teorema 4.15] (veja também o Teorema 3.45). Por outro lado, a composição de erosões (respectivamente, dilatações) é equivalente à erosão (respectivamente, dilatação) de adições acumuladas de Minkowski de EE's que caracterizam as erosões (respectivamente, dilatações) [41, p. 47] (veja também a Proposição 3.50). Portanto, o problema de transformar a sup-decomposição de uma erosão (respectivamente, inf-decomposição de uma dilatação) em uma decomposição seqüencial é equivalente a encontrar uma decomposição do EE que o caracteriza em termos de adições de Minkowski.

Para o estudo de decomposição de erosões e dilatações, consideraremos $E = \mathbb{Z}^2$ e o ponto $o = (0,0)$ como a *origem* de $\mathbb{Z}^2$. O quadrado 3×3 centrado na origem de $\mathbb{Z}^2$, isto é, o conjunto $\{-1,0,1\}^2 = \{-1,0,1\} \times \{-1,0,1\}$, é chamado de *quadrado elementar*.

Seja $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ e seja n um inteiro em $\mathbb{Z}_+$. A *sucessão de* $n-1$ *adições de Minkowski* $((X \oplus X) \oplus \cdots \oplus X)$ é denotada por nX. Essa notação é estendida para $n = 0$ estabelecendo que $0X = \{o\}$.

Sejam $X, B \subseteq \mathbb{Z}^2$. Para se computar uma dilatação ($\delta_B(X)$) ou uma erosão ($\varepsilon_B(X)$), adotaremos a seguinte estrutura de dados para armazenar X e B.

Seja $\ell(X)$ (respectivamente, $\ell(B)$) o comprimento do menor quadrado que contém X (respectivamente, o comprimento do menor quadrado que contém B) e $(p(X), q(X))$ (respectivamente, $(p(B), q(B))$) o ponto correspondente à extremidade superior esquerda deste quadrado. Por exemplo, para o conjunto X na Figura 3.5.a, $\ell(X) = 5$, $p(X) = -2$ e $q(X) = 2$.

O EE B será representado por uma estrutura de dados composta pelo valor $\ell(B)$, pela coordenada do ponto $(p(B), q(B))$ e uma lista ligada que contém os valores das coordenadas de cada ponto pertencente a B. Por exemplo, a estrutura de dados para armazenar o EE B da Figura 3.5.a contém os valores $\ell(B) = 2$, $p(B) = -1$, $q(B) = 1$ e uma lista ligada contendo os pontos $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,0)$ e $(1,-1)$.

A estrutura de dados para armazenar a imagem de entrada é composta por uma matriz que contém valores 0's e 1's ($X[i,j] = 1$ se, e somente se, o ponto (i,j) pertence a X), pelo comprimento $\ell(X)$ e pela coordenada do ponto $(p(X), q(X))$.

Pode-se mostrar que $\ell(\delta_B(X)) = \ell(X) + \ell(B)$, $p(\delta_B(X)) = p(X) + p(B)$ e $q(\delta_B(X)) = q(X) + q(B)$ (veja Proposição 4.17). Por exemplo, na Figura 3.5.b,

- $\ell(\delta_B(X)) = \ell(X) + \ell(B) = 5 + 2 = 7$;
- $p(\delta_B(X)) = p(X) + p(B) = -2 + (-1) = -3$;
- $q(\delta_B(X)) = q(X) + q(B) = 2 + 1 = 3$.

Apresentamos a seguir um algoritmo simples para computar uma dilatação.

Entrada: Um conjunto $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ e um EE $B \subseteq \mathbb{Z}^2$.

Saída: O conjunto $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ correspondente à dilatação $\delta_B(X)$.

01: /* Inicialização do conjunto C */
02: $p(C) = p(X) + p(B)$; $q(C) = q(X) + q(B)$;
03: $\ell(C) = \ell(X) + \ell(B)$;
04: **para cada** i de $p(C)$ a $p(C) + \ell(C)$ **faça**
05:   **para cada** j de $p(C)$ a $q(C) + \ell(C)$ **faça**
06:     $C[i,j] \leftarrow 0$;
07: /* Cálculo da dilatação */
08: **para cada** (u,v) da lista de pontos de B **faça**
09:   **para cada** i de $p(X)$ a $p(X) + \ell(X)$ **faça**
10:     **para cada** j de $p(X)$ a $q(X) + \ell(X)$ **faça**
11:       $C[i,j] \leftarrow C[i,j]$ OR $X[i+u, j+v]$

A operação OR no Passo 11 denota a operação de "ou" lógico.

Assim, a complexidade de tempo para se computar $\delta_B(X)$ é igual a $\Theta((\ell(B) + \ell(X))^2 + |B| \cdot \ell(X)^2)$.

A decomposição seqüencial de EE's tem implicação na complexidade das implementações da erosão e dilatação. Normalmente, a implementação de seqüências de erosões e dilatações é mais rápida e simples do que a equivalente implementação direta.

Por exemplo, se B é o quadrado elementar, facilmente podemos verificar que, para

Figura 3.6: (a) Um EE A. (b) O fecho convexo de A.

$n > 0$, $|nB| = (2n+1)^2$ e $\ell(nB) = 2n+1$. Uma vez que $|B| = 9$ e $\ell(B) = 2$, então a complexidade para computar $\delta_B(X)$ é $\Theta(m^2)$, onde $m = \ell(X)$. Assim, as complexidades para computar δ_{nB} e $\delta_B\delta_B\cdots\delta_B$ são, respectivamente, $\Theta(n^2 \cdot m^2)$ e $\Theta(n \cdot m^2 + n^2 \cdot m + n^3)$. Observe que se $n = O(m^2)$, então a implementação seqüencial é melhor que a implementação direta. Além disso, a implementação seqüencial é mais eficiente para máquinas com "hardware" especializado onde em geral há uma operação em "hardware" para executar rapidamente dilatações e erosões por EE's que são subconjuntos do quadrado elementar.

Na prática, podemos considerar que o conjunto $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ tem sempre uma dimensão constante (por exemplo, 256×256 pixels) e, portanto, qualquer operação de translação, união e intersecção em X é feito em tempo constante. Dessa forma, podemos calcular o número de operações efetuadas para se computar uma dilatação $\delta_B(X)$ levando em conta somente o número de operações uniões (ou equivalentemente, o número de pontos de B). Assim, neste caso, a medida de complexidade para se computar uma dilatação $\delta_B(X)$ (respectivamente, uma erosão $\varepsilon_B(X)$) depende somente da cardinalidade de B.

Voltemos ao exemplo em que B é o quadrado elementar. Uma vez que $|B| = 9$, então a computação de $\delta_B(X)$ é feito em tempo constante. Como, para $n > 0$, $|nB| = (2n+1)^2$. então, as complexidades para computar $\delta_{nB}(X)$ e $\delta_B\delta_B\cdots\delta_B(X)$ são, respectivamente, $(2n+1)^2$ e $9 \cdot n$. De fato, a complexidade de computar erosões e dilatações por um EE decomposto como seqüência de adições de Minkowski em termos de subconjuntos do quadrado elementar, em uma máquina convencional, foi quantitativamente estudado por Maragos [30, p. 77], que mostrou exemplos onde a complexidade de tempo de algoritmos que implementam erosões e dilatações foram, de quadráticas, na implementação direta, para linear, na decomposição do EE por adições de Minkowski.

Alguns outros exemplos de como a complexidade de tempo de implementações de erosões e dilatações diminui, quando se usa decomposição seqüencial em vez de usar a implementação direta, podem ser encontrados em [8, p. 162].

Muitos pesquisadores [51, 38, 49, 28, 34, 35, 50, 1, 20, 19, 47, 45, 44, 33] têm estudado o problema de decomposição de um EE A como seqüência de adições de Minkowski de subconjuntos de cardinalidade menores que A e propuseram diferentes algoritmos para gerarem tais decomposições.

Zhuang and Haralick [51] apresentaram um algoritmo baseado em uma árvore de busca para decomposição de um EE arbitrário, onde todos elementos na decomposição têm um número k pré-estabelecido e fixo de pontos.

Devemos observar que nem todos EE's têm decomposição seqüencial por adições de

Minkowski [49]. Além disso, o problema geral de decomposição de EE's é NP-completo [33]. No entanto, sabe-se que todo EE convexo têm uma decomposição seqüêncial [49]. Um EE convexo é definido a seguir.

O *fecho convexo* $C(A)$ de um EE A é a intersecção de todos semi-planos que contém A. Nesta tese, vamos supor que os subconjuntos estão representados em uma grade quadrada e consideraremos que somente os semi-planos com inclinações 0, 45, 90 e 135 graus para construir o fecho convexo (para um exemplo, veja a Figura 3.6). Um EE A é dito *convexo* se, e somente se, $A = C(A)$.

Em 1991, Xu [49] apresentou um algoritmo para decomposição de EE's convexos em termos de um número mínimo de subconjuntos convexos do quadrado elementar.

Park e Chin [35] apresentaram uma extensão do algoritmo de Xu para decompor EE's *simplesmente conexos* (isto é, um EE 8-conexo que não contém buracos[1]), onde todos elementos na decomposição são também simplesmente conexos. Observe que todo EE convexo é também simplesmente conexo.

3.8 Problemas Estudados nesta Tese

Após uma explanação de alguns aspectos do estado da arte em MM, apresentaremos, nesta seção, os problemas que foram estudados nesta tese. A partir do próximo capítulo, todos resultados apresentados são contribuições originais desta tese. Acreditamos que com esses resultados foram acrescentados alguns avanços no estado da arte em MM no que se refere à transformação de estruturas de decomposição.

3.8.1 Decomposição de Elementos Estruturantes

Nesta tese, estudamos o problema de decompor EE's convexos, simplesmente conexos e arbitrários. Os detalhes são dados nas subseções a seguir.

3.8.1.1 Decomposição de Elementos Estruturantes Convexos

Para o caso de EE's convexos, avançamos no estado da arte em MM apresentando no Capítulo 5 um novo algoritmo que usa uma estratégia gulosa para decompor tais EE's.

3.8.1.2 Decomposição de Elementos Estruturantes Simplesmente Conexos

Para o caso de EE's simplesmente conexos, mostramos, no Capítulo 6, que o algoritmo de Park e Chin [35] para decompor tais EE's não decompõe três famílias infinitas de EE's

[1] Um estudo aprofundado sobre conexidade e topologia digital pode ser encontrado em [29].

decomponíveis simplesmente conexos.

3.8.1.3 Decomposição de Elementos Estruturantes Arbitrários

No caso geral, apresentamos no Capítulo 7 um algoritmo que usa uma estratégia de "branch and bound" para decompor EE's arbitrários.

3.8.2 Representação Compacta de W-Operadores

Nesta tese, no Capítulo 8, estudamos o problema de representação de operadores e introduzimos uma nova representação mais compacta (ou seja, que utiliza um número menor de operadores elementares) que a decomposição na forma canônica. Este estudo é apresentado de uma maneira construtiva para se obter algoritmos simples e não sofisticados que convertem a representação canônica de um operador para tal representação compacta.

Considerando os W-operadores que são anti-extensivos e idempotentes em um sentido estrito, obtivemos uma simplificação para a sua representação compacta. Além disso, colocando a hipótese de que os W-operadores são também crescentes, obtivemos uma realização minimal da representação clássica de Matheron para as aberturas e fechamentos IT's a partir da representação compacta simplificada.

3.8.3 Decomposição Seqüencial de W-Operadores

Vimos que a sup-decomposição de um operador tem uma estrutura puramente paralela que não é eficiente para implementação em máquinas convencionais seqüenciais. Assim, no Capítulo 9, estudamos e formalizamos o problema de transformar as sup-decomposições em decomposições puramente seqüenciais (quando elas existem). Uma versão especializada deste problema é o problema clássico de encontrar decomposições seqüenciais para erosões e dilatações.

Propomos uma teoria que consiste na formulação e solução de equações discretas em reticulados completos, cujo espaço de soluções tem uma forte natureza combinatória. Essas técnicas foram desenvolvidas para W-operadores em geral, depois, especializadas para W-operadores crescentes e, posteriormente, aplicadas sobre operadores que podem ser construídos a partir de composições de dilatações e erosões.

Os resultados obtidos para W-operadores em geral são uma extensão de alguns resultados obtidos por Jones [27] para operadores crescentes IT's e introduzem alguns novos limites superiores e inferiores para o caso particular de W-operadores crescentes.