Capítulo 4

Decomposição de Elementos Estruturantes

Neste capítulo serão dados os fundamentos matemáticos que foram estudados na nossa pesquisa para se obter uma decomposição de um dado EE. A maioria das idéias apresentadas neste capítulo são originais e servem de apoio para os Capítulos 5, 6 e 7.

Na Seção 4.1, veremos que encontrar uma decomposição de um EE A equivale a procurar uma subseqüência de uma dada seqüência construída a partir de A. Na Seção 4.2, apresentaremos algumas propriedades do fecho convexo. Na Seção 4.3, introduziremos algumas medidas feitas sobre EE's e apresentaremos um limite inferior para o número de subconjuntos para uma decomposição de um EE.

4.1 Propriedades de uma Decomposição de um Elemento Estruturante

Nesta seção, estabeleceremos uma equivalência entre o problema de encontrar uma decomposição de um EE A e o problema de encontrar uma subseqüência dentro de uma dada seqüência construída a partir de A. Para isso, devemos antes apresentar algumas definições e propriedades da adição de Minkowski.

Dado um EE A, uma *seqüência de subconjuntos* de A é uma sucessão de subconjuntos de A em uma determinada ordem pré-estabelecida. Por exemplo, se $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$ são subconjuntos distintos de A, então $[B_7, B_1, B_1, B_1, B_2, B_2, B_3, B_1, B_4, B_5, B_2, B_6]$ é uma seqüência de subconjuntos de A. Nesta tese, consideraremos somente seqüências de subconjuntos finitas.

Sejam R=$[R_1, R_2, \cdots, R_m]$ e S=$[S_1, S_2, \cdots, S_n]$ duas seqüências de subconjuntos de um dado EE A. Dizemos que R é uma *subseqüência* de S se, e somente se, para todo $R_j \in \mathsf{R}$, existe $S_{\pi(j)} \in \mathsf{S}$, tal que $R_j = S_{\pi(j)}$ (isto é, R=$[S_{\pi(1)}, S_{\pi(2)}, \cdots, S_{\pi(m)}]$), onde

$\pi(j)$ é um índice em $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ e $\pi(1) < \pi(2) < \pi(3) < \cdots < \pi(m)$. Por exemplo, se $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ são subconjuntos distintos de A, então $[B_1, B_1, B_4, B_2]$ é uma subseqüência de $[B_6, B_1, B_1, B_1, B_2, B_2, B_3, B_1, B_4, B_5, B_2]$, mas $[B_1, B_1, B_4, B_1]$ não é.

Dado um EE A e duas seqüências de subconjuntos de A, digamos S e R, a *concatenação das seqüências* S e R, denotada por $\mathsf{S}\cdot\mathsf{R}$, é a seqüência formada pelos elementos de S seguida pelos elementos de R. Por exemplo, se $\mathsf{S} = [B_1, B_2]$ e $\mathsf{R} = [B_1, B_3]$ são duas seqüências de subconjuntos de A, então a concatenação $\mathsf{T} = \mathsf{S} \cdot \mathsf{R}$ é a seqüência $\mathsf{T} = [B_1, B_2, B_1, B_3]$.

Dizemos que um EE A tem uma *decomposição seqüencial* (ou A é *decomponível*) se existe uma seqüência $[B_1, B_2, \cdots, B_n]$ de subconjuntos do quadrado elementar tal que $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$. A seqüência $[B_1, B_2, \cdots, B_n]$ é chamada uma *decomposição seqüencial* de A.

Uma decomposição seqüencial de um EE pode ser particionada em duas subseqüências: *de forma* e *de translação*. A subseqüência de forma representa a forma do EE e ela é formada por subconjuntos que têm pelo menos dois elementos. A subseqüência de translação define a posição do EE em $\mathbb{Z}^2$ e ela é formada por subconjuntos unitários. A subseqüência de forma $[B_1, \cdots, B_k]$ é chamada de *decomposição de forma* (ou simplesmente, *decomposição*) de A e o número inteiro k é o *comprimento* de uma decomposição de A. Dizemos que uma decomposição de A é *ótima* se, e somente se, k é o menor valor possível para uma decomposição de A.

O resultado seguinte é uma conseqüência imediata da Proposição 3.15.

Proposição 4.1 *Seja A um EE. Se $[B_1, B_2, \cdots, B_k]$ é uma decomposição de A, então cada B_i é um invariante de A.*

Prova: Uma vez que $[B_1, B_2, \cdots, B_k]$ é uma decomposição de A, então existe $h \in \mathbb{Z}^2$ tal que $A = (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k)_h$ ou $A = (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k) \oplus \{h\}$. Assim, pela propriedade de comutatividade e associatividade da adição de Minkowski e pela Proposição 3.15, cada B_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ é um invariante de A. ■

Sejam A e X dois EE's tais que X é um invariante de A. A *multiplicidade* de X com respeito a A é o maior inteiro positivo n tal que nX é ainda um invariante de A. Por exemplo, a multiplicidade de B_1, B_2 e B_3, os conjuntos apresentados na Figura 3.1.b, com respeito a A, o conjuntos apresentado na Figura 3.1.a, é 1, uma vez que, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, $2B_i$ não é um invariante de A. Observe que conjuntos unitários têm multiplicidade infinita com respeito a qualquer EE A.

Introduziremos agora uma relação de equivalência sobre uma coleção genérica $\mathcal{X}$ de subconjuntos de $\mathbb{Z}^2$ (isto é, $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$). Sejam X e Y dois elementos de $\mathcal{X}$. Dizemos que X e Y são *equivalentes sob translação* se, e somente se, um pode ser obtido a partir de uma translação do outro, isto é, $X \equiv Y$ se, e somente se, existe $h \in \mathbb{Z}^2$ tal que $X_h = Y$.

Uma vez que a equivalência sob translação é uma relação de equivalência, o conjunto de suas classes de equivalência (isto é, os conjuntos compostos exatamente por todos elementos equivalentes em $\mathcal{X}$) constitui uma partição de $\mathcal{X}$.

Denotaremos por $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$ o conjunto de todas as classes de equivalência (sob translação) em $\mathcal{X}$ (isto é, o conjunto quociente de $\mathcal{X}$). Denotaremos por $\mathcal{R}(\mathcal{X})$ o conjunto composto por exatamente um representante de cada classe de equivalência em $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$, isto é, $\mathcal{R}(\mathcal{X})$ é o conjunto tal que $|\mathcal{R}(\mathcal{X})| = |\mathcal{Q}(\mathcal{X})|$.

O conjunto de todos os subconjuntos do quadrado elementar que têm pelo menos dois pontos é denotado por $\mathcal{E} = \{B \subseteq \{-1,0,1\}^2 : |B| \geq 2\}$. Denotaremos por $\mathsf{SeqQ} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$ a seqüência formada por todos elementos de $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ em uma determinada ordem.

Dado um EE A, o conjunto de todos elementos de $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ (ou equivalentemente, de todos elementos da seqüência SeqQ) que são invariantes de A é denotado por $\mathcal{B}(A) = \{B \in \mathcal{R}(\mathcal{E}) : B \text{ é um invariante de } A\}$. Por exemplo, o conjunto $\mathcal{B}(A)$ para o EE A apresentado na Figura 3.1.a é $\mathcal{B}(A) = \{B_1, B_2, B_3\}$, onde B_1, B_2 e B_3 são os EE's apresentados na Figura 3.1.b.

Dado um EE A, a seqüência composta por todos elementos de $\mathcal{B}(A)$ que é uma subseqüência de $\mathsf{SeqQ} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$ é denotada por $\mathsf{SeqB}[A]$. Por exemplo, considere os EE's apresentados na Figura 3.1.b. Se $[B_1, B_2, B_3]$ é uma subseqüência de SeqQ, então a seqüência $\mathsf{SeqB}[A]$ para o EE A apresentado na Figura 3.1.a é $\mathsf{SeqB}[A] = [B_1, B_2, B_3]$. Neste exemplo, note que $[B_1, B_3, B_2]$ não é uma subseqüência de SeqQ, e portanto $\mathsf{SeqB}[A] \neq [B_1, B_3, B_2]$.

Proposição 4.2 *Sejam A um EE e X um elemento da seqüência* $\mathsf{SeqB}[A]$. *Se n é a multiplicidade de X com respeito a A, então qualquer decomposição de A contém no máximo n elementos iguais a X.*

Prova: Suponha que exista uma decomposição seqüêncial de A que contenha $m > n$ elementos iguais a X, isto é, $A = mX \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k$. Pela Proposição 3.15, mX é um invariante de A. Mas isto contradiz a definição de multiplicidade de A. Logo, qualquer decomposição de A contém no máximo n elementos iguais a X. ■

Seja X um EE e n um inteiro não negativo. Se $n \neq 0$, então a seqüência formada pela sucessão de n conjuntos X é denotada por $\mathsf{Seq}[X, n]$, ou seja, $\mathsf{Seq}[X, n] = [X, X, \cdots, X]$. Se $n = 0$, $\mathsf{Seq}[X, 0]$ denota a seqüência vazia.

Seja A um EE. Seja $\mathsf{SeqB}[A] = [B_1, B_2, \cdots, B_k]$ e seja n_i a multiplicidade de B_i com respeito a A ($i = 1, \cdots, k$). A *seqüência de invariantes* de A é a seqüência $\mathsf{SeqInv}[A] = \mathsf{Seq}[B_1, n_1] \cdot \mathsf{Seq}[B_2, n_2] \cdots \mathsf{Seq}[B_k, n_k]$. Por exemplo, a seqüência $[B_1, B_2, B_3]$ (conjuntos apresentados na Figura 3.1.b) é a seqüência de invariantes do EE A apresentado na Figura 3.1.a, uma vez que, para $i \in \{1, 2, 3\}$, a multiplicidade de cada conjunto B_i é 1.

O teorema seguinte é uma conseqüência imediata das Proposições 4.1 e 4.2.

Teorema 4.3 *Se A é um EE, então A tem uma decomposição seqüêncial se, e somente se, existe uma subseqüência de* $\mathsf{SeqInv}[A]$ *que é uma decomposição de A.*

Prova: ($\Rightarrow$) Seja $[B_1, B_2, \cdots, B_n]$ uma decomposição seqüencial de A. Seja $[D_1, D_2, \cdots, D_k]$ a subseqüência de $[B_1, B_2, \cdots, B_n]$ que é a decomposição de A. Pela Proposição 4.1, cada D_i é um invariante de A, e, uma vez que todo D_i tem pelo menos dois pontos, então, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, existe $X_{r_i} \in \mathsf{SeqB}[A]$ tal que $X_{r_i} \equiv D_i$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $r_i = i$, para $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Claramente, a seqüência $[X_1, X_2, \cdots, X_k]$ é uma decomposição de A.

Por construção de $\mathsf{SeqInv}[A]$, qualquer elemento de $\mathsf{SeqB}[A]$ aparece em $\mathsf{SeqInv}[A]$. Assim, todo elemento distinto da seqüência $[X_1, X_2, \cdots, X_k]$ aparece em $\mathsf{SeqInv}[A]$. Sejam $Y_1, Y_2, \cdots, Y_\ell$ todos elementos distintos de $[X_1, X_2, \cdots, X_k]$ tais que, para todo $j \in \{1, 2, \cdots, \ell - 1\}$, Y_j aparece antes que Y_{j+1} em $\mathsf{SeqInv}[A]$. Para todo $j \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$, seja m_j o número de ocorrências de Y_j em $[X_1, X_2, \cdots, X_k]$. Evidentemente, a seqüência $\mathsf{Seq}[Y_1, m_1] \cdots \mathsf{Seq}[Y_\ell, m_\ell]$ é uma decomposição de A.

Note que cada Y_j em $\mathsf{Seq}[Y_1, m_1] \cdots \mathsf{Seq}[Y_\ell, m_\ell]$ é um elemento de $\mathsf{SeqInv}[A]$ e, para todo $j \in \{1, 2, \cdots, \ell - 1\}$, Y_j aparece antes que Y_{j+1} em $\mathsf{SeqInv}[A]$. Assim, para provar que a seqüência $\mathsf{Seq}[Y_1, m_1] \cdots \mathsf{Seq}[Y_\ell, m_\ell]$ é uma subseqüência de $\mathsf{SeqInv}[A]$, temos que mostrar que $m_j \leq n_j$, onde n_j é o número de ocorrências de Y_j em $\mathsf{SeqInv}[A]$. De fato, pela construção de $\mathsf{SeqInv}[A]$, n_j é a multiplicidade de Y_j com respeito a A, assim, pela Proposição 4.2, qualquer decomposição seqüêncial de A contém no máximo n_j elementos iguais a Y_j, e, portanto, $m_j \leq n_j$.

($\Leftarrow$) Claramente, se existe uma subseqüência de $\mathsf{SeqInv}[A]$ que é uma decomposição de A, então A tem uma decomposição seqüencial. ∎

4.2 Propriedades do Fecho Convexo

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades básicas (Lemas 4.4 a 4.9) do fecho convexo que serão utilizadas nesta tese.

Lema 4.4 *Se $A, B \subseteq \mathbb{Z}^2$, então*

(a) $A \subseteq C(A)$,

(b) $A \subseteq B \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$,

(c) $(C(A))_h = C(A_h)$, *para todo* $h \in \mathbb{Z}^2$.

Prova: Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ o conjunto de todos os semiplanos em $\mathbb{Z}^2$ que contém, respectivamente, A e B.

Uma vez que $C(A)$ é a intersecção de todos os semiplanos que contém A, então, pela propriedade da intersecção dada pela Proposição 2.3.i, $C(A) \subseteq A$. Isto prova (a).

Para provar (b), seja $X \in \mathcal{B}$. Uma vez que $X \supseteq B \supseteq A$, então $X \in \mathcal{A}$. Assim, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}(\bigcap_{Y\in\mathcal{B}} Y) \cap (\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X) = \bigcap_{X\in\mathcal{A}} X \quad &\Leftrightarrow \quad C(B) \cap C(A) = C(A)\\ &\Leftrightarrow \quad C(A) \subseteq C(B) \qquad \text{(pela Proposição 2.3.}c\text{)}\end{aligned}$$

Finalmente, para provar (c), seja $h \in \mathbb{Z}^2$ e seja $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os semiplanos que contêm A_h. Assim, $H \in \mathcal{H} \Leftrightarrow H \supseteq A_h \Leftrightarrow H_{-h} \supseteq A \Leftrightarrow H_{-h} \in \mathcal{A}$. Logo,

$$(C(A))_h = (\bigcap_{H\in\mathcal{A}} H)_h = (\bigcap_{H\in\mathcal{A}} H_h) = (\bigcap_{H_{-h}\in\mathcal{A}} H) = (\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H) = C(A_h).$$

■

Lema 4.5 *Se $A, B \subseteq \mathbb{Z}^2$, então*

(a) $C(A) \cup C(B) \subseteq C(A \cup B)$,

(b) $C(A) \cap C(B) \supseteq C(A \cap B)$.

Prova: Vamos provar (a). Pela Proposição 2.3.b, temos que $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$. Assim, pelo Lema 4.4.b, $C(A) \subseteq C(A \cup B)$ e $C(B) \subseteq C(A \cup B)$. Logo, pela Proposição 2.3.j, $C(A) \cup C(B) \subseteq C(A \cup B)$. De maneira similar pode-se demonstrar a Propriedade (b). ■

Lema 4.6 *Se $A \subseteq \mathbb{Z}^2$, então $C(C(A)) = C(A)$.*

Prova: Por um lado, pelos Lemas 4.4.a e 4.4.b, é fácil ver que $C(A) \subseteq C(C(A))$. Por outro lado, $C(C(A)) \subseteq C(A)$. De fato, seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos semiplanos que contêm A. Logo,

$$\begin{aligned} C(C(A)) &= C(\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X) \\ &\subseteq \bigcap_{X\in\mathcal{A}} C(X) && \text{(pelo Lema 4.5.}b\text{)} \\ &= \bigcap_{X\in\mathcal{A}} X && \text{(uma vez que } C(X) = X, \text{ para todo } X \in \mathcal{A}) \\ &= C(A). \end{aligned}$$

Portanto, $C(C(A)) = C(A)$. ■

Lema 4.7 *Se $A, B \subseteq \mathbb{Z}^2$, então $C(A) \oplus B \subseteq C(A \oplus B)$.*

Prova:

$$
\begin{aligned}
C(A) \oplus B &= \bigcup_{b \in B} (C(A))_b \\
&= \bigcup_{b \in B} C(A_b) && \text{(pelo Lema 4.4.}c\text{)} \\
&\subseteq C(\bigcup_{b \in B} A_b) && \text{(pelo Lema 4.5.}a\text{)} \\
&= C(A \oplus B).
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.8 *Se* $A, B \subseteq \mathbb{Z}^2$*, então* $C(A \oplus C(B)) \subseteq C(A \oplus B)$.

Prova: Pelo Lema 4.7, $A \oplus C(B) = C(B) \oplus A \subseteq C(A \oplus B)$. Pelos Lemas 4.4.$b$ e 4.6, $C(A \oplus C(B)) \subseteq C(C(A \oplus B)) = C(A \oplus B)$. ■

Lema 4.9 *Se* $A, B \subseteq \mathbb{Z}^2$*, então* $C(C(A) \oplus C(B)) = C(A \oplus B)$.

Prova: Primeiro, vamos provar que $C(A \oplus B) \subseteq C(C(A) \oplus C(B))$. Pelo Lema 4.4.$a$, $A \subseteq C(A)$ e $B \subseteq C(B)$. Então, pela Proposição 3.8.g, $A \oplus B \subseteq C(A) \oplus B$ e, pela Proposição 3.8.d, $C(A) \oplus B \subseteq C(A) \oplus C(B)$. Logo, $A \oplus B \subseteq C(A) \oplus C(B)$ e, pelo Lema 4.4.b, $C(A \oplus B) \subseteq C(C(A) \oplus C(B))$.

Finalmente, provaremos que $C(C(A) \oplus C(B)) \subseteq C(A \oplus B)$. Pelo Lema 4.7, $C(A) \oplus C(B) \subseteq C(A \oplus C(B))$. Assim,

$$
\begin{aligned}
C(C(A) \oplus C(B)) &\subseteq C(C(A \oplus C(B))) && \text{(pelo Lema 4.4.}b\text{)} \\
&= C(A \oplus C(B)) && \text{(pelo Lema 4.6)} \\
&\subseteq C(A \oplus B) && \text{(pelo Lema 4.8).}
\end{aligned}
$$

Portanto, $C(C(A) \oplus C(B)) = C(A \oplus B)$. ■

4.3 Algumas Medidas Tomadas sobre um Elemento Estruturante

Nesta seção, definiremos duas medidas (Subseções 4.3.2 e 4.3.3) tomadas sobre EE's que serão utilizadas largamente nesta tese. Para isso, precisamos de algumas definições e resultados apresentados na Subseção 4.3.1. Como aplicação dessas medidas, na Subseção 4.3.4, apresentamos um limite inferior para o comprimento de uma decomposição de um EE.

4.3.1 Lados ou Arestas de um Elemento Estruturante

Sejam $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ os eixos Cartesianos que passam pela origem de $\mathbb{Z}^2$ e que tenham, respectivamente, as inclinações, -90, -45, 0 e 45 graus (veja a Figura 4.1). Para um

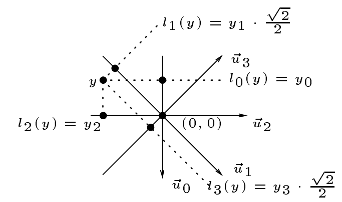

Figura 4.1: Um ponto y e os eixos $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$.

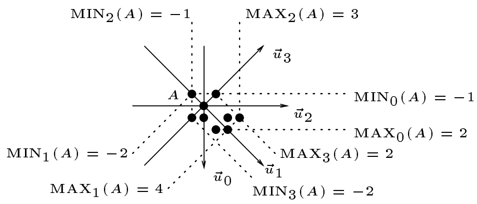

Figura 4.2: Um EE A com os eixos $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$.

dado ponto $x \in \mathbb{Z}^2$, sejam $l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$ e $l_3(x)$ as projeções ortogonais de x sobre os eixos Cartesianos $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$, respectivamente. Observe que estas projeções são números inteiros nas direções de -90 e 0 graus e números reais (proporcionais a $\frac{\sqrt{2}}{2}$) nas direções de -45 e 45 graus. Dado um ponto $x \in \mathbb{Z}^2$, denotaremos por x_0, x_1, x_2 e x_3 as *projeções ortogonais normalizadas* do ponto x sobre os eixos Cartesianos $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$, respectivamente, dadas por $x_0 = l_0(x)$, $x_1 = l_1(x) \cdot \sqrt{2}$, $x_2 = l_2(x)$ e $x_3 = l_3(x) \cdot \sqrt{2}$, respectivamente. Por exemplo, as projeções ortogonais normalizadas do ponto $y = (-5, 2) \in \mathbb{Z}^2$ são $y_0 = -2$, $y_1 = -7$, $y_2 = -5$ e $y_3 = -3$ (veja a Figura 4.1).

Seja A um EE. Para $i = 0, 1, 2, 3$, sejam $\mathrm{MAX}_i(A)$ e $\mathrm{MIN}_i(A)$, respectivamente, as projeções ortogonais normalizadas máxima e mínima sobre o eixo Cartesiano $\vec{u}_i$ dos pontos de A, isto é, $\mathrm{MAX}_i(A) = \max\{x_i : x \in A\}$ e $\mathrm{MIN}_i(A) = \min\{x_i : x \in A\}$. Por exemplo, as projeções ortogonais normalizadas máxima e mínima do EE A apresentado na Figura 4.2 são, respectivamente, $\mathrm{MAX}_0(A) = 2$, $\mathrm{MAX}_1(A) = 4$, $\mathrm{MAX}_2(A) = 3$, $\mathrm{MAX}_3(A) = 2$ e $\mathrm{MIN}_0(A) = -1$, $\mathrm{MIN}_1(A) = -2$, $\mathrm{MIN}_2(A) = -1$, $\mathrm{MIN}_3(A) = -2$.

Os Lemas de 4.10 a 4.12 fornecem algumas propriedades de $\mathrm{MAX}_i(A)$ e $\mathrm{MIN}_i(A)$ de um dado EE A.

Lema 4.10 *Se A e B são EE's, então, para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$,*

$$\mathrm{MAX}_i(A \oplus B) = \mathrm{MAX}_i(A) + \mathrm{MAX}_i(B) \text{ e } \mathrm{MIN}_i(A \oplus B) = \mathrm{MIN}_i(A) + \mathrm{MIN}_i(B).$$

Prova: $\mathrm{MAX}_i(A \oplus B) = \max\{x_i : x \in A \oplus B\} = \max\{a_i + b_i : a \in A, b \in B\} = \max\{a_i : a \in A\} + \max\{b_i : b \in B\} = \mathrm{MAX}_i(A) + \mathrm{MAX}_i(B)$. De maneira similar, podemos demonstrar que $\mathrm{MIN}_i(A \oplus B) = \mathrm{MIN}_i(A) + \mathrm{MIN}_i(B)$. ■

O próximo lema é uma conseqüência imediata do Lema 4.10.

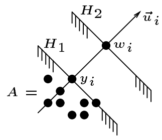

Figura 4.3: Ilustração para a demonstração do Lema 4.12.

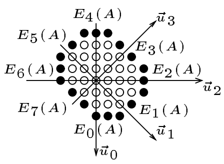

Figura 4.4: Os oito lados de um EE convexo A.

Lema 4.11 *Se X é um EE e h é um ponto em $\mathbb{Z}^2$, então* $\text{MAX}_i(X_h) = \text{MAX}_i(X) + h_i$ *e* $\text{MIN}_i(X_h) = \text{MIN}_i(X) + h_i$.

Prova: Pela Proposição 3.8.b, temos que $X_h = X \oplus \{h\}$. Assim, pelo Lema 4.10, $\text{MAX}_i(X_h) = \text{MAX}_i(X \oplus \{h\}) = \text{MAX}_i(X) + \text{MAX}_i(h) = \text{MAX}_i(X) + h_i$. Analogamente, $\text{MIN}_i(X_h) = \text{MIN}_i(X) + h_i$. ■

Lema 4.12 *Se A é um EE, então, para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$,*

$$\text{MAX}_i(C(A)) = \text{MAX}_i(A) \text{ e } \text{MIN}_i(C(A)) = \text{MIN}_i(A).$$

Prova: Para todo $i = 0, 1, 2, 3$, pela definição de $\text{MAX}_i(A)$, existe $y \in A$ tal que $y_i = \text{MAX}_i(A)$. Por um lado, $\text{MAX}_i(A) \leq \text{MAX}_i(C(A))$, uma vez que, pelo Lema 4.4.a, $A \subseteq C(A)$. Por outro lado, $\text{MAX}_i(A) \geq \text{MAX}_i(C(A))$. De fato, suponha por absurdo que $\text{MAX}_i(A) < \text{MAX}_i(C(A))$. Então, existe $w \in C(A)$ tal que $\text{MAX}_i(A) < w_i$. Sejam $H_1 = \{x \in \mathbb{Z}^2 : x_i \leq \text{MAX}_i(A)\}$ e $H_2 = \{x \in \mathbb{Z}^2 : x_i \leq w_i\}$. Claramente, H_1 e H_2 são dois semiplanos que contém A e $w \notin H_1$ (veja a Figura 4.3). Uma vez que $C(A)$ é a intersecção de todos semiplanos que contém A, então, $w \notin C(A)$. Mas isto contradiz a escolha de $w \in C(A)$. Portanto, $\text{MAX}_i(A) \geq \text{MAX}_i(C(A))$. A prova de que $\text{MIN}_i(C(A)) = \text{MIN}_i(A)$ pode ser feita de uma maneira similar. ■

Seja A um EE. Definimos a seguir os *oito lados* ou *arestas* de A, denotados por $E_0(A), E_1(A), E_2(A), \cdots, E_7(A)$, da seguinte forma. Para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $E_i(A)$ e $E_{i+4}(A)$ são os conjuntos contendo todos pontos de $C(A)$ que têm, respectivamente, a mesma projeção ortogonal normalizada máxima e mínima sobre o eixo $\vec{u}_i$, isto é, $E_i(A) = \{x \in C(A) : x_i = \text{MAX}_i(A)\}$ e $E_{i+4}(A) = \{x \in C(A) : x_i = \text{MIN}_i(A)\}$ (veja a Figura 4.4 para um exemplo). Note que o eixo u_i é perpendicular aos lados $E_i(A)$ e $E_{i+4}(A)$ (veja a Figura 4.4).

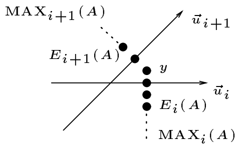

Figura 4.5: Os lados $E_i(A)$ e $E_{i+1}(A)$ de um EE A.

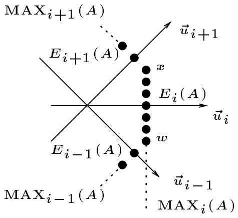

Figura 4.6: Extremidades do lado $E_i(A)$.

Pela construção de $E_i(A)$, $i \in \{0, 1, 2, \cdots, 7\}$, e, pelos Lemas 4.6 e 4.12, é evidente que $E_i(A) = E_i(C(A)) \subseteq C(A)$.

Dado um EE A, o *próximo lado* de $E_i(A)$ é $E_{i+1}(A)$, se $i < 7$, ou $E_0(A)$, se $i = 7$. O *lado anterior* de $E_i(A)$ é $E_{i-1}(A)$, se $i > 0$, ou $E_7(A)$, se $i = 0$. Por exemplo, os próximos lados de $E_1(A)$ e $E_7(A)$ são, respectivamente, $E_2(A)$ e $E_0(A)$; os lados anteriores de $E_5(A)$ e $E_0(A)$ são, respectivamente, $E_4(A)$ e $E_7(A)$. Por simplicidade de notação, denotaremos $E_{i-1}(A)$ e $E_{i+1}(A)$, respectivamente, o próximo lado e o lado anterior de $E_i(A)$.

Lema 4.13 *Se A é um EE, então, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, 7\}$, $|E_i(A) \cap E_{i+1}(A)| = 1$.*

Prova: Suponha que $i = 1$ ou 2 (os outros casos, ou seja, para $i = 0, 3, 4, 5, 6, 7$, podem ser provados de uma maneira similar).

Considere o sistema de coordenadas formado pelos eixos Cartesianos $\vec{u}_i$ e $\vec{u}_{i+1}$ (veja a Figura 4.5). Neste sistema, qualquer ponto $x \in \mathbb{Z}^2$ pode ser unicamente representado por um par ordenado (x_i, x_{i+1}).

Claramente, $E_i(A) \cup E_{i+1}(A)$ é um subconjunto 8$-$conexo de $C(A)$ (veja a Figura 4.5). Assim, pelas definições de $E_i(A)$ e $E_{i+1}(A)$, existe um ponto $y \in E_i(A) \cup E_{i+1}(A)$ tal que $y_i = \mathrm{MAX}_i(A)$ e $y_{i+1} = \mathrm{MAX}_{i+1}(A)$ (veja Figura 4.5). Assim, também pelas definições de $E_i(A)$ e $E_{i+1}(A)$, $y \in E_i(A)$ e $y \in E_{i+1}(A)$. Resta-nos mostrar que este ponto é único. Suponha que existam dois pontos $y, z \in E_i(A) \cap E_{i+1}(A)$. Neste caso, $y_i = z_i$ (uma vez que $y, z \in E_i(A)$) e $y_{i+1} = z_{i+1}$ (uma vez que $y, z \in E_{i+1}(A)$). Assim, $y = (y_i, y_{i+1}) = (z_i, z_{i+1}) = z$ e, portanto, $|E_i(A) \cap E_{i+1}(A)| = 1$. ∎

Dado um EE A, é fácil ver que, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, 7\}$, $E_i(A)$ é uma linha formada por pontos consecutivos de $C(A)$ nas direções com inclinações -90, -45, 0 ou 45 graus.

Assim, cada $E_i(A)$ contém no máximo dois pontos que chamaremos *extremidades* de $E_i(A)$. Mais formalmente, as duas extremidades de $E_i(A)$ são os pontos $x, y \in E_i(A)$ tais que $x \in E_{i+1}(A)$ e $y \in E_{i-1}(A)$. Por exemplo, na Figura 4.6, os pontos x e w são as duas extremidades de $E_i(A)$.

Lema 4.14 *Se A e B são EE's, então, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, 7\}$, $E_i(A \oplus B) = E_i(A) \oplus E_i(B)$.*

Prova: Suponha que $i = 1$ ou 2 (os outros casos, ou seja, para $i = 0, 3, 4, 5, 6, 7$, podem ser demonstrados de uma maneira similar).

Primeiro, vamos provar que $E_i(A) \oplus E_i(B) \subseteq E_i(A \oplus B)$.

Pela definição de $E_i(A \oplus B)$, $x \in E_i(A \oplus B)$ se, e somente se, $x \in C(A \oplus B)$ e $x_i = \mathrm{MAX}_i(A \oplus B)$. Assim, para provar que $E_i(A) \oplus E_i(B) \subseteq E_i(A \oplus B)$, devemos mostrar que, se $x \in E_i(A) \oplus E_i(B)$, então $x \in C(A \oplus B)$ e $x_i = \mathrm{MAX}_i(A \oplus B) = \mathrm{MAX}_i(A) + \mathrm{MAX}_i(B)$ (pelo Lemma 4.10).

Uma vez que $E_i(A) \subseteq C(A)$ e $E_i(B) \subseteq C(B)$, então, pela Proposição 3.8.d, $E_i(A) \oplus E_i(B) \subseteq E_i(A) \oplus C(B) \subseteq C(A) \oplus C(B)$. Assim, pelos Lemas 4.4.a e 4.9, $E_i(A) \oplus E_i(B) \subseteq C(A \oplus B)$. Resta-nos mostrar que $x_i = \mathrm{MAX}_i(A) + \mathrm{MAX}_i(B)$. Pela definição da adição de Minkowski, se $x \in E_i(A) \oplus E_i(B)$, então existem $y \in E_i(A)$ e $z \in E_i(B)$ tais que $x = y + z$. Pela definição de $E_i(A)$, $y \in E_i(A)$ se, e somente se, $y \in C(A)$ e $y_i = \mathrm{MAX}_i(A)$. Analogamente, $z \in E_i(B)$ se, e somente se, $z \in C(B)$ e $z_i = \mathrm{MAX}_i(B)$. Assim, uma vez que $x = y + z$, então $x_i = y_i + z_i = \mathrm{MAX}_i(A) + \mathrm{MAX}_i(B)$. Logo, $E_i(A) \oplus E_i(B) \subseteq E_i(A \oplus B)$.

Agora, provaremos que $E_i(A \oplus B) \subseteq E_i(A) \oplus E_i(B)$.

Por um lado, por definição, os lados $E_i(A)$ e $E_i(B)$ são linhas formadas por pontos consecutivos de $C(A)$ e $C(B)$, respectivamente, em uma mesma direção com inclinação de -45 ou 0 graus (uma vez que $i = 1$ ou 2). Além disso, o eixo Cartesiano u_i é perpendicular a $E_i(A)$ e $E_i(B)$. Então, pela definição da adição de Minkowski, $E_i(A) \oplus E_i(B)$ é uma linha formada por um segmento de pontos consecutivos de $C(A) \oplus C(B)$ na mesma direção que $E_i(A)$ e $E_i(B)$. Assim, o eixo Cartesiano u_i é também perpendicular a $E_i(A) \oplus E_i(B)$.

Por outro lado, por definição, $E_i(A \oplus B)$ é uma linha formada por um segmento consecutivo de pontos de $C(A \oplus B)$ na mesma direção que $E_i(A)$ e $E_i(B)$. Dessa forma, o eixo Cartesiano u_i é também perpendicular a $E_i(A \oplus B)$.

Assim, se as extremidades de $E_i(A \oplus B)$ pertencem a $E_i(A) \oplus E_i(B)$, então, obviamente, $E_i(A \oplus B) \subseteq E_i(A) \oplus E_i(B)$.

Sejam t e z as extremidades de $E_i(A \oplus B)$ tais que $\{t\} = E_{i-1}(A \oplus B) \cap E_i(A \oplus B)$ e $\{z\} = E_i(A \oplus B) \cap E_{i+1}(A \oplus B)$. Vamos mostrar que $z, t \in E_i(A) \oplus E_i(B)$. Para isso, sejam x e y extremidades de, respectivamente, $E_i(A)$ e $E_i(B)$ tais que $\{x\} = E_i(A) \cap E_{i+1}(A)$ e $\{y\} = E_i(B) \cap E_{i+1}(B)$.

$0^2 1^1 2^0 3^2 4^2 5^0 6^2 7^1$ (c)

$\nu(A) = (2, 1, 0, 2, 2, 0, 2, 1)$ (d)

Figura 4.7: (a) Um EE A. (b) O fecho convexo de A. (c) O código de cadeia de $C(A)$. (d) O vetor projeção de A.

No sistema de coordenadas formado pelos eixos Cartesianos $\vec{u}_i$ e $\vec{u}_{i+1}$, temos que $x = (x_i, x_{i+1})$, $y = (y_i, y_{i+1})$ e $z = (z_i, z_{i+1})$.

Uma vez que $x \in E_i(A)$, $y \in E_i(B)$, $z \in E_i(A \oplus B)$ e $i = 1$ ou 2, então, $x_i = \mathrm{MAX}_i(A)$, $y_i = \mathrm{MAX}_i(B)$ e $z_i = \mathrm{MAX}_i(A \oplus B)$. Assim, pelo Lema 4.10, $z_i = \mathrm{MAX}_i(A \oplus B) = \mathrm{MAX}_i(A) + \mathrm{MAX}_i(B) = x_i + y_i$. Analogamente, $z_{i+1} = x_{i+1} + y_{i+1}$. Logo, $z = (z_i, z_{i+1}) = (x_i, x_{i+1}) + (y_i, y_{i+1}) = x + y$.

De maneira similar, se r e s são, respectivamente, extremidades de $E_i(A)$ e $E_i(B)$ tais que $\{r\} = E_{i-1}(A) \cap E_i(A)$ e $\{s\} = E_{i-1}(B) \cap E_i(B)$, então $t = r + s$.

Portanto, uma vez que $E_i(A) \oplus E_i(B) = \{u + v : u \in E_i(A), v \in E_i(B)\}$, então $z = x + y$ e $t = r + s$ pertencem a $E_i(A) \oplus E_i(B)$. ■

Lema 4.15 *Se A e B são EE's, então, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, 7\}$, $|E_i(A \oplus B)| = |E_i(A)| + |E_i(B)| - 1$.*

Prova: Uma vez que $E_i(A)$ e $E_i(B)$ são linhas formadas por segmentos de pontos consecutivos, respectivamente, de $C(A)$ e $C(B)$, ambas com uma mesma direção de inclinação -90, -45, 0 ou 45 graus, então, pela definição da adição de Minkowski, é fácil ver que a cardinalidade de $E_i(A) \oplus E_i(B)$ é igual a $|E_i(A)| + |E_i(B)| - 1$. Portanto, $|E_i(A \oplus B)| = |E_i(A)| + |E_i(B)| - 1$, uma vez que, pelo Lema 4.14, $E_i(A \oplus B) = E_i(A) \oplus E_i(B)$. ■

4.3.2 Vetor Projeção de um Elemento Estruturante

O *vetor projeção* de um dado EE A é o vetor $\nu(A) = (\nu_0(A), \nu_1(A), \cdots, \nu_7(A)) \in \mathbb{Z}^8$ tal que cada uma de suas coordenadas corresponde ao valor $|E_i(A)| - 1$ (veja as Figuras 4.7.a, 4.7.b e 4.7.d) Mais formalmente, o vetor projeção do EE A é $\nu(A) = (\nu_0(A), \nu_1(A), \cdots, \nu_7(A))$, onde $\nu_i(A) = |E_i(A)| - 1$.

Note que o vetor projeção é independente de translação, ou seja, $\nu(A) = \nu(A_h)$, para todo $h \in \mathbb{Z}^2$. Observe também que, para todo EE A, $\nu(A) = \nu(C(A))$, uma vez que, por definição, $E_i(A) = E_i(C(A))$.

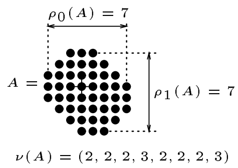

Figura 4.8: O vetor retangular de A.

Kanungo e Haralick [28] estudaram algumas propriedades de decomposição de EE's convexos e 4-conexos, onde usaram um esquema de codificação de borda muito similar com o vetor projeção definido acima.

Sabe-se que o código de cadeia ("chain code") [18][22, p. 484] descreve completamente a forma de um EE convexo. Sem perda de generalidade, assumiremos que o código de cadeia de um EE convexo começa na direção de 0 graus e percorre o EE em sentido anti-horário. Assim, o código de cadeia de um EE convexo pode ser representado por uma seqüência de números entre 0 e 7: $0^{n_0}1^{n_1}\cdots 7^{n_7}$, onde i^{n_i} $(n_i \geq 0)$ é a seqüência de números i definida da seguinte forma: i repete n_i vezes se $n_i > 0$ ou i^{n_i} é uma seqüência vazia se $n_i = 0$. Por exemplo, o código de cadeia do EE apresentado na Figura 4.7.b é mostrado na in Figura 4.7.c. Podemos facilmente ver que o vetor projeção de um dado EE A e o código de cadeia de $C(A)$ são definições equivalentes (veja as Figuras 4.7.c e 4.7.d).

Dado um EE convexo A, um algoritmo $O(|A|)$ para encontrar o código de cadeia de A (ou equivalentemente, o vetor projeção de A) pode ser visto em [36, p. 143].

O próximo resultado fornece uma importante propriedade do vetor projeção de um dado EE. O mesmo resultado para EE's convexos que são 4-conexos pode ser encontrado em [28].

Proposição 4.16 *Sejam A, X e Y EE's. Se $A \equiv X \oplus Y$, então $\nu(A) = \nu(X) + \nu(Y)$.*

Prova: Uma vez que o vetor projeção é independente de translação, então, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, 7\}$,

$$\begin{aligned}
\nu_i(A) &= \nu_i(X \oplus Y) \\
&= |E_i(X \oplus Y)| - 1 \\
&= (|E_i(X)| + |E_i(Y)| - 1) - 1 \qquad \text{(pelo Lema 4.15)} \\
&= (|E_i(X)| - 1) + (|E_i(Y)| - 1) \\
&= \nu_i(X) + \nu_i(Y).
\end{aligned}$$

Portanto, $\nu(A) = \nu(X) + \nu(Y)$. ∎

4.3.3 Vetor Retangular de um Elemento Estruturante

O *vetor retangular* de um EE A é o vetor $\rho(A) = (\rho_0(A), \rho_1(A)) \in \mathbb{Z}^2$ tal que, $\rho_0(A) = \nu_3(A) + \nu_4(A) + \nu_5(A)$ e $\rho_1(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) + \nu_3(A)$. Por exemplo, o vetor retangular do EE A apresentado na Figura 4.8 é $\rho(A) = (7, 7)$. Em outras palavras, as coordenadas do vetor retangular de um EE A são os comprimentos dos lados do menor retângulo que contém A. Note que, para todo subconjunto B do quadrado elementar, $\rho(B) \leq (2, 2)$, isto é, $\rho_0(B) \leq 2$ e $\rho_1(B) \leq 2$.

Uma vez que o vetor projeção é independente de translação, então o vetor retangular também o é, ou seja, para todo $h \in \mathbb{Z}^2$, $\rho(A) = \rho(A_h)$. Uma vez que, para todo EE A, $\nu(A) = \nu(C(A))$, temos que $\rho(A) = \rho(C(A))$.

O próximo resultado é uma conseqüência imediata da definição de vetor retangular e da Proposição 4.16.

Proposição 4.17 *Sejam A, X e Y EE's. Se $A \equiv X \oplus Y$, então $\rho(A) = \rho(X) + \rho(Y)$.*

4.3.4 Limite Inferior de uma Decomposição

O teorema seguinte fornece um limite inferior para o comprimento de uma decomposição de um EE. Um resultado análogo também pode ser encontrado em [49].

Teorema 4.18 *Seja A um EE. Se A tem uma decomposição, então uma decomposição de A contém pelo menos $lower(A) = \lceil \max\{\rho_0(A),\ \rho_1(A)\}/2 \rceil$ elementos.*

Prova: Seja $[B_1, B_2, \cdots, B_m]$ uma decomposição de A. Então, $A \equiv B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m$, e, conseqüentemente, existe $h \in \mathbb{Z}^2$ tal que $A = (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m)_h$. Para todo $i = 1, 2, \cdots, m$, seja S_i o quadrado 3×3 que contém B_i. Claramente, $A \subseteq (S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_m)_h$ e o vetor retangular de $(S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_m)_h$ é $\rho((mS)_h) = \rho(mS) = (2m, 2m)$, onde S é o quadrado elementar.

Logo, uma vez que $A \subseteq (S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_m)_h$, então $\rho_0(A) \leq 2m$ e $\rho_1(A) \leq 2m$. Assim, $\max\{\rho_0(A), \rho_1(A)\} \leq 2m$ e, portanto, $m \geq \lceil \max\{\rho_0(A), \rho_1(A)\}/2 \rceil$. ■

Dado um EE A, o comprimento de uma decomposição ótima A deve ser maior ou igual ao limite inferior estabelecido pelo Teorema 4.18. Claramente, se o comprimento de uma decomposição de A é igual a esse limite inferior, então essa decomposição é ótima. No caso de EE's convexos, mostraremos no capítulo seguinte que esse limite inferior é justo.

4.4 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos algumas propriedades e definições que serão utilizadas nos Capítulos 5, 6 e 7.

Vimos que o problema de encontrar uma decomposição de um EE A é equivalente ao problema de encontrar uma subseqüência de uma seqüência de subconjuntos do quadrado elementar construída a partir de A. Apresentamos também algumas propriedades básicas do fecho convexo e introduzimos duas importantes medidas sobre um EE: o vetor projeção e o vetor retangular. Finalmente, explorando uma propriedade do vetor retangular, estabelecemos um limite inferior para o comprimento de uma decomposição de um EE.