Capítulo 5

Decomposição de Elementos Estruturantes Convexos

Este capítulo apresenta um algoritmo guloso simples para decompor um EE convexo como seqüência de adições de Minkowski de subconjuntos do quadrado elementar. A técnica proposta está baseada em propriedades algébricas e geométricas da adição de Minkowski. Além da simplicidade do algoritmo, a vantagem desta técnica sobre outros algoritmos conhecidos [49, 34] é que o algoritmo proposto gera uma seqüência mínima de subconjuntos não necessariamente convexos, o que significa que a decomposição contém subconjuntos de menor cardinalidade e, conseqüentemente, em comparação com os algoritmos conhecidos que geram somente subconjuntos convexos, obtemos implementações mais eficientes das correspondentes dilatações e erosões.

Na Seção 5.1 descrevemos suscintamente dois algoritmos conhecidos para decompor EE's convexos. Na Seção 5.2, descrevemos resumidamente o método guloso para resolver problemas de Otimização Combinatória; e na Seção 5.3, apresentamos o algoritmo proposto. Resultados experimentais, prova de corretude e análise computacional do algoritmo estão apresentados, respectivamente, nas Seções 5.4, 5.5 e 5.6. Finalmente, na Seção 5.7, apresentamos uma conclusão deste capítulo.

5.1 Algoritmos Clássicos para Decompor Elementos Estruturantes Convexos

Nesta seção serão descritos dois algoritmos clássicos para decompor EE's convexos. Uma restrição forte desses algoritmos é que todos subconjuntos do quadrado elementar que estão na decomposição gerada por esses algoritmos são convexos.

Em 1991, Xu [49] apresentou um algoritmo para decomposição de EE's convexos em termos de um número mínimo de subconjuntos convexos do quadrado elementar. O algoritmo do Xu [49] pode ser dividido em dois principais passos:

Passo 1 : uma decomposição de um EE convexo é encontrada resolvendo-se um sistema de equações lineares com um número fixo de variáveis;

Passo 2 : aplica-se um intricado processo de otimização, subdividido em vários complexos subcasos, para juntar, por adições de Minkowski, os subconjuntos convexos encontrados no Passo 1.

Em 1994, Park e Chin [34] desenvolveram um novo algoritmo mais simples, que é uma extensão do Passo 1 do algoritmo do Xu, para encontrar uma decomposição ótima de EE's convexos. No entanto, o algoritmo deles continua utilizando, como processo de otimização, o Passo 2 do algoritmo do Xu.

Para finalizar esta seção, apresentamos a complexidade de tempo desses algoritmos. Dado um EE convexo A, a complexidade de tempo de cada um desses dois algoritmos é $O(n^2)$, onde $n = \max\{\rho_0(A), \rho_1(A)\}$. Veremos, neste capítulo, que a complexidade de tempo do algoritmo guloso proposto é $O(n^3)$. A vantagem de nosso algoritmo em relação a estes algoritmos é que ele é simples e a decomposição ótima encontrada por ele pode conter subconjuntos do quadrado elementar que não sejam convexos.

5.2 Método Guloso

Para alguns problemas de Otimização Combinatória é possível aplicar uma estratégia gulosa [15, p. 329][4, p. 157] para se obter uma solução ótima. O *método guloso* consiste em encontrar uma seqüência de soluções parciais (que são máximos ou mínimos locais do problema) que nos levam a uma solução ótima do problema (ou seja, a um máximo ou mínimo global do problema). Por exemplo, se o problema é maximizar uma dada função e é conhecido que uma solução parcial cujo valor digamos seja 25, e este valor pode crescer para 30, 28 ou 45, então a solução de valor 45 é a próxima solução parcial.

Quando um problema de Otimização Combinatória pode ser resolvido por uma estratégia gulosa, o correspondente algoritmo é chamado de *algoritmo guloso* e, normalmente, eles são bastante simples. No entanto, na maioria dos casos, provar a corretude desses algoritmos pode ser uma tarefa não muito trivial.

5.3 Decomposição Ótima de Elementos Estruturantes Convexos

Esta seção apresenta o algoritmo guloso proposto para a decomposição de EE's convexos (veja a Subseção 5.3.2). Mas antes, introduziremos na Subseção 5.3.1, algumas propriedades necessárias para a apresentação do algoritmo. Para isto, faremos uso de algumas propriedades já vistas nos Capítulos 3 e 4.

5.3.1 Propriedades Necessárias para o Algoritmo

A seguinte proposição [49] afirma que todo EE convexo tem uma decomposição seqüencial.

Proposição 5.1 *Se A é um EE convexo, então A tem uma decomposição seqüencial.*

Como uma conseqüência da Proposição 3.15, temos que a relação de invariança é transitiva.

Proposição 5.2 *Sejam X, Y e Z EE's. Se X é invariante de Y e Y é invariante de Z, então X é um invariante de Z.*

Prova: Uma vez que X é invariante de Y e Y é invariante de Z, então $Y = (Y \ominus X) \oplus X$ e $Z = (Z \ominus Y) \oplus Y = (Z \ominus Y) \oplus ((Y \ominus X) \oplus X) = ((Z \ominus Y) \oplus (Y \ominus X)) \oplus X$. Assim, pela Proposição 3.15, X é um invariante de Z. ■

Como uma conseqüência das Proposições 3.14 e 4.16, temos o seguinte corolário.

Corolário 5.3 *Sejam A e X dois EE's. Se existe um $i \in \{0, 1, \cdots, 7\}$ tal que $\nu_i(A) < \nu_i(X)$, então X não é um invariante de A.*

Prova: Suponha por absurdo que X é um invariante de A. Assim, pela Proposição 3.14, existe um EE Y tal que $A = Y \oplus X$. Dessa forma, pela Proposição 4.16, $\nu(A) = \nu(Y) + \nu(X)$ e, portanto, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, 7\}$, $\nu_i(A) \geq \nu_i(X)$. Mas isto é uma contradição, pois por hipótese, existe $i \in \{0, 1, \cdots, 7\}$ tal que $\nu_i(A) < \nu_i(X)$. Portanto, X não é um invariante de A. ■

Note que o Corolário 5.3 fornece somente uma condição necessária para verificar se um EE X é um invariante de A. Assim, o fato de que $\nu_i(A) \geq \nu_i(X)$, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, 7\}$, não implica que X é um invariante de A.

5.3.2 Apresentação do Algoritmo Proposto

O algoritmo proposto, chamado de DecCon, está baseado em uma simples idéia que apresentamos a seguir. A seqüência $\mathsf{SeqQ} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$ (veja sua definição na página 43), mencionada no Passo `01` do algoritmo, pode ser construída antes de rodar DecCon. No início de cada iteração, temos uma solução parcial $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ e um conjunto

$Y_j = A \ominus C_1 \ominus C_2 \ominus \cdots \ominus C_j$ (primeira iteração: Passos 02 e 03; próximas iterações: Passos 11 e 12). Se $\rho(Y_j) = (0,0)$, então o algoritmo pára e $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é a decomposição ótima de A (Passos 05 e 15). Caso contrário, um elemento B_i de SeqQ é selecionado. Se B_i não é um invariante de Y_j (Passos 06 e 08), então o algoritmo seleciona o próximo elemento B_{i+1} de SeqQ e uma nova iteração começa (Passos 07, 09 e 05). Caso contrário, B_i é usado para se obter uma nova solução parcial $\mathsf{S}_{j+1}(A) = \mathsf{S}_j(A) \cdot [B_i]$ (Passo 11) e um novo conjunto $Y_{j+1} = Y_j \ominus B_i$ (Passo 12) e, em seguida, uma nova interação é iniciada (Passo 05).

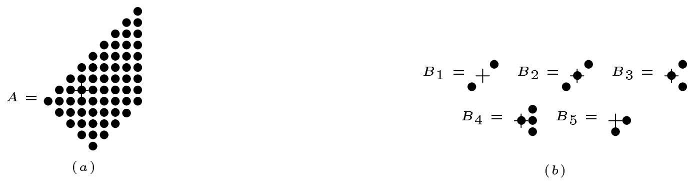
Algoritmo DecCon:

Entrada: Um EE convexo A tal que $|A| \geq 2$.

Saída: Uma decomposição ótima de A.

01: Seja $\mathsf{SeqQ} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$.
02: $\mathsf{S}_0(A) \leftarrow [\ ]$ /* seqüência vazia */
03: $Y_0 \leftarrow A$
04: $i \leftarrow 1$; $j \leftarrow 0$
05: **se** $\rho(Y_j) = (0,0)$ **então** vá para o Passo 15
06: **se** existe $k \in \{0, 1, \cdots, 7\}$ tal que $\nu_k(Y_j) < \nu_k(B_i)$ **então**
07: $i \leftarrow i + 1$ e vá para o Passo 05 /* pelo Corolário 5.3, B_i não é um invariante de Y_j */
08: **se** B_i não é um invariante de Y_j **então**
09: $i \leftarrow i + 1$ e vá para o Passo 05
10: /* B_i é um invariante de Y_j */
11: $\mathsf{S}_{j+1}(A) \leftarrow \mathsf{S}_j(A) \cdot [B_i]$
12: $Y_{j+1} \leftarrow Y_j \ominus B_i$
13: $j \leftarrow j + 1$
14: vá para o Passo 05
15: Devolva a seqüência $\mathsf{S}_j(A)$.

Dependendo da ordem escolhida para construir a seqüência $\mathsf{SeqQ} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$, diferentes decomposições podem ser obtidas pelo algoritmo DecCon. Nós ordenamos os elementos da seqüência SeqQ em ordem decrescente segundo a soma das coordenadas dos vetores retangulares de cada elemento em SeqQ, isto é, $\rho_0(B_1) + \rho_1(B_1) \geq \rho_0(B_2) + \rho_1(B_2) \geq \cdots \geq \rho_0(B_n) + \rho_1(B_n)$, e, ao mesmo tempo, se $\rho_0(B_i) + \rho_1(B_i) = \rho_0(B_j) + \rho_1(B_j)$, e $|B_i| \leq |B_j|$, então B_i aparece antes de B_j em SeqQ. Por exemplo, na Figura 5.1.b apresentamos os invariantes do EE A (apresentado na Figura 5.1.a) segundo a ordem



$[B_1, B_2, B_3, B_3, B_3, B_4]$
(c)

$[B_2, B_2, B_4, B_4, B_4, B_4]$
(d)

Figura 5.1: (*a*) Um EE A. (*b*) Elementos de $\mathcal{B}(A)$. (*c*) Saída do algoritmo DecCon. (*d*) Saída do algoritmo do Xu.

escolhida para construir SeqQ. Nesta figura, observe que $\rho_0(B_1) + \rho_1(B_1) = \rho_0(B_2) + \rho_1(B_2) > \rho_0(B_3) + \rho_1(B_3) = \rho_0(B_4) + \rho_1(B_4) > \rho_0(B_5) + \rho_1(B_5)$, $|B_1| \leq |B_2|$ e $|B_3| \leq |B_4|$.

Segundo esta ordenação, a cada iteração, o algoritmo DecCon escolhe o EE em SeqQ cuja a soma de coordenadas do seu vetor retangular é a maior possível (e no caso dessa soma ser igual, então escolhe-se o EE de cardinalidade menor possível) para colocar na solução parcial. Esta escolha caracteriza a estratégia gulosa do algoritmo. Além disso, o algoritmo DecCon prefere escolher EE's não convexos em vez de EE's convexos para a decomposição de A, uma vez que EE's não convexos têm menos pontos do que os convexos. Assim, como a complexidade de tempo dos algoritmos que implementam erosões e dilatações dependem do número de pontos dos EE's que o caracterizam, então o algoritmo DecCon tem uma grande vantagem em relação ao algoritmo desenvolvido por Xu, uma vez que, pelo algoritmo do Xu, todos os elementos encontrados são subconjuntos convexos do quadrado elementar [49].

Por exemplo, nas Figuras 5.1.*c* e 5.1.*d* estão apresentados, respectivamente, as saídas do algoritmo proposto e do algoritmo do Xu. Neste particular exemplo, a diferença é somente de quatro pontos, mas para EE's maiores, esta diferença pode ser considerável (veja a Seção 5.4).

Na Figura 5.2, mostramos uma simples aplicação do algoritmo DecCon para encontrar uma decomposição do EE convexo A (apresentado na Figura 5.2.*a*). A Figura 5.2.*b* apresenta os invariantes de A que são subconjuntos do quadrado elementar. O vetor projeção, o vetor retangular e o limite inferior de A são mostrados na Figura 5.2.*c*. A Figura 5.2.*d* apresenta a seqüência vazia $S_0(A)$ e o conjunto $Y_0 = A$ que são inicializados, respectivamente, nos Passos 02 e 03. O primeiro invariante de Y_0 em SeqQ (esta seqüência é previamente construída antes de rodar o algoritmo) é B_1. A Figura 5.2.*e* apresenta o conjunto $Y_1 = Y_0 \ominus B_1$ (construído no Passo 12), e a solução parcial $S_1(A) = [B_1]$ (construída no Passo 11). De uma maneira similar, a Figura 5.2.*f* apresenta o conjunto $Y_2 = Y_1 \ominus B_2$ (construído no Passo 12), onde B_2 é o próximo elemento da seqüência SeqQ que é invariante de Y_1, e a solução parcial $S_2(A) = [B_1, B_2]$ (construída no Passo 11). As Figuras 5.2.*g*, 5.2.*h* and 5.2.*i* apresentam os conjuntos $Y_3 = Y_2 \ominus B_3$, $Y_4 = Y_3 \ominus B_3$ e $Y_5 = Y_4 \ominus B_3$ (construídos no Passo 12), onde B_3 é o próximo elemento da seqüência SeqQ que é invariante de Y_3, Y_4 e Y_5; e as soluções parciais $S_3(A)$, $S_4(A)$ e $S_5(A)$ (cons-

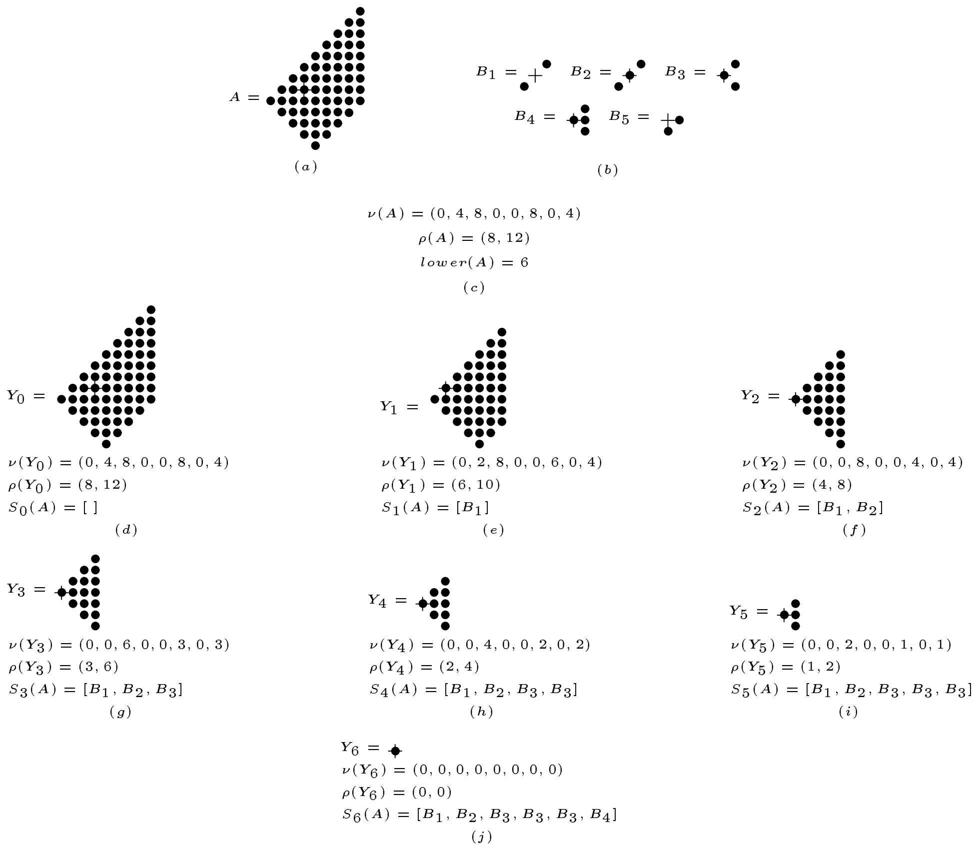


Figura 5.2: Aplicação do algoritmo DecCon para um exemplo simples.

truídas no Passo 11). Na Figura 5.2.j, a solução parcial $S_6(A)$ e o conjunto $Y_6 = Y_5 \ominus B_4$ são construídos nos Passos 11 e 12, respectivamente, uma vez que B_4 é o próximo elemento na seqüência SeqQ que é invariante de Y_5. Além disso, uma vez que Y_6 é um conjunto unitário, então $\rho(Y_6) = (0, 0)$, e, conseqüentemente, o algoritmo pára. Como $A \equiv B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_3 \oplus B_3 \oplus B_4$, então $S_6(A)$ é uma decomposição ótima do EE convexo A, uma vez que $lower(A) = 6$. Vale a pena observar aqui que a solução $S_6(A)$ é uma subseqüência de SeqInv$[A] = [B_1, B_2, B_2, B_3, B_3, B_3, B_4, B_4, B_4, B_4, B_5, B_5]$.

5.4 Resultados Experimentais

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados experimentais da aplicação do algoritmo do Xu e do algoritmo proposto e compararemos o desempenho desses algoritmos para encontrar decomposições ótimas de EE's convexos.

Estes experimentos foram executados usando uma máquina com processador Pentium III, 450MHz. O tempo de processamento da CPU foi medido em segundos (s).

	Tempo Médio para encontrar uma solução ótima		Número médio de pontos na solução ótima	
Subconjuntos do retângulo	Algoritmo do Xu	Algoritmo DecCon	Algoritmo do Xu	Algoritmo DecCon
20×21	0.22s	0.23s	58	32
38×40	0.23s	0.27s	114	57
56×57	0.23s	0.26s	176	84
73×73	0.26s	0.28s	234	110
89×89	0.28s	0.28s	297	137
109×108	0.25s	0.33s	358	164
124×124	0.32s	0.54s	420	191
141×144	0.29s	0.42s	476	216
160×162	0.31s	0.47s	539	244
176×179	0.35s	0.56s	611	275
192×193	0.37s	0.63s	661	297
214×210	0.41s	0.75s	729	326
229×227	0.45s	0.86s	786	352
246×247	0.48s	0.97s	844	377

Tabela 5.1: Tempo médio para encontrar uma decomposição ótima e a média do número de pontos nesta decomposição.

Nós aplicamos o algoritmo do Xu e o algoritmo DecCon para encontrar uma decomposição ótima de aproximadamente 700 EE's convexos. Estes EE's foram gerados aleatoriamente.

Na Seção 5.6, provaremos que, dado um EE convexo A, a complexidade de tempo de DecCon e do algoritmo do Xu para encontrar uma decomposição ótima são, respectivamente, $O(n^3)$ e $O(n^2)$, onde n é o valor máximo entre as duas coordenadas do vetor retangular de A, ou seja, $n = \max\{\rho_0(A), \rho_1(A)\}$. Assim, na Tabela 5.1, nas colunas $2-3$, podemos ver que o tempo médio para o algoritmo do Xu encontrar uma solução ótima é melhor do que o algoritmo DecCon.

Seja A um EE. Seja $\mathsf{S} = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ uma decomposição de A. Denotaremos por $\sigma(\mathsf{S})$ a soma da cardinalidade de todos elementos na seqüência S, isto é, $\sigma(\mathsf{S}) = |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_j|$.

Dado um EE convexo A, denotamos $\mathsf{Decomp}(A)$ e $\mathsf{Xu}(A)$ a decomposição de A encontrada, respectivamente, por DecCon e pelo algoritmo do Xu.

Seja $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ uma coleção de EE's convexos. Definimos o número médio de pontos na solução ótima encontrada por DecCon e pelo algoritmo do Xu, respectivamente, como $\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m} \sigma(\mathsf{Decomp}(A_i))\right)}{m}$ e $\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m} \sigma(\mathsf{Xu}(A_i))\right)}{m}$.

O número médio de pontos na solução ótima encontrada por DecCon é menor do que a obtida pelo algoritmo do Xu (colunas $4-5$ da Tabela 5.1). Conseqüentemente, a complexidade computacional para aplicar dilatações ou erosões usando as soluções dadas por DecCon são melhores que as soluções encontradas pelo algoritmo do Xu.

Para finalizar esta seção, observamos que um próximo passo deste trabalho pode ser fazer uma versão simplificada do algoritmo DecCon colocando-se na seqüência SeqQ somente os elementos de SeqQ que são subconjuntos convexos do quadrado elementar. Com isto, de acordo com uma propriedade de subconjuntos convexos [34, Proposição 3.3, p. 306], o teste do Passo 08 pode ser simplicado e executado em tempo $O(1)$. Além disso, não seria necessário construir os conjuntos Y_j (ou seja, o Passo 12 seria desconsiderado). Dessa forma, com esta simplificação, o algoritmo teria mesma complexidade do algoritmo do Xu.

5.5 Corretude do Algoritmo

Nesta seção, provaremos a corretude do algoritmo. Embora o algoritmo DecCon seja simples, sua prova de corretude não é intuitiva. Dividiremos esta seção em três partes. Na primeira, apresentaremos algumas propriedades do fecho convexo necessárias para a prova da corretude do algoritmo. Na segunda parte, provaremos que, dado um EE convexo A, a saída do algoritmo é uma decomposição de A. Finalmente, na última parte, mostraremos que esta decomposição encontrada é otima.

5.5.1 Propriedades do Fecho Convexo para Elementos Estruturantes Convexos

Esta subseção fornece algumas propriedades do fecho convexo que serão utilizadas para a prova de corretudo do algoritmo.

Lema 5.4 *Seja A um EE convexo. Se X e Y são EE's tais que $X \oplus Y = A$, então $C(X) \oplus Y = A$.*

Prova: Por um lado, $A \subseteq C(X) \oplus Y$, uma vez que, pelo Lema 4.4.a, $X \subseteq C(X)$ e, pela Proposição 3.8.g, $X \oplus Y \subseteq C(X) \oplus Y$. Por outro lado, $C(X) \oplus Y \subseteq A$, uma vez que, pelo Lema 4.7, $C(X) \oplus Y \subseteq C(X \oplus Y) = C(A) = A$. Portanto, $C(X) \oplus Y = A$. ∎

O próximo resultado é uma conseqüência imediata do Lema 5.4 e das Proposições 3.14 e 3.15.

Lema 5.5 *Seja A um EE convexo. Se X é um invariante de A, então $C(X)$ também é um invariante de A.*

Prova: Como X é um invariante de A, então, pela Proposição 3.14, existe um EE $Y \in \mathbb{Z}^2$ tal que $X \oplus Y = A$. Pelo Lema 5.4, $C(X) \oplus Y = A$. E, pela Proposição 3.15, $C(X)$ é um invariante de A. ∎

Lema 5.6 *Seja A um EE convexo. Se X é um invariante de A, então $A \ominus X$ é um EE convexo.*

Prova: Dividimos a prova deste lema em duas partes. Por um lado, pelo Lema 4.4.a, $A \ominus X \subseteq C(A \ominus X)$. Por outro lado, $C(A \ominus X) \subseteq A \ominus X$. De fato, uma vez que X é um invariante de A, $(A \ominus X) \oplus X = A$ e, pelo Lema 5.4, $C(A \ominus X) \oplus X = A$. Assim, pela relação de adjunção, dada pela Proposição 3.11, $C(A \ominus X) \subseteq A \ominus X$.

Logo, $C(A \ominus X) = A \ominus X$ e, portanto, $A \ominus X$ é um EE convexo. ∎

5.5.2 A Saída do Algoritmo é uma Decomposição

Nesta subseção, provaremos que, dado um EE convexo A, a saída do algoritmo DecCon é uma decomposição de A. Para isso, precisamos estudar algumas propriedades do algoritmo proposto.

A cada iteração, um EE Y_j é construído pelo algoritmo. Quando Y_j é o EE considerado em uma iteração do algoritmo, $\mathsf{S}_j(A) = [\ ]$ (seqüência vazia) , se $j = 0$; ou $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$, se $j > 0$, é a *solução parcial atual* de A, ou simplesmente, *solução parcial* de A.

Para provar que a saída do algoritmo $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é uma decomposição de um dado EE A, devemos mostrar que $C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_j \equiv A$. Dados dois EE's A e Y, a proposição seguinte nos fornece uma definição equivalente para $A \equiv Y$.

Proposição 5.7 *Sejam A e Y dois EE's. Então $Y \equiv A$ se, e somente se, Y é invariante de A e $\rho(Y) = \rho(A)$.*

Prova: ($\Rightarrow$) Se $Y \equiv A$, então, existe $h \in \mathbb{Z}^2$ tal que $A = Y_h = Y \oplus \{h\}$. Logo, pela Proposição 3.15, Y é invariante de A. Uma vez que $\rho(Y_h) = \rho(Y)$, então, $\rho(Y) = \rho(A)$.

($\Leftarrow$) Uma vez que Y é invariante de A, pela Proposição 3.14, existe um EE X tal que $A = X \oplus Y$. Pela Proposição 4.17, $\rho(A) = \rho(X) + \rho(Y)$. Uma vez que $\rho(A) = \rho(Y)$, então $\rho(X) = (0, 0)$ e, portanto, $|X| = 1$. Seja $h \in \mathbb{Z}^2$ tal que $X = \{h\}$. Neste caso, a adição de Minkowski $X \oplus Y = A$ é uma translação do conjunto Y por h. Logo, $Y \equiv A$. ∎

Agora, vamos introduzir duas definições. Seja $\mathsf{SeqQ} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$ e seja A um EE convexo. Quando Y_j é o EE considerado pelo algoritmo, ou seja, Y_j é o EE considerado em uma dada iteração do algoritmo, chamamos de *seqüência decrescente atual* de A, ou simplesmente, *seqüência decrescente* de A, a seqüência formada por todos EE's Y_i gerados pelo algoritmo (nos Passos 03 e 12) até Y_j (inclusive), ou seja, a seqüência $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$. Se $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é a solução parcial, chamamos de *seqüência restante* de Y_j a seqüência $\mathsf{Restante}[Y_j] = \mathsf{SeqQ}$, se $j = 0$; ou $\mathsf{Restante}[Y_j] = [C_j = B_i, B_{i+1}, \cdots, B_n]$, se

$j > 0$, onde $B_i, B_{i+1}, \cdots, B_n \in \mathsf{SeqQ}$. Observe que, pela definição de $\mathsf{Restante}[Y_j]$, $B_i = C_j$ é o elemento de SeqQ usado para construir Y_j (no Passo 12).

Assim, pelas definições dadas acima, dado um EE convexo A, podemos ver claramente que, se $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ são, respectivamente, a seqüência decrescente atual de A e a solução parcial atual, então pela construção do algoritmo (Passos 10 e 11), para cada $i \in \{1, 2, \cdots, j\}$, C_i é um invariante de Y_{i-1}, e, além disso, C_i é utilizado para construir Y_i, isto é, $Y_i = Y_{i-1} \ominus C_i$. Se $\rho(Y_j) \neq (0,0)$, então o próximo elemento C_{j+1} para gerar a nova solução parcial $\mathsf{S}_{j+1}(A) \leftarrow \mathsf{S}_j(A) \cdot [C_{j+1}]$ (no Passo 11) é um elemento de $\mathsf{Restante}[Y_j]$. Seja B_r o elemento de $\mathsf{Restante}[Y_j]$ tal que $B_r = C_{j+1}$. Pela construção do algoritmo, B_r é o primeiro elemento de $\mathsf{Restante}[Y_j]$ tal que B_r é um invariante de Y_j, ou seja, $\mathsf{Restante}[Y_j] = [C_j = B_i, B_{i+1}, \cdots, B_{r-1}, C_{j+1} = B_r, B_{r+1} \cdots, B_n]$ e todos elementos na seqüência $[B_i, B_{i+1}, \cdots, B_{r-1}]$ não são invariantes de Y_j.

Dado um EE convexo A, para provar a corretude do algoritmo proposto, temos que mostrar que as seguintes duas afirmações são válidas.

(1) Se $\rho(Y_j) = (0,0)$, então $A \equiv C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_j$, onde $[C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é a saída do algoritmo;

(2) Existe um elemento B em $\mathsf{Restante}[Y_j]$ tal que B é um invariante de Y_j se, e somente se, $\rho(Y_j) \neq (0,0)$.

Note que a Afirmação (1) guarante que quando $\rho(Y_j) = (0,0)$, a saída do algoritmo é uma decomposição, enquanto a Afirmação (2) guarante que, se existe um elemento B em $\mathsf{Restante}[Y_j]$ tal que B é um invariante de Y_j, então $\rho(Y_j) \neq (0,0)$. Assim, neste caso, a condição no Passo 05 não é satisfeita e, conseqüentemente, a próxima iteração do algoritmo é sempre possível. Além disso, a Afirmação (2) também guarante que se todos elementos em $\mathsf{Restante}[Y_j]$ não são invariantes de Y_j, então $\rho(Y_j) = (0,0)$ e, portanto, o algoritmo pára.

Para provar as Afirmações (1) e (2), vamos introduzir mais uma definição. Dado um EE convexo A. Se $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é a solução parcial atual, chamamos de *seqüência crescente atual* de A, ou simplesmente, *seqüência crescente* de A, a seqüência $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$, onde $X_0 = \{o\}$ (isto é, o conjunto unitário que contém a origem) e $X_i = X_{i-1} \oplus C_i$, para $1 \leq i \leq j$. Assim, para provar a Afirmação (1), temos que mostrar que, se $\rho(Y_j) = (0,0)$, então $X_j \equiv A$, uma vez que $X_j = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_j$.

5.5.2.1 Prova da Afirmação (1)

Seja A um EE convexo. Sejam $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$, respectivamente, as seqüências decrescente e crescente de A. Os seguintes resultados (Lemas 5.8, 5.9 e 5.10) fornecem algumas propriedades para provar a Afirmação (1). O Lema 5.8 mostra que $A = Y_j \oplus X_j$. O Lema 5.9, que é uma conseqüência da Proposição 3.15 e do Lema 5.8, mostra que X_j é um invariante de A. O Lema 5.10 motra que se $\rho(Y_j) = (0,0)$, então $\rho(X_j) = \rho(A)$. Finalmente, usando os resultados dos Lemas 5.9 e 5.10, a Proposição 5.11 prova a Afirmação (1) mostrando que se $\rho(Y_j) = (0,0)$, então $X_j \equiv A$.

Lema 5.8 *Seja A um EE convexo. Se $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ são, respectivamente, as seqüências decrescente e crescente atuais de A, então $A = Y_j \oplus X_j$ e $Y_j = A \ominus X_j$.*

Prova: Provaremos este lema por indução em j. Quando $j = 0$, é óbvio que $A = Y_0 \oplus X_0$ e $Y_0 = A \ominus X_0$, uma vez que $Y_0 = A$ e $X_0 = \{o\}$. Se $j > 0$, suponha, por hipótese de indução, que este lema é verdadeiro para $j-1$, ou seja, $A = Y_{j-1} \oplus X_{j-1}$ e $Y_{j-1} = A \ominus X_{j-1}$. Provaremos que $A = Y_j \oplus X_j$ e $Y_j = A \ominus X_j$.

Se $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é a solução parcial atual, então C_j é um invariante de Y_{j-1}, $Y_j = Y_{j-1} \ominus C_j$ e $X_j = X_{j-1} \oplus C_j$.

Assim, a prova para a primeira igualdade é dada da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
A &= Y_{j-1} \oplus X_{j-1} && \text{(por hipótese de indução)} \\
&= ((Y_{j-1} \ominus C_j) \oplus C_j) \oplus X_{j-1} && \text{(uma vez que } C_j \text{ é invariante de } Y_{j-1}\text{)} \\
&= (Y_{j-1} \ominus C_j) \oplus (X_{j-1} \oplus C_j) && \text{(pela comutatividade e associatividade} \\
& && \text{da adição de Minkowski)} \\
&= Y_j \oplus X_j.
\end{aligned}$$

E, para a segunda igualdade,

$$\begin{aligned}
Y_j &= Y_{j-1} \ominus C_j \\
&= (A \ominus X_{j-1}) \ominus C_j && \text{(por hipótese de indução)} \\
&= A \ominus (X_{j-1} \oplus C_j) && \text{(pela Proposição 3.9.} f\text{)} \\
&= A \ominus X_j.
\end{aligned}$$

■

O próximo resultado é uma conseqüência da Proposição 3.15 e do Lema 5.8.

Lema 5.9 *Seja A um EE convexo. Se $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ são, respectivamente, as seqüências decrescente e crescente atuais de A, então Y_j e X_j são invariantes de A.*

Como conseqüência do Lema 5.9, o último EE X_j em qualquer seqüência crescente de A é um invariante de A. Assim, em particular, quando $\rho(Y_j) = (0,0)$, X_j é um invariante de A. Um passo intermediário para provar a Afirmação (1) é mostrar que, se $\rho(Y_j) = (0,0)$, então $\rho(X_j) = \rho(A)$.

Lema 5.10 *Seja A um EE convexo. Sejam $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$, respectivamente, as seqüências decrescente e crescente atuais de A. Se $\rho(Y_j) = (0,0)$, então $\rho(X_j) = \rho(A)$.*

Prova: Pelo Lema 5.8, $A = Y_j \oplus X_j$. Assim, pela Proposição 4.17, $\rho(A) = \rho(Y_j) + \rho(X_j)$. Logo, $\rho(X_j) = \rho(A)$, uma vez que $\rho(Y_j) = (0,0)$. ∎

Finalmente, a Proposição 5.11 prova a Afirmação (1).

Proposição 5.11 *Seja A um EE convexo. Sejam $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ as seqüências decrescente e crescente atuais de A. Se $\rho(Y_j) = (0,0)$, então $X_j \equiv A$.*

Prova: Pelo Lema 5.9, X_j é um invariante de A. Uma vez que $\rho(Y_j) = (0,0)$, então, pelo Lema 5.10, $\rho(X_j) = \rho(A)$. Assim, pela Proposição 5.7, $X_j \equiv A$. ∎

5.5.2.2 Prova da Afirmação (2)

Dizemos que as seqüências decrescente e crescente de A, $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $[X_0, X_1 \cdots, X_j]$, são *maximais* se, e somente se, não existe um elemento B em $\mathsf{Restante}[Y_j]$ tal que B é um invariante de Y_j. Obviamente, a seqüência decrescente atual $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ é maximal se, e somente se, a seqüência crescente atual $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ é maximal.

Dado um EE convexo A, para mostrar a corretude do algoritmo, falta provarmos a Afirmação (2), ou seja, temos que mostrar que $\rho(Y_j) \neq (0,0)$ se, e somente se, a seqüência decrescente (equivalentemente, crescente) atual de A não é maximal. Mas antes disso, precisamos do seguinte resultado.

Lema 5.12 *Seja A um EE convexo. Seja $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ a seqüência decrescente atual de A. Seja B um elemento da seqüência* $\mathsf{SeqQ} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$. *Se B é um invariante de Y_j, então B é um elemento de* $\mathsf{Restante}[Y_j]$.

Prova: Provaremos este lema por indução em j. Se $j = 0$, uma vez que $\mathsf{Restante}[Y_0] = \mathsf{SeqQ}$ e $B \in \mathsf{SeqQ}$, então B é um elemento de $\mathsf{Restante}[Y_0]$. Caso $j > 0$, suponha, por hipótese de indução, que este lema vale para $j - 1$, isto é, B é um elemento de $\mathsf{Restante}[Y_{j-1}]$. Provaremos que $B \in \mathsf{Restante}[Y_j]$.

Se $\mathsf{Restante}[Y_j] = [B_i, B_{i+1}, \cdots, B_n]$, então B_i é o EE de SeqQ usado pelo algoritmo para construir Y_j, ou seja, $Y_j = Y_{j-1} \ominus B_i$. Assim, $C_j = B_i$. Similarmente, se $\mathsf{Restante}[Y_{j-1}] = [B_k, B_{k+1}, \cdots, B_n]$, então $B_k \in \mathsf{SeqQ}$ e $C_{j-1} = B_k$. Pela construção do algoritmo, C_j é o primeiro elemento de $\mathsf{Restante}[Y_{j-1}]$ tal que C_j é um invariante de Y_j, ou seja, $\mathsf{Restante}[Y_{j-1}] = [B_k, B_{k+1}, \cdots, B_{i-1}, B_i, B_{i+1}, \cdots, B_n] = [B_k, B_{k+1}, \cdots, B_{i-1}] \cdot \mathsf{Restante}[Y_j]$ e nenhum elemento na seqüência $[B_k, B_{k+1}, \cdots, B_{i-1}]$ é um invariante de Y_j.

Uma vez que B é um invariante de Y_j e, por hipótese de indução, $B \in \mathsf{Restante}[Y_{j-1}]$, então, claramente, B é um elemento de $\mathsf{Restante}[Y_j]$. ■

Finalmente, o próximo resultado prova a Afirmação (2).

Proposição 5.13 *Seja A um EE convexo. A seqüência decrescente atual de A, digamos $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$, é maximal se, e somente se, $\rho(Y_j) = (0,0)$.*

Prova: ($\Leftarrow$) Suponha por absurdo que a seqüência decrescente atual de A não seja maximal. Seja B um elemento de $\mathsf{Restante}[Y_j]$ tal que B é um invariante de Y_j.

Uma vez que $\mathsf{Restante}[Y_j]$ é uma subseqüência de SeqQ, então B tem pelo menos dois pontos e, conseqüentemente, $\rho_0(B) > 0$ ou $\rho_1(B) > 0$.

Uma vez que B é um invariante de Y_j, então, pela Proposição 3.14, existe um EE X tal que $Y_j = X \oplus B$. Assim, pela Proposição 4.17, $\rho(Y_j) = \rho(X) + \rho(B)$. Logo, $\rho_0(Y_j) \geq \rho_0(B) > 0$ ou $\rho_1(Y_j) \geq \rho_1(B) > 0$, e, conseqüentemente, $\rho(Y_j) \neq (0,0)$. Mas isto contradiz a hipótese de que $\rho(Y_j) = (0,0)$. Portanto, a seqüência decrescente atual de A é maximal.

($\Rightarrow$) Suponha por absurdo que $\rho(Y_j) \neq (0,0)$. Seja $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ a seqüência crescente atual de A. Assim, pelo Lema 5.8, $Y_j = A \ominus X_j$ e, pelo Lema 5.9, X_j é um invariante de A.

Como A é um EE convexo e X_j é um invariante de A, então, pelo Lema 5.6, $Y_j = A \ominus X_j$ é também um EE convexo. Assim, pela Proposição 5.1, Y_j tem uma decomposição seqüencial, digamos $[Z_1, Z_2, \cdots, Z_\ell]$. Uma vez que $\rho(Y_j) \neq (0,0)$, então $|Y_j| \geq 2$, e, conseqüentemente, um elemento em $[Z_1, Z_2, \cdots, Z_\ell]$, digamos Z_1, contém pelo menos dois pontos. Claramente, Z_1 é um invariante de Y_j. Uma vez que, pelo Lema 5.9, Y_j é um invariante de A, então, pela transitividade da relação de invariança (dada pela Proposição 5.2), Z_1 é um invariante de A.

Uma vez que Z_1 é um subconjunto do quadrado elementar e $|Z_1| \geq 2$, então existe um elemento B em $\mathsf{SeqQ} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$ tal que $B \equiv Z_1$. Uma vez que Z_1 é um invariante de Y_j, claramente, B também é um invariante de Y_j, e, pelo Lema 5.12, B é um elemento de $\mathsf{Restante}[Y_j]$. Mas isto contradiz a hipótese de que a seqüência decrescente atual de A é maximal. Portanto, $\rho(Y_j) = (0,0)$. ■

Para a completude desta seção, o próximo resultado mostra que a saída do algoritmo DecCon é uma decomposição de A.

Teorema 5.14 *Seja A um EE convexo. Se a seqüência crescente atual de A, digamos $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$, é maximal, então $X_j \equiv A$.*

Prova: Uma vez que a seqüência $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ é maximal, então a seqüência decrescente atual de A, digamos $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$, também é maximal. Assim, pela Proposição 5.13, $\rho(Y_j) = (0,0)$. Logo, pelo Lema 5.10, $\rho(X_j) = \rho(A)$. Uma vez que, pelo Lema 5.9, X_j é um invariante de A, então, pela Proposição 5.7, $X_j \equiv A$. ∎

5.5.3 A Saída do Algoritmo é uma Decomposição Ótima

Na última subseção, o Teorema 5.14 mostra que se a seqüência crescente atual $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ de um dado EE convexo A é maximal, então $X_j \equiv A$ e, portanto, a solução parcial atual $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$, é uma decomposição de A. No final do Capítulo 4, na Subseção 4.3.4, o Teorema 4.18 mostra um limite inferior para o comprimento das decomposições de A. Se provarmos que este limite inferior para decomposição de $A \equiv X_j$ é j elementos (isto é, $lower(X_j) = j$), então $\mathsf{S}_j(A)$ será uma decomposição ótima de A, uma vez que $\mathsf{S}_j(A)$ contém exatamente j elementos.

Assim, para provar que a saída do algoritmo DecCon é uma decomposição ótima A, vamos mostrar que, para cada seqüência crescente atual $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ de um dado EE convexo A, a correspondente solução parcial atual $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é uma decomposição ótima de X_j, ou seja, $lower(X_j) = j$. Para isso, precisamos de algumas definições e resultados preliminares.

Seja A um EE. Seja $\mathsf{R} = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ uma subseqüência qualquer de $\mathsf{SeqInv}[A]$. A seqüência $\mathsf{E} = [X_0, X_1, \cdots, X_j]$, onde $X_0 = \{o\}$ e $X_i = X_{i-1} \oplus C_i$, para $i \in \{1, 2, \cdots, j\}$, é chamada de *seqüência gerada* a partir de R e a seqüência R é chamada *seqüência geradora* de E. Note que, por essa definição, a solução parcial atual $\mathsf{S}_j[A]$ é uma seqüência geradora da seqüência crescente atual de A.

Seja A um EE. Seja $\mathsf{R} = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ uma subseqüência de $\mathsf{SeqInv}[A]$. Denotaremos por $c_{a,b}(\mathsf{R})$, para $a, b \in \{0, 1, 2\}$, o número de EE's em R cujo vetor retangular é igual a (a, b). Por exemplo, na Figura 5.2.i, claramente $\mathsf{S}_5(A)$ é uma subseqüência de $\mathsf{SeqInv}[A]$ e $c_{2,2}(\mathsf{S}_5(A)) = 2$, $c_{1,2}(\mathsf{S}_5(A)) = 3$ e $c_{a,b}(\mathsf{S}_5(A)) = 0$, para os outros valores de a, b. Claramente, $c_{0,0}(\mathsf{R}) = 0$, uma vez que qualquer elemento $B \in \mathsf{SeqQ}$ contém pelo menos dois pontos, ou seja, $\rho(B) \neq (0,0)$.

Dado um EE A e seja $\mathsf{R} = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ uma uma subseqüência de $\mathsf{SeqInv}[A]$. Dizemos que R é uma *seqüência retangular* de A se, e somente se, todas as restrições abaixo são satisfeitas:

(a) $c_{2,0}(\mathsf{R}) \cdot c_{0,2}(\mathsf{R}) = 0$;	(b) $c_{2,0}(\mathsf{R}) \cdot c_{0,1}(\mathsf{R}) = 0$;
(c) $c_{0,2}(\mathsf{R}) \cdot c_{1,0}(\mathsf{R}) = 0$;	(d) $c_{2,1}(\mathsf{R}) \cdot c_{0,1}(\mathsf{R}) = 0$;
(e) $c_{1,2}(\mathsf{R}) \cdot c_{1,0}(\mathsf{R}) = 0$;	(f) $c_{1,1}(\mathsf{R}) + c_{1,0}(\mathsf{R}) + c_{0,1}(\mathsf{R}) \leq 1$;
(g) $c_{2,0}(\mathsf{R}) \cdot c_{1,1}(\mathsf{R}) = 0$;	(h) $c_{2,0}(\mathsf{R}) \cdot c_{1,2}(\mathsf{R}) = 0$;
(i) $c_{0,2}(\mathsf{R}) \cdot c_{1,1}(\mathsf{R}) = 0$;	(j) $c_{0,2}(\mathsf{R}) \cdot c_{2,1}(\mathsf{R}) = 0$;
(k) $c_{2,1}(\mathsf{R}) \cdot c_{1,2}(\mathsf{R}) = 0$.	

Seja A um EE. Seja $\mathsf{R} = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ uma subseqüência de $\mathsf{SeqInv}[A]$. Definimos a seqüência $\mathsf{E} = [X_0, X_1, \cdots, X_j]$, onde $X_i = X_{i-1} \oplus C_i$, como a *seqüência elemento* *retangular* de A se, e somente se, R é uma seqüência retangular de A. Além disso, note que R é uma seqüência geradora de E.

O próximo resultado, provado na Seção 5.8, mostra que uma seqüência crescente atual construído pelo algoritmo DecCon de um dado EE convexo A é uma seqüência elemento retangular de A.

Proposição 5.15 *Se $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ uma seqüência crescente atual construído pelo algoritmo* DecCon *de um dado EE convexo A, então $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ é uma seqüência elemento retangular de A.*

A próxima proposição mostra que se $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ é uma seqüência elemento retangular de um dado EE A, então $lower(X_j) = j$. A prova desta proposição é dada na Seção 5.8.

Proposição 5.16 *Seja A um EE. Se $\mathsf{E} = [X_0, X_2, \cdots, X_j]$ é a seqüência elemento retangular de A, então $lower(X_j) = j$.*

O próximo teorema fornece a prova de que a saída do algoritmo DecCon é uma decomposição ótima de um dado EE convexo A.

Teorema 5.17 *Seja A um EE convexo. Seja $[X_0, X_2, \cdots, X_j]$ a seqüência crescente atual de A. Se $[X_0, X_2, \cdots, X_j]$ é maximal, então, $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é uma decomposição ótima de A.*

Prova: Pelo Teorema 5.14, $X_j \equiv A$. Assim, $\rho(X_j) = \rho(A)$, e conseqüentemente, $lower(X_j) = lower(A)$. Como, pela Proposição 5.15, $[X_0, X_2, \cdots, X_j]$ é uma seqüência elemento retangular de A, então, pela Proposição 5.16, $lower(X_j) = j$. Uma vez que $\mathsf{S}_j(A)$ contém exatamente j elementos e $lower(A) = j$, então, claramente, $\mathsf{S}_j(A)$ é uma decomposição ótima de A. ■

Dado um EE convexo A, quando uma seqüência crescente atual maximal $[X_0, X_1 \cdots, X_j]$ é encontrada pelo algoritmo, então, pelo Teorema 5.14, $X_j \equiv A$ e, portanto, $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é uma decomposição de A. Pelo Teorema 5.17, $\mathsf{S}_j(A)$ é uma decomposição ótima de A, uma vez que $lower(A) = lower(X_j) = j$.

5.6 Complexidade do Algoritmo

Nesta seção, discutiremos a complexidade de tempo do algoritmo DecCon. Para isso, dado um EE convexo, usaremos, nesta seção, a seguinte notação:

- m_p denota o número de pontos de A;
- m_s denota o número total de iterações que foram efetuadas pelo algoritmo;
- n denota o valor máximo entre as duas coordenadas do vetor retangular de A, ou seja, $n = \max\{\rho_0(A), \rho_1(A)\}$.

Claramente, o número de pontos de um dado EE convexo A é $m_p = O(n^2)$. A complexidade de tempo do algoritmo do Xu [49] para decompor EE's convexos é $O(n^2)$. Na proposição seguinte, mostramos que $m_s = O(n)$.

Proposição 5.18 *Se A é um EE convexo, então o número total de iterações do algoritmo* DecCon *é $m_s = O(n)$.*

Prova: Para cada B_i de SeqQ, se B_i é um invariante de Y_j, então, no Passo 13, $j \leftarrow j+1$. Caso contrário, no Passo 07 ou 09, $i \leftarrow i+1$. Dessa forma, o número de iterações do algoritmo DecCon para encontrar a solução final $\mathsf{S}_j(A)$ é no máximo $i+j$, ou seja, $m_s \leq i+j$. Uma vez que existem no máximo 2^9 subconjuntos do quadrado elementar, então $|\mathsf{SeqQ}| \leq 2^9$ e, conseqüentemente, $i \leq 2^9$.

Se $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ é a seqüência crescente atual de A e se ela é maximal, então, pelas Proposições 5.15 e 5.16 e pelo Teorema 5.14, $X_j \equiv A$ e $lower(X_j) = j$. Logo, $j = lower(A)$ e, pelo Teorema 4.18, $j = O(n)$. Portanto, $m_s = O(n)$. ■

Note que a seqüência SeqQ (no Passo 01) é construída previamente e, portanto, a construção dela não depende do EE de entrada.

Os passos cruciais para a complexidade de tempo do algoritmo são os Passos 05, 06, 08 e 12. A Subseção 5.6.1 apresenta a análise de complexidade dos Passos 05 e 06. A Subseção 5.6.2 fornece as complexidades dos Passos 08 e 12. Finalmente, na Subseção 5.6.3, mostramos a complexidade do algoritmo.

5.6.1 Complexidade dos Passos 05 e 06

Nos Passos 05 e 06 o algoritmo verifica se $\rho(Y_j) = (0,0)$ e se existe $k \in \{0, 1, \cdots, 7\}$ tal que $\nu_k(Y_j) < \nu_k(B_i)$. Assim, nestes passos, o algoritmo tem que determinar $\rho(Y_j)$, $\nu(Y_j)$ e $\nu(B_i)$.

O vetor projeção de cada elemento de SeqQ pode ser calculado antes da execução do algoritmo, uma vez que todos elementos nesta seqüência estão previamente fixados. Desta forma, a complexidade de tempo para determinar $\nu(B_i)$ e $\rho(B_i)$ é $O(1)$.

Para determinar o vetor projeção e o vetor retangular de Y_j, vamos considerar dois casos: $j = 0$ or $j > 0$.

Se $j = 0$, então o algoritmo tem que calcular o vetor projeção e o vetor retangular de $Y_0 = A$. Um algoritmo $O(m_p)$ para determinar o "chain code" de A (ou equivalentemente, o vetor projeção de A) pode ser visto em [36, p. 143]. Observe que o algoritmo precisa calcular $\nu(A)$ somente uma vez. Além disso, note que, se $\nu(A)$ já foi calculado anteriormente, então, pela definição do vetor retangular, a complexidade para determinar $\rho(A)$ é $O(1)$.

Portanto, se $j = 0$, a complexidade de tempo do Passo 06, ou seja, para calcular $\nu(Y_0)$ e verificar se existe $k \in \{0, 1, \cdots, 7\}$ tal que $\nu_k(Y_0) < \nu_k(B_i)$ é $O(m_p)$ e a complexidade do Passo 05, ou seja, para calcular $\rho(Y_0)$ e comparar se $\rho(Y_0) = (0, 0)$ é $O(1)$.

No caso de $j > 0$, o vetor projeção e o vetor retangular de Y_j podem ser calculados usando o seguinte resultado.

Proposição 5.19 *Sejam B e Y EE's. Se B é um invariante de Y, então $\nu(Y \ominus B) = \nu(Y) - \nu(B)$ e $\rho(Y \ominus B) = \rho(Y) - \rho(B)$.*

Prova: Uma vez que B é um invariante de Y, então $Y = (Y \ominus B) \oplus B$. Logo, pela Proposição 4.16, $\nu(Y) = \nu(Y \ominus B) + \nu(B)$ e portanto, $\nu(Y \ominus B) = \nu(Y) - \nu(B)$. De uma maneira similar, usando a Proposição 4.17, é fácil mostrar que $\rho(Y \ominus B) = \rho(Y) - \rho(B)$. ■

Se $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é a solução parcial atual quando o EE considerado pelo algoritmo é Y_j, então C_j é um invariante de Y_{j-1} e o algoritmo construiu $Y_j \leftarrow Y_{j-1} \ominus C_j$. Assim, pela Proposição 5.19, $\nu(Y_j) = \nu(Y_{j-1}) - \nu(C_j)$ e $\rho(Y_j) = \rho(Y_{j-1}) - \rho(C_j)$. Se $j > 0$, podemos considerar que o vetor projeção e o vetor retangular de Y_{j-1} já foram construídos. Assim, neste caso, a complexidade de tempo para calcular $\nu(Y_j)$ e $\rho(Y_j)$ é $O(1)$, uma vez que $\nu(Y_j)$ e $\rho(Y_j)$ têm um número fixo de coordenadas, e o vetor retangular e o vetor projeção de cada $B \in \mathsf{SeqQ}$ já foram determinados previamente antes de rodar o algoritmo.

Portanto, se $j > 0$, a complexidade de tempo do Passo 05, ou seja, para calcular $\rho(Y_j)$ e comparar se $\rho(Y_j) = (0, 0)$ é $O(1)$; e a complexidade do Passo 06, isto é, para calcular $\nu(Y_j)$ e verificar se existe $k \in \{0, 1, \cdots, 7\}$ tal que $\nu_k(Y_j) < \nu_k(B_i)$ é $O(1)$.

5.6.2 Complexidade dos Passos 08 e 12

Para verificar se B_i é um invariante de Y_j, temos que comparar se $Y_j = (Y_j \ominus B_i) \oplus B_i$. Dado um EE X, a complexidade para construir $X \oplus B_i$ ou $X \ominus B_i$, pela definição de adição e subtração de Minkowski, é $O(m_x \cdot m_b)$, onde m_x e m_b denotam, respectivamente, o número de pontos de X e B_i. Uma vez que B_i contém no máximo 9 pontos, então a complexidade para construir $X \oplus B_i$ ou $X \ominus B_i$ é $O(m_x)$.

Obviamente, pela definição da subtração de Minkowski, se $Y = A \ominus X$, então $|Y| \leq |A|$. Conseqüentemente, se $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ é a seqüência decrescente atual de um dado EE

A, então, para todo $k \in \{0, 1, \cdots, j\}$, $|Y_k| \leq |A|$. No Passo 08, o algoritmo constrói $Z_j = Y_j \ominus B_i$ e $W_j = Z_j \oplus B_i$; e depois verifica se $Y_j = W_j$. A complexidade para construir $Z_j = Y_j \ominus B_i$ e $W_j = Z_j \oplus B_i$ e comparar se $Y_j = W_j$ é $O(m_p)$, uma vez que $|Z_j| \leq |Y_j| \leq |A| = m_p$. Dessa forma, a complexidade do Passo 08 é $O(m_p)$. Além disso, a complexidade do Passo 12, ou seja, para construir $Y_{j+1} = Y_j \ominus B_i$, é $O(m_p)$, uma vez que $|Y_j| \leq |A| = m_p$.

5.6.3 Complexidade do Algoritmo

Pela Proposição 5.18, o número de iterações do algoritmo DecCon é $m_s = O(n)$. Assim, as comparações nos Passos 05, 06, 08 e 12 são executadas $m_s = O(n)$ vezes.

Uma vez que a primeira comparação no Passo 05 leva tempo $O(m_p)$ e as outras comparações levam tempo $O(1)$, então a complexidade total do algoritmo deste passo é $O(m_p) + \underbrace{O(1) + \cdots + O(1)}_{m_s - 1 \text{ times}} = O(m_p) + O(m_s)$.

Uma vez que cada comparação no Passo 06 leva tempo $O(1)$, então a complexidade total do algoritmo neste passo é $O(m_s)$.

Uma vez que cada comparação nos Passos 08 e 12 leva tempo $O(m_p)$, a complexidade total do algoritmo nestes passos é $O(m_s \cdot m_p)$.

Logo, a complexidade do algoritmo para encontrar uma decomposição ótima de um EE convexo A é $O(m_s \cdot m_p)$, ou seja, $O(n^3)$, uma vez que $m_s = O(n)$ e $m_p = O(n^2)$.

5.7 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos um algoritmo guloso para decompor um EE convexo em termos de um número mínimo de subconjuntos (não necessariamente convexos) do quadrado elementar. Este algoritmo é simples e inédito. A complexidade deste algoritmo é $O(n^3)$, onde n é o valor máximo entre as duas coordenadas do vetor retangular do EE convexo de entrada.

Embora a complexidade de tempo do algoritmo do Xu [49] seja $O(n^2)$, todos elementos na decomposição encontrado por este algoritmo são convexos.

Logo, como a complexidade computacional dos algoritmos que implementam erosões e dilatações depende do número de pontos do EE, o algoritmo proposto neste capítulo tem uma vantagem sobre o algoritmo do Xu.

Uma outra qualidade de algoritmo proposto é que seu processo de otimização é muito simples, comparado ao algoritmo do Xu.

Um próximo passo deste trabalho pode ser fazer uma versão simplificada do algoritmo DecCon colocando-se na seqüência SeqQ somente os elementos de SeqQ que são subconjuntos convexos do quadrado elementar.

Finalmente, uma análise teórica (prova de corretude e da complexidade de tempo) do algoritmo proposto foi apresentada.

5.8 Apêndice do Capítulo 5

Para facilitar a leitura deste capítulo e não distrair o leitor de seus resultados principais, apresentaremos as provas das Proposições 5.15 (na Subseção 5.8.1) e 5.16 (na Subseção 5.8.2) como um apêndice deste capítulo.

5.8.1 Prova da Proposição 5.15

Dividiremos a prova da Proposição 5.15 em duas partes. Na primeira, mostraremos alguns resultados intermediários necessários para esta prova e, na segunda parte, provaremos a Proposição 5.15.

5.8.1.1 Resultados Necessários para a Prova da Proposição 5.15

Para prova da Proposição 5.15, precisamos de cinco resultados intermediários dados nos Lemas de 5.20 a 5.24.

Lema 5.20 *Seja A um EE convexo. Sejam $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ e $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ a seqüência crescente atual de A e a solução parcial atual, respectivamente. Seja D um elemento de* SeqQ*. Se, para algum $i \in \{1, 2, \cdots, j\}$, D é um invariante de Y_{i-1}, então $\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq \rho_0(D) + \rho_1(D)$.*

Prova: Seja $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_{i-1}]$ a seqüência decrescente atual de A quando Y_{i-1} foi considerado pelo algoritmo. Uma vez que D é um elemento de SeqQ e D é um invariante de Y_{i-1}, então, pelo Lema 5.12, D é um elemento de $\mathsf{Restante}[Y_{i-1}]$.

Seja $\mathsf{Restante}[Y_{i-1}] = [C_{i-1}, B_r, B_{r+1}, \cdots, B_{s-1}, C_i = B_s, B_{s+1}, \cdots, B_n]$. O algoritmo DecCon seleciona C_i de $\mathsf{Restante}[Y_{i-1}]$ para construir $\mathsf{S}_{i+1}(A) \leftarrow \mathsf{S}_i(A) \cdot [C_i]$, pois C_i é o primeiro elemento de $\mathsf{Restante}[Y_{i-1}]$ que é um invariante de Y_{i-1}, isto é, todos elementos da seqüência $[C_{i-1}, B_r, B_{r+1}, \cdots, B_{s-1}]$ não são invariantes de Y_{i-1}. Assim, uma vez que D é também um invariante de Y_{i-1} e D é também um elemento de $\mathsf{Restante}[Y_{i-1}]$, então D deve ser um elemento de $\mathsf{Restante}[Y_i] = [C_i = B_s, B_{s+1}, \cdots, B_n]$. Logo, pela ordem escolhida para construir a seqüência SeqQ, $\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq \rho_0(D) + \rho_1(D)$. ■

O Lema 5.21 fornece um resultado simples e interessante sobre a adição de Minkowski entre o último elemento da seqüência decrescente atual e o último elemento da correspondente solução parcial. Este lema é simplesmente um passo intermediário para provar o Lema 5.22.

Lema 5.21 *Seja A um EE convexo. Se $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ são, respectivamente, a seqüência decrescente atual de A e a solução parcial atual, então $Y_{j-1} = Y_j \oplus C_j$.*

Prova: Uma vez que $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é a solução parcial atual, então $Y_j = Y_{j-1} \ominus C_j$ e C_j é um invariante Y_{j-1}. Assim, uma vez que C_j é um invariante Y_{j-1}, então $Y_{j-1} = (Y_{j-1} \ominus C_j) \oplus C_j$, e, conseqüentemente, como $Y_j = Y_{j-1} \ominus C_j$, então $Y_{j-1} = Y_j \oplus C_j$. ∎

Como uma conseqüência do Lema 5.21, o próximo resultado fornece uma propriedade da seqüência decrescente e a solução parcial atuais. Este lema é somente um passo intermediário para provar o Lema 5.23.

Lema 5.22 *Seja A um EE convexo. Seja $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ a seqüência decrescente atual de A. Se $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é a solução parcial atual, então, para todo $1 \leq \ell \leq j$, $Y_{\ell-1} = Y_j \oplus C_j \oplus C_{j-1} \oplus \cdots \oplus C_\ell$.*

Prova: Provaremos este lema por indução em ℓ. Se $\ell = j$, então, pelo Lema 5.21, $Y_{j-1} = Y_j \oplus C_j$. Suponha, por hipótese de indução, que este lema vale para $1 < \ell \leq j$, ou seja, $Y_{\ell-1} = Y_j \oplus C_j \oplus C_{j-1} \oplus \cdots \oplus C_\ell$. Provaremos que $Y_{\ell-2} = Y_j \oplus C_j \oplus \cdots \oplus C_\ell \oplus C_{\ell-1}$.

Se $\mathsf{S}_{\ell-1}(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_{\ell-1}]$ é a solução parcial atual quando $Y_{\ell-1}$ foi o EE considerado pelo algoritmo, então, pelo Lema 5.21, $Y_{\ell-2} = Y_{\ell-1} \oplus C_{\ell-1}$. Uma vez que, por hipótese de indução, $Y_{\ell-1} = Y_j \oplus C_j \oplus C_{j-1} \oplus \cdots \oplus C_\ell$, então, $Y_{\ell-2} = (Y_j \oplus C_j \oplus C_{j-1} \oplus \cdots \oplus C_\ell) \oplus C_{\ell-1}$. ∎

Lema 5.23 *Seja A um EE convexo. Seja $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$, respectivamente, a seqüência decrescente atual de A e a solução parcial atual com $j > 2$. Sejam C_i e C_k dois elementos de $\mathsf{S}_j(A)$ tais que $i < k$. Se T é um EE tal que $|T| \geq 2$, $\rho(T) \leq (2, 2)$ e T é um invariante de $C_i \oplus C_k$ ou $C(C_i) \oplus C(C_k)$, então existe um EE D em* SeqQ *tal que $\rho(D) = \rho(T)$ e D é im invariante de Y_{i-1}.*

Prova: Uma vez que $|T| \geq 2$, $\rho(T) \leq (2, 2)$, então, claramente, existe um elemento D em SeqQ tal que $D \equiv T$. Assim, evidentemente, $\rho(D) = \rho(T)$. Falta mostrar que D (ou equivalentemente, T) é um invariante de Y_{i-1}.

Uma vez que T é um invariante de $C_i \oplus C_k$ ou $C(C_i) \oplus C(C_k)$, se provarmos que $C_i \oplus C_k$ e $C(C_i) \oplus C(C_k)$ são invariantes de Y_{i-1}, então, pela propriedade de transitividade de

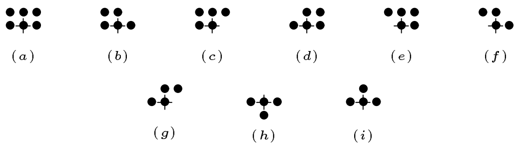


Figura 5.3: Elementos de $\mathcal{R}$.

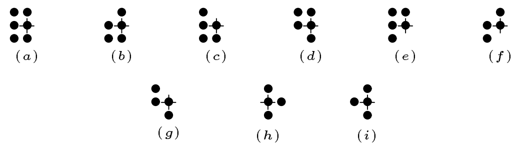


Figura 5.4: Elementos de $\mathcal{S}$.

invariança (dada pela Proposição 5.2), T é um invariante de Y_{i-1} e, conseqüentemente, D também é um invariante de Y_{i-1}.

Agora, provamos que $C_i \oplus C_k$ é um invariante de Y_{i-1}.

Sejam $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_i]$ e $\mathsf{S}_i(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_i]$, respectivamente, a seqüência decrescente atual de A e a solução parcial atual quando Y_i foi o EE considerado pelo algoritmo. Uma vez que, $1 \leq i \leq j$, pelo Lema 5.22, $Y_{i-1} = Y_j \oplus C_j \oplus C_{j-1} \oplus \cdots \oplus C_i$. Note que C_i e C_k são elementos em $[C_i, C_{i+1}, \cdots, C_j]$, uma vez que $i < k \leq j$. Se Z é a adição de Minkowski de todos elementos em $[C_i, C_{i+1}, \cdots, C_j]$ exceto para C_i e C_k, então $Y_{i-1} = Y_j \oplus Z \oplus C_i \oplus C_k = (Y_j \oplus Z) \oplus (C_i \oplus C_k)$. Logo, pela Proposição 3.15, $C_i \oplus C_k$ é um invariante de Y_{i-1}.

Falta provar que $C(C_i) \oplus C(C_k)$ é um invariante de Y_{i-1}.

Seja $[X_0, X_1, \cdots, X_{i-1}]$ a seqüência crescente atual de A quando Y_{i-1} foi o EE considerado pelo algoritmo. Uma vez que, pelo Lema 5.8, $Y_{i-1} = A \ominus X_{i-1}$ e, pelo Lema 5.9, X_{i-1} é um invariante de A, então, pelo Lema 5.6, Y_{i-1} é um EE convexo. Assim, uma vez que $Y_{i-1} = Y_j \oplus Z \oplus C_i \oplus C_k$, então, pelo Lema 5.4, $Y_{i-1} = Y_j \oplus Z \oplus C(C_i) \oplus C_k = Y_j \oplus Z \oplus C(C_i) \oplus C(C_k)$. Dessa forma, pela Proposição 3.15, $C(C_i) \oplus C(C_k)$ é um invariante de Y_{i-1}. ■

Lema 5.24 *Seja A um EE convexo. Sejam $[Y_0, Y_1, \cdots, Y_j]$ e $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$, respectivamente, a seqüência decrescente atual de A e a solução parcial atual. Se existem C_i e C_k em $\mathsf{S}_j(A)$ tais que $\rho(C_i) = (2,1)$ e $\rho(C_k) = (1,2)$, então existe D em* SeqQ *tal que $\rho(D) = (2,2)$ e D é um invariante de $Y_{\ell-1}$, onde $\ell = \min\{i,k\}$.*

Prova: Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ os conjuntos de todos elementos em SeqQ tais que os vetores retangulares sejam iguais a, respectivamente, $(2,1)$ e $(1,2)$. Uma vez que $\rho(C(C_i)) = \rho(C_i) = (2,1)$ e $\rho(C(C_k)) = \rho(C_k) = (1,2)$, então $C(C_i) \in \mathcal{R}$ e $C(C_k) \in \mathcal{S}$.

Cada subconjunto convexo do quadrado elementar apresentado na Figura 5.3 (respectivamente, Figura 5.4) é equivalente sob translação a um elemento of $\mathcal{R}$ (respectivamente, $\mathcal{S}$) e vice-versa. Assim, sem perda de generalidade, suponha que os elementos de $\mathcal{R}$ (respectivamente, $\mathcal{S}$) sejam os EE's convexos apresentados na Figura 5.3 (respectivamente, Figura 5.4).

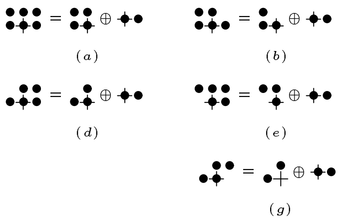


Figura 5.5: Todos elementos de $\mathcal{R}_1$ são decomponíveis.

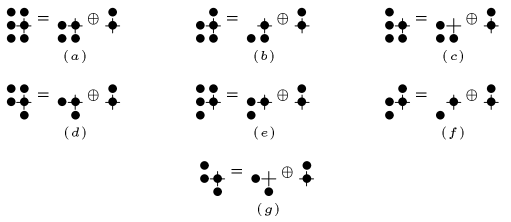


Figura 5.6: Todos elementos de $\mathcal{S}_1$ são decomponíveis.

Figura 5.7: Todas possibilidades de $C(B_i) \oplus C(B_k)$ se $C(B_i) \in \mathcal{R}_2$ e $C(B_k) \in \mathcal{S}_2$.

Agora, particionamos os conjuntos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ da seguinte forma. Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{S}_1$ os conjuntos formados pelos EE's convexos apresentados, respectivamente, nas Figuras 5.3.a a 5.3.g e nas Figuras 5.4.a a 5.4.g. Sejam $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} - \mathcal{R}_1$ e $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} - \mathcal{S}_1$.

Uma vez que $C(C_i) \in \mathcal{R}$, $C(C_k) \in \mathcal{S}$ e $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$ e $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ são partições, respectivamente, de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, então podemos considerar somente dois casos: (1) $C(C_i) \in \mathcal{R}_1$ ou $C(C_k) \in \mathcal{S}_1$; e (2) $C(C_i) \in \mathcal{R}_2$ e $C(C_i) \in \mathcal{S}_2$. Note que, o Caso 2 é satisfeito se, e somente se, o Caso 1 não é satisfeito.

<u>*Caso 1*</u>: $C(C_i) \in \mathcal{R}_1$ ou $C(C_k) \in \mathcal{S}_1$.

Consideraremos que $C(C_i) \in \mathcal{R}_1$ (a prova para $C(C_k) \in \mathcal{S}_1$ pode ser feita de maneira similar).

Como indicado na Figura 5.5, se $C(C_i) \in \mathcal{R}_1$, então existem dois EE's convexos D_1 e D_2 tais que $C(C_i) = D_1 \oplus D_2$, $\rho(D_1) = (1,1)$ e $\rho(D_2) = (1,0)$. Dessa forma, $C(C_i) \oplus C(C_k) = (D_1 \oplus D_2) \oplus C(C_k) = D_1 \oplus (D_2 \oplus C(C_k)) = D_1 \oplus T$, onde $T = D_2 \oplus C(C_k)$. Assim, uma vez que T é um invariante de $C(C_i) \oplus C(C_k)$ (pela Proposição 3.15) e $\rho(T) = \rho(D_2) + \rho(C(C_k)) = (2,2)$ (pela Proposição 4.17), então, pelo Lema 5.23, existe um elemento D em SeqQ tal que $\rho(D) = \rho(T) = (2,2)$ e D é um invariante de Y_{i-1} (se $i < k$) ou Y_{k-1} (se $k < i$).

<u>*Caso 2*</u>: $C(C_i) \in \mathcal{R}_2$ e $C(C_i) \in \mathcal{S}_2$.

Neste caso, a Figura 5.7 apresenta todas possibilidades de $C(C_i) \oplus C(C_k)$. Assim, como indicado nesta figura, existem dois EE's convexos D_1 e D_2 tais que $C(C_i) \oplus C(C_k) = D_1 \oplus D_2$, $\rho(D_1) = (2,2)$ e $\rho(D_2) = (1,1)$. Assim, pela Proposição 3.15, D_1

é um invariante de $C(C_i) \oplus C(C_k)$. Dessa forma, pelo Lema 5.23, existe D em SeqQ tal que $\rho(D) = \rho(D_1) = (2,2)$ e D é um invariante de Y_{i-1} (se $i < k$) ou Y_{k-1} (se $k < i$).

Portanto, existe D em SeqQ tal que $\rho(D) = (2,2)$ e D é um invariante de $Y_{\ell-1}$, onde $\ell = \min\{i,k\}$. ■

Agora, usando os resultados dos Lemas de 5.20 a 5.24, podemos provar a Proposição 5.15.

5.8.1.2 Demonstração da Proposição 5.15

Seja $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ a solução parcial atual. Obviamente, por construção, $\mathsf{S}_j(A)$ é a seqüência geradora de $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$. Assim, para provar que $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ é uma seqüência elemento retangular de A, basta mostrar que sua seqüência geradora $\mathsf{S}_j(A)$ é uma seqüência retangular. Dessa forma, temos que provar que as Restrições da definição de seqüência retangular são válidas para $\mathsf{S}_j(A)$.

<u>Prova que as Restrições de (a) a (f) são válidas:</u>

Suponha, por absurdo, que uma das Restrições de (a) a (f) da definição de seqüência retangular não seja válida para $\mathsf{S}_j(A)$. Assim, existem dois elementos C_i e C_k, com $i < k$, em $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ tais que $\rho(C_i \oplus C_k) = \rho(C_i) + \rho(C_k) \leq (2,2)$. Seja $T = C_i \oplus C_k$. Claramente, T é um invariante de $C_i \oplus C_k$. Além disso, como C_i e C_k são elementos de SeqQ, então $|T| \geq 2$ e $\rho_0(C_k) + \rho_1(C_k) > 0$.

Uma vez que $\rho(T) = \rho(C_i) + \rho(C_k) \leq (2,2)$, $|T| \geq 2$ e T é um invariante de $C_i \oplus C_k$, então, pelo Lema 5.23, existe um elemento D em SeqQ tal que $\rho(D) = \rho(T)$ e D é um invariante de Y_{i-1}. Assim, uma vez que $i \in \{1, 2, \cdots, j\}$, então, pelo Lema 5.20, $\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq \rho_0(D) + \rho_1(D)$.

Uma vez que $\rho(D) = \rho(B) = \rho(C_i) + \rho(C_k)$, então

$$\begin{aligned}\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq \rho_0(D) + \rho_1(D) &= (\rho_0(C_i) + \rho_0(C_k)) + (\rho_1(C_i) + \rho_1(C_k)) \\ &= (\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i)) + (\rho_0(C_k) + \rho_1(C_k)).\end{aligned}$$

Dessa forma, $\rho_0(C_k) + \rho_1(C_k) \leq 0$. Mas isto é um contradição, pois $\rho_0(C_k) + \rho_1(C_k) > 0$. Portanto, todas as Restrições de (a) a (f), são válidas para $\mathsf{S}_j(A)$.

<u>Prova que as Restrições de (g) a (j) são válidas:</u>

Suponha por absurdo que uma das restrições, de (g) a (j), não seja válida. Dessa forma, $c_{2,0}(\mathsf{S}_j(A)) > 0$ ou $c_{0,2}(\mathsf{S}_j(A)) > 0$. Conseqüentemente, existe um elemento C_k em $\mathsf{S}_j(A)$ tal que $\rho(C_k) = (2,0)$ ou $\rho(C_k) = (0,2)$. Consideraremos o caso $\rho(C_k) = (2,0)$. O outro caso $\rho(C_k) = (0,2)$ pode ser provado de uma maneira similar. Logo, pelas restrições (g) ou (h), $c_{1,1}(\mathsf{S}_j(A)) > 0$ ou $c_{1,2}(\mathsf{S}_j(A)) > 0$, e, portanto, existe um elemento C_i em $\mathsf{S}_j(A)$ tal que $\rho(C_i) = (1,1)$ ou $\rho(C_i) = (1,2)$. Uma vez que $\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq \rho_0(C_k) + \rho_1(C_k)$, pela ordem escolhida para construir SeqQ, podemos considerar que $i < k$ (o caso $i > k$ é analógo).

Uma vez que, $\rho(C(C_k)) = \rho(C_k) = (2,0)$ (pela definição de vetor retangular), então $C(C_k)$ é uma linha horizontal com três pontos consecutivos. Dessa forma, existem duas linhas horizontais com dois pontos consecutivos cada um, digamos L_1 e L_2, tais que $C(C_k) = L_1 \oplus L_2$. Claramente, $\rho(L_1) = \rho(L_2) = (1,0)$.

Assim, $C(C_i) \oplus C(C_k) = C(C_i) \oplus (L_1 \oplus L_2) = (C(C_i) \oplus L_1) \oplus L_2$. Dessa forma, pela Proposição 3.15, $T = C(C_i) \oplus L_1$ é um invariante de $C(C_i) \oplus C(C_k)$. Além disso, pela Proposição 4.17, $\rho(T) = \rho(C(C_i)) + \rho(L_1) \leq (2,2)$, uma vez que $\rho(C_i) = (1,1)$ ou $\rho(C_i) = (1,2)$.

Uma vez que, $\rho(T) \leq (2,2)$, B é um invariante de $C(C_i) \oplus C(C_k)$ e $i < k$, então, pelo Lema 5.23, existe D em SeqQ tal que $\rho(D) = \rho(T)$ e D é um invariante de Y_{i-1}. Dessa forma, uma vez que $i \in \{1, 2, \cdots, j\}$, pelo Lema 5.20, $\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq \rho_0(D) + \rho_1(D)$.

Uma vez que $\rho(D) = \rho(B) = \rho(C(C_i)) + \rho(L_1)$ e $\rho(C(C_i)) = \rho(C_i)$, então

$$\begin{aligned}\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq \rho_0(D) + \rho_1(D) &= (\rho_0(C(C_i)) + \rho_0(L_1)) + (\rho_1(C(C_i)) + \rho_1(L_1)) \\ &= (\rho_0(C_i) + \rho_0(L_1)) + (\rho_1(C_i) + \rho_1(L_1)) \\ &= (\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i)) + (\rho_0(L_1) + \rho_1(L_1)).\end{aligned}$$

Assim, $\rho_0(L_1) + \rho_1(L_1) \leq 0$. Mas isto contradiz o fato de que $\rho(L_1) = (1,0)$. Logo, as Restrições de (g) a (j) são válidas para $\mathsf{S}_j(A)$.

<u>Prova que a Restrição (k) é válida:</u>

Suponha por absurdo que a Restrição (k) não seja válida, ou seja, $c_{1,2}(\mathsf{S}_j(A)) > 0$ e $c_{2,1}(\mathsf{S}_j(A)) > 0$. Sejam C_i e C_k dois elementos em $\mathsf{S}_j(A) = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ tais que, $\rho(C_i) = (1,2)$ e $\rho(C_k) = (2,1)$. Sem perda de generalidade suponha que $i < k$.

Pelo Lema 5.24, existe um elemento D em SeqQ tal que $\rho(D) = (2,2)$ e D é um invariante de Y_{i-1}. Dessa forma, uma vez que $i \in \{1, 2, \cdots, j\}$, pelo Lema 5.20, $\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq \rho_0(D) + \rho_1(D)$. Mas, isto contradiz o fato de que $\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) = 3$ e $\rho_0(D) + \rho_1(D) = 4$. Logo, $c_{1,2}(\mathsf{S}_j(A)) = 0$ ou $c_{2,1}(\mathsf{S}_j(A)) = 0$ e, portanto, $c_{2,1}(\mathsf{S}_j(A)) \cdot c_{1,2}(\mathsf{S}_j(A)) = 0$.

5.8.2 Prova da Proposição 5.16

Nesta subseção, daremos a prova da Proposição 5.16. Mas, antes isso, precisamos do resultado do seguinte lema.

Lema 5.25 *Seja A um EE. Seja $\mathsf{E} = [X_0, X_1, \cdots, X_j]$ uma seqüência elemento retangular de A e seja $\mathsf{R} = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ uma seqüência retangular geradora de E. Considere as seguintes condições.*

(a) $\rho_0(X_{j-1}) \geq \rho_1(X_{j-1})$, $\rho_0(C_j) \geq \rho_1(C_j)$ e $\rho_0(C_j) = 2$;

(*b*) $\rho_0(X_{j-1}) \geq \rho_1(X_{j-1})$, $\rho_0(C_j) \geq \rho_1(C_j)$, $\rho_0(C_j) = 1$ *e* $\rho_0(X_{j-1})$ *é um número par;*

(*c*) $\rho_1(X_{j-1}) \geq \rho_0(X_{j-1})$, $\rho_1(C_j) \geq \rho_0(C_j)$ *e* $\rho_1(C_j) = 2$;

(*d*) $\rho_1(X_{j-1}) \geq \rho_0(X_{j-1})$, $\rho_1(C_j) \geq \rho_0(C_j)$, $\rho_1(C_j) = 1$ *e* $\rho_1(X_{j-1})$ *é um número par;*

Se uma das condições acima é satisfeita, então $lower(X_j) = lower(X_{j-1}) + 1$.

Prova: Pela definição de seqüência elemento retangular de A, $X_j = X_{j-1} \oplus C_j$. Dessa forma, pela Proposição 4.17, $\rho(X_j) = \rho(X_{j-1}) + \rho(C_j)$. Pelo Teorema 4.18, temos que $lower(X_j) = \lceil \max\{\rho_0(X_j), \rho_1(X_j)\}/2 \rceil$. Logo, uma vez que $\rho(X_j) = \rho(X_{j-1}) + \rho(C_j)$, então $lower(X_j) = \lceil \max\{\rho_0(X_{j-1}) + \rho_0(C_j), \rho_1(X_{j-1}) + \rho_1(C_j)\}/2 \rceil$.

Portanto, se a Condição (a) ou (b) é satisfeita, então, o limite inferior $lower(X_j) = \lceil (\rho_0(X_{j-1}) + \rho_0(C_j))/2 \rceil$, uma vez que $\rho_0(X_{j-1}) \geq \rho_1(X_{j-1})$ e $\rho_0(C_j) \geq \rho_1(C_j)$. Além disso, pelo Teorema 4.18, $lower(X_{j-1}) = \lceil \rho_0(X_{j-1})/2 \rceil$, uma vez que $\rho_0(X_{j-1}) \geq \rho_1(X_{j-1})$.

Assim, se a Condição (a) é satisfeita, então,

$$\begin{aligned} lower(X_j) &= \lceil (\rho_0(X_{j-1}) + \rho_0(C_j))/2 \rceil \\ &= \lceil (\rho_0(X_{j-1}) + 2)/2 \rceil \\ &\qquad\qquad \text{(uma vez que } \rho_0(C_j) = 2). \\ &= \lceil \rho_0(X_{j-1})/2 \rceil + 1 \\ &= lower(X_{j-1}) + 1 \\ &\qquad\qquad \text{(uma vez que } lower(X_{j-1}) = \lceil \rho_0(X_{j-1})/2 \rceil). \end{aligned}$$

No caso em que a Condição (b) é satisfeita,

$$\begin{aligned} lower(X_j) &= \lceil (\rho_0(X_{j-1}) + \rho_0(C_j))/2 \rceil \\ &= \lceil (\rho_0(X_{j-1}) + 1)/2 \rceil \\ &\qquad\qquad \text{(uma vez que } \rho_0(C_j) = 1) \\ &= \lceil \rho_0(X_{j-1})/2 \rceil + 1 \\ &\qquad\qquad \text{(uma vez que } \rho_0(X_{j-1}) \text{ é um número par)} \\ &= lower(X_{j-1}) + 1 \\ &\qquad\qquad \text{(uma vez que } lower(X_{j-1}) = \lceil \rho_0(X_{j-1})/2 \rceil). \end{aligned}$$

Se a Condição (c) ou (d) é satisfeita, então, o limite inferior $lower(X_j) = \lceil (\rho_1(X_{j-1}) + \rho_1(C_j))/2 \rceil$, uma vez que $\rho_1(X_{j-1}) \geq \rho_0(X_{j-1})$ e $\rho_1(C_j) \geq \rho_0(C_j)$. Além disso, pelo Teorema 4.18, $lower(X_{j-1}) = \lceil \rho_1(X_{j-1})/2 \rceil$, uma vez que $\rho_1(X_{j-1}) \geq \rho_0(X_{j-1})$.

Assim, se a Condição (c) ou (d) é satisfeita, o resultado $lower(X_j) = lower(X_{j-1}) + 1$ pode ser provado de uma maneira análoga à prova das Condições (a) e (b), respectivamente, substituindo-se $\rho_0(X_{j-1})$ por $\rho_1(X_{j-1})$ e $\rho_0(C_j)$ por $\rho_1(C_j)$. ■

Seja A um EE. Seja $\mathsf{E} = [X_0, X_1, \cdots, X_j]$ uma seqüência elemento retangular de A. Se $\mathsf{R} = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é uma seqüência retangular geradora de E, então, pela definição de seqüência elemento retangular, R é uma decomposição seqüencial de X_j, ou seja, $X_j = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_j$. Dessa forma, pela Proposição 4.17, $\rho(X_j) = \rho(C_1) + \rho(C_2) + \cdots + \rho(C_j)$. Logo, uma vez que $c_{x,y}(\mathsf{R})$ é o número de EE's em R cujos vetores retangulares são iguais a (x, y), então, obviamente,

$$\rho(X_j) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} c_{x,y}(\mathsf{R}) \cdot (x, y).$$

Portanto, cada coordenada de $\rho(X_j)$ pode ser escrita como

$$\rho_0(X_j) = 2\,[c_{2,2}(\mathsf{R}) + c_{2,1}(\mathsf{R}) + c_{2,0}(\mathsf{R})] + c_{1,2}(\mathsf{R}) + c_{1,1}(\mathsf{R}) + c_{1,0}(\mathsf{R}); \quad (1)$$
$$\rho_1(X_j) = 2\,[c_{2,2}(\mathsf{R}) + c_{1,2}(\mathsf{R}) + c_{0,2}(\mathsf{R}) + c_{2,1}(\mathsf{R}) + c_{1,1}(\mathsf{R}) + c_{0,1}(\mathsf{R}). \quad (2)$$

Dado um EE, seja $\mathsf{R} = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ uma seqüência retangular de A. Se $\rho_0(C_j) + \rho_1(C_j) = x$, então, pela ordem escolhida para construir SeqQ (e, conseqüentemente, $\mathsf{SeqInv}[A]$), para todo elemento C_i de R, $\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq x$. Assim, por exemplo, se $\rho_0(C_j) + \rho_1(C_j) = 3$, então, para todo elemento C_i de R, $\rho_0(C_i) + \rho_1(C_i) \geq 3$. Dessa forma, neste mesmo exemplo, $c_{0,2}(\mathsf{R}) = c_{2,0}(\mathsf{R}) = c_{1,1}(\mathsf{R}) = c_{0,1}(\mathsf{R}) = c_{1,0}(\mathsf{R}) = 0$. Além disso, se $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ é a seqüência elemento retangular gerada por R, então, pelas Igualdades (1) e (2), $\rho_0(X_j) = 2\,[c_{2,2}(\mathsf{R}) + c_{2,1}(\mathsf{R})] + c_{1,2}(\mathsf{R})$ e $\rho_1(X_j) = 2\,[c_{2,2}(\mathsf{R}) + c_{1,2}(\mathsf{R})] + c_{2,1}(\mathsf{R})$.

Agora, usando os fatos discutidos acima, podemos provar o fato de que, dado um EE A, para qualquer seqüência elemento retangular $[X_0, X_1, \cdots, X_j]$ de A, temos que $lower(X_j) = j$.

5.8.2.1 Prova da Proposição 5.16

Provaremos este teorema por indução em j. Quando $j = 0$, é óbvio que $lower(X_0) = \lceil \max\{0, 0\}/2 \rceil = 0$, uma vez que X_0 é o conjunto unitário que contém a origem. Suponha, por hipótese de indução, que este teorema vale para $j - 1$, ou seja, $lower(X_{j-1}) = \lceil \max\{\rho_0(X_{j-1}), \rho_1(X_{j-1})\}/2 \rceil = j - 1$. Vamos provar que $lower(X_j) = j$.

Se $\mathsf{R}_j = \mathsf{R} = [C_1, C_2, \cdots, C_j]$ é uma seqüência retangular de A, então, por definição, $\mathsf{R}_{j-1} = [C_1, C_2, \cdots, C_{j-1}]$ é uma decomposição seqüencial de X_{j-1}. Além disso, se $\rho(C_j) = (a, b)$, então, claramente,

$$c_{x,y}(\mathsf{R}_j) = \begin{cases} c_{x,y}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1 & \text{se } (x, y) = (a, b); \\ c_{x,y}(\mathsf{R}_{j-1}) & \text{se } (x, y) \neq (a, b). \end{cases} \quad (3)$$

Agora, considere $X_j = X_{j-1} \oplus C_j$. Pela Proposição 4.17, $\rho(X_j) = \rho(X_{j-1}) + \rho(C_j)$. Temos então que analisar quatro casos possíveis para C_j: $\rho_0(C_j) + \rho_1(C_j) = 4, 3, 2$ ou 1.

Caso 1: $\rho_0(C_j) + \rho_1(C_j) = 4$

Neste caso, $\rho_0(C_j) = \rho_1(C_j) = 2$. Dessa forma, se $\rho_0(X_{j-1}) \geq \rho_1(X_{j-1})$, então a Condição (a) do Lema 5.25 é satisfeita. Caso contrário, a Condição (c) do Lema 5.25 é satisfeita. Logo, uma vez que uma das condições do Lema 5.25 é satisfeita, $lower(X_j) = lower(X_{j-1}) + 1 = (j-1) + 1 = j$.

Caso 2: $\rho_0(C_j) + \rho_1(C_j) = 3$

Neste caso, temos duas possibilidades: $\rho(C_j) = (1,2)$ ou $\rho(C_j) = (2,1)$. Provaremos somente a primeira. A prova para $\rho(C_j) = (2,1)$ pode ser feita de uma maneira similar.

Uma vez que $\rho(C_j) = (1,2)$, pela Igualdade (3), $c_{1,2}(\mathsf{R}_j) = c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1$; e, para todo $(x,y) \neq (1,2)$, $c_{x,y}(\mathsf{R}_j) = c_{x,y}(\mathsf{R}_{j-1})$. Conseqüentemente, uma vez que $c_{1,2}(\mathsf{R}_j) = c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1$, $c_{1,2}(\mathsf{R}_j) > 0$, e, pela Restrição (k) da definição de seqüência retangular, $c_{2,1}(\mathsf{R}_j) = 0$. Uma vez que $c_{2,1}(\mathsf{R}_j) = c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1})$, então $c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$.

Pela ordem escolhida para construir SeqQ, uma vez que $\rho_0(C_j) + \rho_1(C_j) = 3$, temos que $c_{2,0}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{0,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{1,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{1,0}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{0,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$.

Assim, aplicando as Igualdades (1) e (2) para X_{j-1}, temos que

$$\rho_0(X_{j-1}) = 2\, c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) \text{ e}$$
$$\rho_1(X_{j-1}) = 2\, [c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1})].$$

Logo, $\rho_1(X_{j-1}) \geq \rho_0(X_{j-1})$. Dessa forma, uma vez que $\rho(C_j) = (1,2)$, então a Condição (d) do Lema 5.25 é satisfeita. Portanto, $lower(X_j) = lower(X_{j-1}) + 1 = (j-1) + 1 = j$.

Caso 3: $\rho_0(C_j) + \rho_1(C_j) = 2$

Neste caso, temos três possibilidades: $(3.a)$ $\rho(C_j) = (1,1)$; $(3.b)$ $\rho(C_j) = (2,0)$ ou $(3.c)$ $\rho(C_j) = (0,2)$.

$(3.a)$ Suponha que $\rho(C_j) = (1,1)$. Assim, pela Igualdade (3), temos que $c_{1,1}(\mathsf{R}_j) = c_{1,1}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1$; e $c_{x,y}(\mathsf{R}_j) = c_{x,y}(\mathsf{R}_{j-1})$, para todo $(x,y) \neq (1,1)$. Conseqüentemente, uma vez que $c_{1,1}(\mathsf{R}_j) = c_{1,1}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1$, $c_{1,1}(\mathsf{R}_j) > 0$. Dessa forma, pela Restrição (f) da definição de seqüência retangular, temos que $c_{1,1}(\mathsf{R}_j) = 1$. Logo, uma vez que $c_{1,1}(\mathsf{R}_j) = c_{1,1}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1$, temos que $c_{1,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$.

Uma vez que $\rho_0(C_j) + \rho_1(C_j) = 2$ e pela ordem escolhida para construir a seqüência SeqQ, temos que $c_{1,0}(\mathsf{R}_j) = c_{0,1}(\mathsf{R}_j) = 0$. Assim, pela Igualdade (3), $c_{1,0}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{0,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$.

Como $c_{1,1}(\mathsf{R}_j) = 1$, então, pelas Restrições (g) e (i) da definição de seqüência retangular, $c_{2,0}(\mathsf{R}_j) = c_{0,2}(\mathsf{R}_j) = 0$. Conseqüentemente, pela Igualdade (3), $c_{2,0}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{0,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$. Portanto, $c_{1,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{1,0}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{0,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{2,0}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{0,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$. Aplicando as Igualdades (1) e (2) para X_{j-1}, temos que

$$\rho_0(X_{j-1}) = 2\, [c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1})] + c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) \text{ e}$$
$$\rho_1(X_{j-1}) = 2\, [c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1})] + c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}).$$

Temos dois subcasos para analisar: $(3.a.i)$ $c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$ e $c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$; e $(3.a.ii)$ $c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) > 0$ ou $c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}) > 0$.

(3.a.i) Se $c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$ e $c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$, então $\rho_0(X_{j-1}) = 2\ c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1})$ e $\rho_1(X_{j-1}) = 2\ c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1})$. Logo, $\rho_0(X_{j-1}) = \rho_1(X_{j-1})$ e $\rho_0(X_{j-1})$ é um número par. Dessa forma, uma vez que $\rho(C_j) = (1,1)$, então a Condição (b) do Lema 5.25 é satisfeita. Portanto, $lower(X_j) = lower(X_{j-1}) + 1 = (j-1) + 1 = j$.

(3.a.ii) Supunha que $c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) > 0$ ou $c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}) > 0$. Se $c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) > 0$, então, pela Restrição (k) da definição de seqüência retangular, $c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$. Assim, $\rho_0(X_{j-1}) = 2\ c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1})$ e $\rho_1(X_{j-1}) = 2\ [c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1})]$. Logo, $\rho_1(X_{j-1}) \geq \rho_0(X_{j-1})$ e $\rho_1(X_{j-1})$ é um número par. Dessa forma, uma vez que $\rho(C_j) = (1,1)$, então a Condição (d) do Lema 5.25 é satisfeita. Portanto, $lower(X_j) = lower(X_{j-1}) + 1 = (j-1) + 1 = j$.

Se $c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}) > 0$, pode-se provar, de uma maneira similar ao caso $c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) > 0$, que $lower(X_j) = j$.

(3.b) Agora, suponha que $\rho(C_j) = (2,0)$. Assim, pela Igualdade (3), $c_{2,0}(\mathsf{R}_j) = c_{2,0}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1$; e $c_{x,y}(\mathsf{R}_j) = c_{x,y}(\mathsf{R}_{j-1})$, para todo $(x,y) \neq (2,0)$. Conseqüentemente, uma vez que $c_{2,0}(\mathsf{R}_j) = c_{2,0}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1$, $c_{2,0}(\mathsf{R}_j) > 0$. Dessa forma, pela Restrição (a) da definição de seqüência retangular, $c_{0,2}(\mathsf{R}_j) = 0$ e, pelas Restrições (g) e (h) da definição de seqüência retangular, $c_{1,1}(\mathsf{R}_j) = c_{1,2}(\mathsf{R}_j) = 0$. Assim, pela Igualdade (3), $c_{0,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{1,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$. Desta forma, aplicando as Igualdades (1) e (2) para X_{j-1}, temos que

$$\rho_0(X_{j-1}) = 2\ [c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{2,0}(\mathsf{R}_{j-1})] \text{ e}$$
$$\rho_1(X_{j-1}) = 2\ c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}).$$

Logo, $\rho_0(X_{j-1}) \geq \rho_1(X_{j-1})$ Assim, uma vez que $\rho(C_j) = (2,0)$, então a Condição (a) do Lema 5.25 é satisfeita. Portanto, $lower(X_j) = lower(X_{j-1}) + 1 = (j-1) + 1 = j$.

(3.c) A prova para o caso $\rho(C_{j-1}) = (0,2)$ pode ser feita de uma maneira análoga ao caso $\rho(C_{j-1}) = (2,0)$.

<u>*Caso 4*</u>: $\rho_0(C_j) + \rho_1(C_j) = 1$

Neste caso, temos duas possibilidades: $\rho(C_j) = (1,0)$ ou $\rho(C_j) = (0,1)$. Provaremos somente a primeira. A prova para $\rho(C_j) = (0,1)$ pode ser feita de uma maneira similar.

Uma vez que $\rho(C_j) = (1,0)$, pela Igualdade (3), $c_{1,0}(\mathsf{R}_j) = c_{1,0}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1$ e, para todo $(x,y) \neq (1,0)$, $c_{x,y}(\mathsf{R}_j) = c_{x,y}(\mathsf{R}_{j-1})$. Conseqüentemente, uma vez que $c_{1,0}(\mathsf{R}_j) = c_{1,0}(\mathsf{R}_{j-1}) + 1$, $c_{1,0}(\mathsf{R}_j) > 0$. Assim, pela Restrição (f) da definição de seqüência retangular, $c_{0,1}(\mathsf{R}_j) = c_{1,1}(\mathsf{R}_j) = 0$ e $c_{1,0}(\mathsf{R}_j) = 1$. Dessa forma, pela Igualdade (3), $c_{1,0}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{0,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{1,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$. Uma vez que, $c_{1,0}(\mathsf{R}_j) > 0$, pelas Restrições ($c$) e ($e$) da definição de seqüência retangular, $c_{0,2}(\mathsf{R}_j) = c_{1,2}(\mathsf{R}_j) = 0$. Assim, pela Igualdade (3), $c_{0,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$. Portanto, $c_{1,0}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{0,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{1,1}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{0,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = c_{1,2}(\mathsf{R}_{j-1}) = 0$.

Logo, aplicando as Igualdades (1) e (2) para X_{j-1}, temos que

$$\rho_0(X_{j-1}) = 2\ [c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{2,0}(\mathsf{R}_{j-1})] \text{ e}$$
$$\rho_1(X_{j-1}) = 2\ c_{2,2}(\mathsf{R}_{j-1}) + c_{2,1}(\mathsf{R}_{j-1}).$$

Assim, $\rho_0(X_{j-1}) \geq \rho_1(X_{j-1})$ e $\rho_0(X_{j-1})$ é um número par. Desta forma, uma vez que $\rho(C_j) = (1,0)$, então a Condição (b) do Lema 5.25 é satisfeita. Portanto, $lower(X_j) = lower(X_{j-1}) + 1 = (j-1) + 1 = j$.