Capítulo 6

Decomposição de Elementos Estruturantes Simplesmente Conexos

Park e Chin [35] desenvolveram um complexo algoritmo para encontrar uma decomposição ótima de EE's simplesmente conexos (isto é, EE's 8-conexos que não contém buracos) impondo a restrição de que todos elementos nesta decomposição sejam também simplesmente conexos. Neste capítulo, mostraremos que existem famílias infinitas de EE's simplesmente conexos que têm uma decomposição segundo a definição dada no Capítulo 4, mas não são decomponíveis segundo a definição de Park e Chin. Além disso, faremos um comentário sobre a complexidade do algoritmo de Park e Chin, uma vez que uma análise da complexidade de tempo do algoritmo não foi feita no trabalho deles.

6.1 O Algoritmo de Park e Chin

Park e Chin [35] apresentaram uma extensão do algoritmo do Xu (que decompõe EE's convexos) para decompor EE's *simplesmente conexos* (isto é, EE's 8-conexos que não contêm buracos), impondo a restrição de que todos elementos na decomposição sejam também simplesmente conexos.

O algoritmo deles é bastante complexo e pode ser basicamente dividido em três passos. Seja A um EE simplesmente conexo. Então, os passos do algoritmo de Park e Chin são dados a seguir.

Passo 1 : O algoritmo verifica se A satisfaz algumas condições necessárias para decomposição. Se estas condições não são satisfeitas, então A não tem decomposição e o algoritmo pára.

Passo 2 : O algoritmo monta um sistema linear de inequações com um número fixo de variáves e inicia uma busca por uma solução inteira para este sistema.

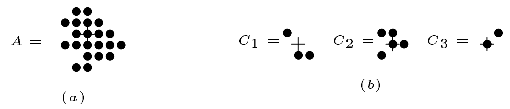

Figura 6.1: (a) Um EE A (b) Uma decomposição de A.

Se nenhuma solução inteira é encontrada, então A não tem decomposição e o algoritmo pára. Caso contrário, o algoritmo obtém uma solução do sistema e vai para o passo seguinte.

Passo 3 : A partir da solução encontrada no passo anterior, o algoritmo procura uma decomposição ótima de A usando uma extensão do intricado processo de otimização (Passo 2) do algoritmo do Xu [49].

O ponto crucial da complexidade do algoritmo de Park e Chin está no Passo 2. No trabalho deles, a maneira como o algoritmo busca por uma solução inteira do sistema linear não é mencionada. Sabemos que, teoricamente, existe um algoritmo polinomial para encontrar soluções inteiras de sistemas de inequações lineares com um número fixo de variáveis [40, p. 256]. No entanto, no trabalho deles, Park e Chin [35] não analisaram a complexidade de tempo do algoritmo deles.

Estudando o problema da decomposição de EE's, observamos que existem alguns EE's simplesmente conexos, que não são decomponíveis segundo a definição dada por Park e Chin, mas que podem ter uma decomposição segundo a definição dada no Capítulo 4, ou seja, uma decomposição como uma seqüência de subconjuntos do quadrado elementar (sem a restrição que estes subconjuntos sejam simplesmente conexos).

Por exemplo, na Figura 6.1.a, apresentamos um EE simplesmente conexo A que não é decomponível segundo a definição de Park e Chin [35, Exemplo 3, p. 10]. Mas, se retirarmos a imposição de que os subconjuntos na decomposição sejam simplesmente conexos, então A tem uma decomposição que está apresentada na Figura 6.1.b. Note que o primeiro subconjunto nesta decomposição não é simplemente conexo.

Neste capítulo, mostraremos que existem famílias infinitas de EE's simplesmente conexos que têm decomposição, mas que não são decomponíveis segundo a definição de Park e Chin. Daremos também alguns comentários sobre a complexidade do algoritmo deles.

Seguindo esta breve introdução, a Seção 6.2 apresenta algumas famílias infinitas de EE's e prova que os EE's pertencentes a essas famílias são simplesmente conexos e que não têm decomposição segundo a definição de Park and Chin. A Seção 6.3 fornece alguns comentários sobre a complexidade de tempo do algoritmo de Park e Chin. Finalmente, na Seção 6.4 apresentamos algumas conclusões deste capítulo.

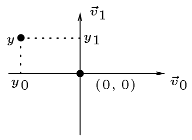

Figura 6.2: Os eixos Cartesianos $\vec{v}_0$ e $\vec{v}_1$.

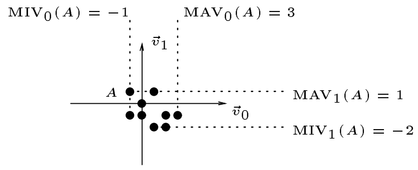

Figura 6.3: Um EE A com os eixos $\vec{v}_0$ e $\vec{v}_1$.

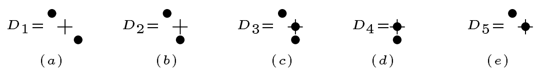

Figura 6.4: $(a) - (e)$ Os EE's D_1, D_2, D_3, D_4 e D_5.

6.2 Famílias Infinitas de Elementos Estruturantes

Neste capítulo, consideraremos dois eixos Cartesianos $\vec{v}_0$ e $\vec{v}_1$ que intersectam a origem de $\mathbb{Z}^2$ e cujas inclinações são, respectivamente, 0 e 90 graus (veja a Figura 6.2). Para um ponto $x \in \mathbb{Z}^2$, denotaremos x_0 e x_1 as projeções ortogonais de x nos eixos Cartesianos $\vec{v}_0$ e $\vec{v}_1$, respectivamente. Por exemplo, as projeções ortogonais do ponto $y = (-5, 2) \in \mathbb{Z}^2$ são $y_0 = -5$ e $y_1 = 2$ (veja a Figura 6.2). Note que $\vec{v}_0 = \vec{u}_2$ e $\vec{v}_1 = -\vec{u}_0$, onde $\vec{u}_0$ e $\vec{u}_2$ são os eixos Cartesianos definidos no Capítulo 4 (veja estas definições na página 47).

Seja A um EE. Para $i = 0, 1$, sejam $\mathrm{MAV}_i(A)$ e $\mathrm{MIV}_i(A)$, respectivamente, as projeções ortogonais máxima e mínima sobre os eixos Cartesianos $\vec{v}_i$ dentre todos pontos de A, isto é, $\mathrm{MAV}_i(A) = \max\{x_i : x \in A\}$ e $\mathrm{MIV}_i(A) = \min\{x_i : x \in A\}$. Por exemplo, as projeções ortogonais máxima e mínima do EE A apresentado na Figura 6.3 são, $\mathrm{MAV}_0(A) = 3$, $\mathrm{MAV}_1(A) = 1$, $\mathrm{MIV}_0(A) = -1$ e $\mathrm{MIV}_1(A) = -2$.

Note que $\mathrm{MAV}_0(A) = \mathrm{MAX}_2(A)$, $\mathrm{MIV}_0(A) = \mathrm{MIN}_2(A)$, $\mathrm{MAV}_1(A) = -\mathrm{MAX}_0(A)$ e $\mathrm{MIV}_1(A) = -\mathrm{MIN}_0(A)$, onde $\mathrm{MAX}_2(A)$, $\mathrm{MIN}_2(A)$, $\mathrm{MAX}_0(A)$ e $\mathrm{MIN}_0(A)$ são os valores definidos no Capítulo 4 (veja estas definições na página 47).

A seguir apresentamos duas propriedades de $\mathrm{MAV}_i(A)$ e $\mathrm{MIV}_i(A)$, dadas pelos Lemas 6.1 e 6.2, que são necessárias para a construção das famílias de EE's simplesmente conexos. O Lema 6.1 (respectivamente, Lema 6.2) é uma conseqüência imediata do Lema 4.10 (respectivamente, Lema 4.11).

Lema 6.1 *Se X e Y são EE's, então* $\mathrm{MAV}_i(X \oplus Y) = \mathrm{MAV}_i(X) + \mathrm{MAV}_i(Y)$ *e* $\mathrm{MIV}_i(X \oplus Y) = \mathrm{MIV}_i(X) + \mathrm{MIV}_i(Y)$.

Lema 6.2 *Se X é um EE e $h \in \mathbb{Z}^2$, então, para todo $i \in \{0, 1\}$,* $\mathrm{MAV}_i(X_h) = \mathrm{MAV}_i(X) + h_i$ *e* $\mathrm{MIV}_i(X_h) = \mathrm{MIV}_i(X) + h_i$.

Para construir as famílias infinitas de EE's simplesmente conexos, considere os seguin-

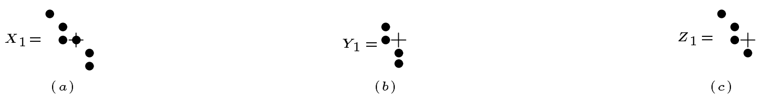

Figura 6.5: $(a) - (c)$ EE's X_1, Y_1 e Z_1.

tes EE's: $D_1 = \{d_1, d_2\}$, $D_2 = \{d_1, d_4\}$, $D_3 = \{d_1, d_3, d_4\}$, $D_4 = \{d_3, d_4\}$ e $D_5 = \{d_1, d_3\}$, onde $d_1 = (-1, 1)$, $d_2 = (1, -1)$, $d_3 = (0, 0)$ e $d_4 = (0, -1)$. Estes EE's estão apresentados na Figura 6.4. Em particular, observe que $\mathrm{MAV}_0(D_3) = \mathrm{MAV}_0(D_4) = \mathrm{MIV}_0(D_4) = \mathrm{MAV}_0(D_5) = 0$ e $\mathrm{MIV}_0(D_3) = \mathrm{MIV}_0(D_5) = -1$.

Agora, para todo inteiro $i > 0$, considere os EE's $X_i = iD_1 \oplus D_3$, $Y_i = iD_2 \oplus D_4$ e $Z_i = iD_2 \oplus D_5$. Por exemplo, os EE's X_1, Y_1 e Z_1 estão apresentados na Figura 6.5 e os EE's X_6, Y_7 e Z_7 podem ser vistos na Figura 6.9.

Mostraremos que as famílias $\mathcal{X} = \{X_i : i > 0\}$, $\mathcal{Y} = \{Y_i : i > 0\}$ e $\mathcal{Z} = \{Z_i : i > 0\}$ são famílias de EE's simplesmente conexos que têm uma decomposição, mas não são decomponíveis segundo a definição de Park e Chin.

Dividimos esta seção em duas partes. Na primeira, mostraremos que cada EE em $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ são simplesmente conexos. Na segunda parte, provaremos que qualquer decomposição de X_i, Y_i e Z_i contém pelo menos um elemento que não é simplesmente conexo.

6.2.1 Famílias de Elementos Estruturantes Simplesmente Conexos

Para provar que os elementos das famílias $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ são simplesmente conexos, precisamos do seguinte resultado.

Proposição 6.3 *Sejam X e Y dois EE's simplesmente conexos. tais que os pontos $x = (\mathrm{MAV}_0(X), \mathrm{MIV}_1(X))$ e $y = (\mathrm{MIV}_0(Y), \mathrm{MAV}_1(Y))$ estão em X e Y, respectivamente. Se $0 \leq \mathrm{MIV}_0(Y) - \mathrm{MAV}_0(X) \leq 1$ e $0 \leq \mathrm{MIV}_1(X) - \mathrm{MAV}_1(Y) \leq 1$, então $X \cup Y$ é também um EE simplesmente conexo.*

Prova: Podemos ver facilmente que se X e Y satisfazem as restrições $0 \leq \mathrm{MIV}_0(Y) - \mathrm{MAV}_0(X) \leq 1$ e $0 \leq \mathrm{MIV}_1(X) - \mathrm{MAV}_1(Y) \leq 1$, então temos somente quatro possibilidades para X e Y, como mostrado na Figura 6.6. Uma vez que X e Y são EE's simplesmente conexos e $x \in X$ e $y \in Y$, então claramente $X \cup Y$ é também um EE simplesmente conexo. ∎

Note que, para todo inteiro $i > 0$, $iD_1 = \{h_0, h_1, \ldots, h_i\}$ e $iD_2 = \{g_0, g_1, \ldots, g_i\}$, onde $h_0 = g_0 = (-i, i)$ e, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, i\}$, $h_j = h_{j-1} + (2, -2)$ e $g_j = g_{j-1} + (1, -2)$. Por exemplo, a Figura 6.7 mostra os EE's iD_1 e iD_2. Observando esta figura, podemos ver facilmente que $\mathrm{MAV}_0(iD_1) = i$, $\mathrm{MIV}_1(iD_1) = -i$, $\mathrm{MAV}_0(iD_2) = 0$ e $\mathrm{MIV}_1(iD_2) = -i$.

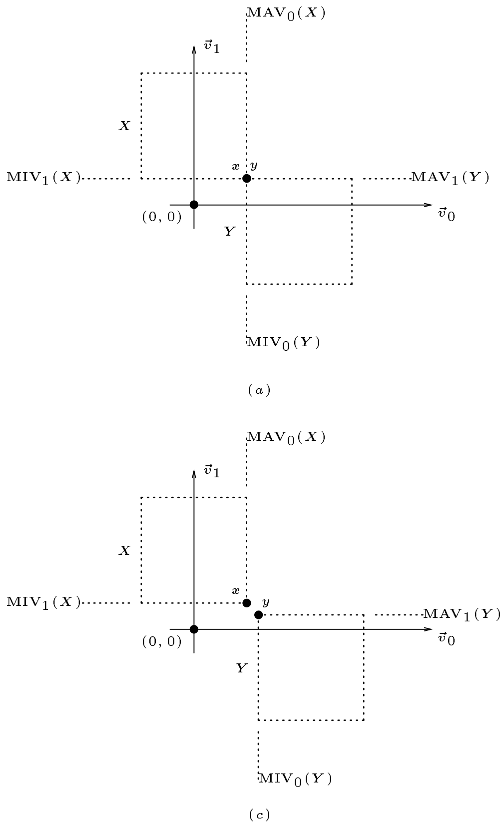

Figura 6.6: $(a) - (d)$ As quatro possibilidades para X e Y.

Além disso, para todo $i > 0$, iD_1 e iD_2 não são EE's simplesmente conexos. Observe também que $d_2 - d_1 = (2, -2)$ e $d_4 - d_1 = (1, -2)$. Assim, podemos escrever as expressões para h_j e g_j como $h_j + d_1 = h_{j-1} + d_2$ e $g_j + d_1 = g_{j-1} + d_4$.

A Proposição 6.4 fornece uma propriedade dos EE's X_i, Y_i e Z_i. O Teorema 6.5 prova que os EE's X_i, Y_i e Z_i são simplesmente conexos.

Proposição 6.4 *Para todo inteiro $i > 0$,*

$$\begin{array}{ll} (a) & X_{i+1} = (X_i)_{d_1} \cup (D_3)_{p_i}, \\ (b) & Y_{i+1} = (Y_i)_{d_1} \cup (D_4)_{q_i}, \\ (c) & Z_{i+1} = (Z_i)_{d_1} \cup (D_5)_{q_i}, \end{array}$$

onde, $p_i = (i+1, -i-1)$ e $q_i = (0, -i-1)$.

Prova: Provaremos somente a primeira igualdade. As outras podem ser provadas de uma maneira análoga. Dividiremos esta prova em duas partes. Na primeira parte, pro-

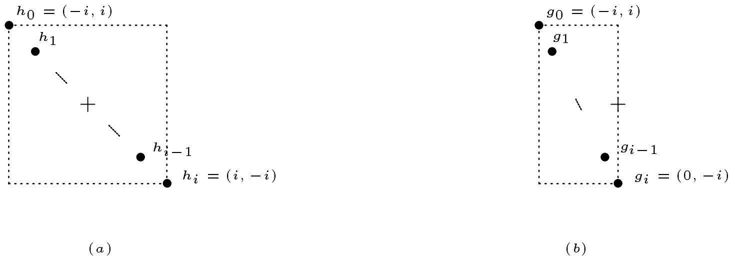

Figura 6.7: $(a) - (b)$ EE's iD_1 e iD_2.

varemos que $(i+1)D_1 = iD_1 \oplus D_1 = (iD_1)_{d_1} \cup \{p_i\}$ e, na segunda, mostraremos que $X_{i+1} = (X_i)_{d_1} \cup (D_3)_{p_i}$.

$$\begin{aligned}
iD_1 \oplus D_1 &= \{h_0, h_1, \cdots, h_{i-1}, h_i\} \oplus \{d_1, d_2\} \\
&= \{h_0 + d_1, \cdots, h_{i-1} + d_1, h_i + d_1\} \cup \{h_0 + d_2, \cdots, h_{i-1} + d_2, h_i + d_2\} \\
&\qquad \text{(pela definição da adição de Minkowski)} \\
&= \{h_0 + d_1, \cdots, h_i + d_1, h_i + d_2\} \\
&\qquad \text{(uma vez que } h_j + d_1 = h_{j-1} + d_2 \text{, para todo } j > 0\text{)} \\
&= \{h_0, h_1, \cdots, h_i\}_{d_1} \cup \{h_i + d_2\} \\
&= (iD_1)_{d_1} \cup \{p_i\} \\
&\qquad \text{(uma vez que } p_i = (i+1, -i-1) = h_i + d_2\text{).}
\end{aligned}$$

Agora, o conjunto X_{i+1}.

$$\begin{aligned}
X_{i+1} &= (i+1)D_1 \oplus D_3 \\
&= (iD_1 \oplus D_1) \oplus D_3 \\
&= ((iD_1)_{d_1} \cup \{p_i\}) \oplus D_3 \\
&= ((iD_1)_{d_1} \oplus D_3) \cup (\{p_i\} \oplus D_3) \\
&= ((iD_1)_{d_1} \oplus D_3) \cup (D_3)_{p_i} \\
&\qquad \text{(pela Proposição 3.8.}b\text{)} \\
&= (iD_1 \oplus D_3)_{d_1} \cup (D_3)_{p_i} \\
&\qquad \text{(pela Proposição 3.8.}c\text{)} \\
&= (X_i)_{d_1} \cup (D_3)_{p_i}
\end{aligned}$$

■

Na Figura 6.8, mostramos os EE's $X_{i+1} = (X_i)_{d_1} \cup (D_3)_{p_i}$, $Y_{i+1} = (Y_i)_{d_1} \cup (D_4)_{q_i}$ e $Z_{i+1} = (Z_i)_{d_1} \cup (D_5)_{q_i}$.

Agora, estamos prontos para provar que, para $i > 0$, os EE's X_i, Y_i e Z_i são simplesmente conexos.

Teorema 6.5 *Para todo inteiro $i > 0$, X_i, Y_i e Z_i são EE's simplesmente conexos.*

Prova: Provaremos que para todo inteiro $i > 0$, X_i é simplesmente conexo. De uma maneira análoga, pode-se provar que Y_i e Z_i são também EE's simplesmente conexos.

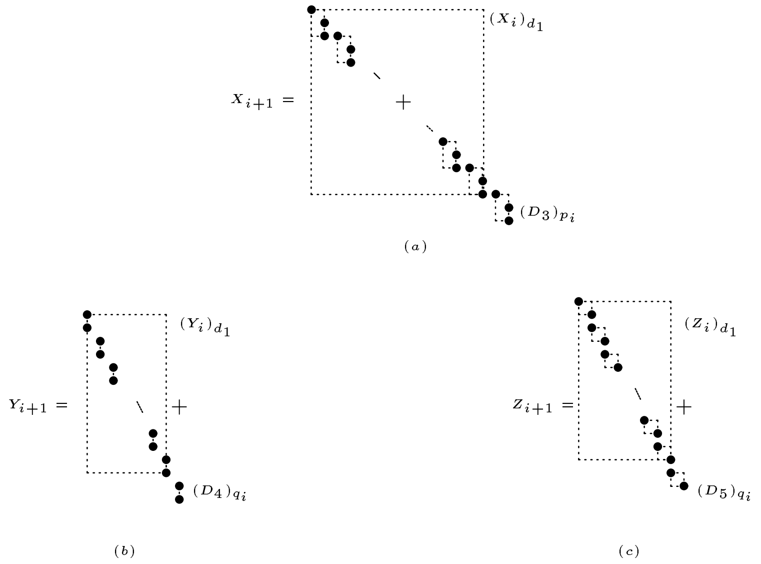

Figura 6.8: (a) $X_{i+1} = (X_i)_{d_1} \cup (D_3)_{p_i}$ (b) $Y_{i+1} = (Y_i)_{d_1} \cup (D_4)_{q_i}$ e (c) $Z_{i+1} = (Z_i)_{d_1} \cup (D_5)_{q_i}$.

A prova será por indução em i. Se $i = 1$, X_1 é obviamente simplesmente conexo (veja a Figura 6.5). Agora, suponha por hipótese de indução que, para todo $i > 1$, X_i é simplesmente conexo. Mostraremos que X_{i+1} é também simplesmente conexo.

Pela Proposição 6.4, $X_{i+1} = (X_i)_{d_1} \cup (D_3)_{p_i}$. Os EE's $(D_3)_{p_i}$ (veja a Figura 6.4) e $(X_i)_{d_1}$ (por hipótese de indução) são simplesmente conexos. Observando a Figura 6.8, podemos ver que $0 \leq \mathrm{MIV}_0((D_3)_{p_i}) - \mathrm{MAV}_0((X_i)_{d_1}) \leq 1$ e $0 \leq \mathrm{MIV}_1((X_i)_{d_1}) - \mathrm{MAV}_1((D_3)_{p_i}) \leq 1$ e os pontos $x = (\mathrm{MAV}_0((X_i)_{d_1}), \mathrm{MIV}_1((X_i)_{d_1}))$ e $y = (\mathrm{MIV}_0((D_3)_{p_i}), \mathrm{MAV}_1((D_3)_{p_i}))$ estão em $(X_i)_{d_1}$ e $(D_3)_{p_i}$, respectivamente. Assim, pela Proposição 6.3, $X_{i+1} = (X_i)_{d_1} \cup (D_3)_{p_i}$ é um EE simplesmente conexo. ∎

6.2.2 Um Elemento em qualquer Decomposição não é Simplesmente Conexo

Para mostrar que um elemento em qualquer decomposição de X_i, Y_i e Z_i não é simplesmente conexo, precisamos antes estudar algumas propriedades desses EE's. Note que, por definição de X_i, Y_i e Z_i, podemos escrever as expressões para X_{i+1}, Y_{i+1} e Z_{i+1} em termos da união de duas translações de X_i, Y_i e Z_i, respectivamente. Mais formalmente,

(a) $X_{i+1} = (iD_1 \oplus D_3) \oplus D_1 = X_i \oplus D_1 = X_i \oplus \{d_1, d_2\} = (X_i)_{d_1} \cup (X_i)_{d_2}$;
(b) $Y_{i+1} = (iD_2 \oplus D_4) \oplus D_2 = Y_i \oplus D_2 = Y_i \oplus \{d_1, d_4\} = (Y_i)_{d_1} \cup (Y_i)_{d_4}$;
(c) $Z_{i+1} = (iD_2 \oplus D_5) \oplus D_2 = Z_i \oplus D_2 = Z_i \oplus \{d_1, d_4\} = (Z_i)_{d_1} \cup (Z_i)_{d_4}$.

A próxima proposição fornece uma propriedade interessante de $(X_i)_{d_1}$ e $(X_i)_{d_2}$; $(Y_i)_{d_1}$

e $(Y_i)_{d_4}$; $(Z_i)_{d_1}$ e $(Z_i)_{d_4}$.

Proposição 6.6 *Para todo $i > 0$,*

$$\begin{array}{llll} (a) & (X_i)_{d_1} - (X_i)_{d_2} \subseteq (D_3)_{-p_i} & e & (X_i)_{d_2} - (X_i)_{d_1} \subseteq (D_3)_{p_i}, \\ (b) & (Y_i)_{d_1} - (Y_i)_{d_4} \subseteq (D_4)_{-p_i} & e & (Y_i)_{d_4} - (Y_i)_{d_1} \subseteq (D_4)_{q_i}, \\ (c) & (Z_i)_{d_1} - (Z_i)_{d_4} \subseteq (D_4)_{-p_i} & e & (Z_i)_{d_4} - (Z_i)_{d_1} \subseteq (D_4)_{q_i}, \end{array}$$

onde $p_i = (i+1, -i-1)$ e $q_i = (0, -i-1)$.

Prova: Provaremos somente as inclusões dadas em (a). As outras podem ser provadas de uma maneira similar.

Observe que podemos escrever as expressões de $(X_i)_{d_1}$ e $(X_i)_{d_2}$ como

$$\begin{array}{rcl} (X_i)_{d_2} & = & (iD_1 \oplus D_3)_{d_2} \\ & = & (iD_1)_{d_2} \oplus D_3 \\ & & \hfill \text{(pela Proposição 3.8.}c) \\ & = & \{h_0 + d_2, h_1 + d_2, \cdots, h_{i-1} + d_2, h_i + d_2\} \oplus D_3 \\ & = & \{h_1 + d_1, h_2 + d_1, \cdots, h_i + d_1, h_i + d_2\} \oplus D_3 \\ & & \hfill \text{(uma vez que } h_j + d_1 = h_{j-1} + d_2, \text{ para todo } j > 0) \\ & = & (\{h_i + d_2\} \cup \{h_1 + d_1, h_2 + d_1, \cdots, h_i + d_1\}) \oplus D_3 \\ & = & (D_3)_{h_i + d_2} \cup R_i, \text{ onde } R_i = \{h_1 + d_1, h_2 + d_1, \cdots, h_i + d_1\} \oplus D_3, \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} (X_i)_{d_1} & = & (iD_1 \oplus D_3)_{d_1} \\ & = & (iD_1)_{d_1} \oplus D_3 \\ & & \hfill \text{(pela Proposição 3.8.}c) \\ & = & \{h_0 + d_1, h_1 + d_1, \cdots, h_{i-1} + d_1, h_i + d_1\} \oplus D_3 \\ & = & (\{h_0 + d_1\} \cup \{h_1 + d_1, h_2 + d_1, \cdots, h_i + d_1\}) \oplus D_3 \\ & = & (D_3)_{h_0 + d_1} \cup R_i. \end{array}$$

Assim, $(X_i)_{d_1} - (X_i)_{d_2} \subseteq (D_3)_{h_0+d_1}$ e $(X_i)_{d_2} - (X_i)_{d_1} \subseteq (D_3)_{h_i+d_2}$. Uma vez que $h_0 + d_1 = (-i, i) + (-1, 1) = (-i-1, i+1) = -p_i$ e $h_i + d_2 = (i, -i) + (1, -1) = (i+1, -i-1) = p_i$, então $(X_i)_{d_1} - (X_i)_{d_2} \subseteq (D_3)_{-p_i}$ e $(X_i)_{d_2} - (X_i)_{d_1} \subseteq (D_3)_{p_i}$. ∎

Como conseqüência do último resultado, a próxima proposição fornece uma caracterização se um EE D, com $\rho(D) \leq (2, 2)$, é um subconjunto de X_{i+1}, Y_{i+1} e Z_{i+1}.

Proposição 6.7 *Seja D um EE tal que $\rho(D) \leq (2, 2)$. Para todo $i > 0$,*

$$\begin{array}{ll} (a) & D \subseteq X_{i+1} \textit{ se, e somente se, } D \subseteq (X_i)_{d_1} \textit{ ou } D \subseteq (X_i)_{d_2}; \\ (b) & D \subseteq Y_{i+1} \textit{ se, e somente se, } D \subseteq (Y_i)_{d_1} \textit{ ou } D \subseteq (Y_i)_{d_4}; \\ (c) & D \subseteq Z_{i+1} \textit{ se, e somente se, } D \subseteq (Z_i)_{d_1} \textit{ ou } D \subseteq (Z_i)_{d_4}. \end{array}$$

Prova: Provaremos somente a primeira caracterização. As outras podem ser provadas de maneira análoga.

($\Leftarrow$) Evidentemente, se $D \subseteq (X_i)_{d_1}$ ou $D \subseteq (X_i)_{d_2}$, então $D \subseteq X_{i+1} = (X_i)_{d_1} \cup (X_i)_{d_2}$.

($\Rightarrow$) Provaremos que se $D \subseteq X_{i+1}$, então $D \subseteq (X_i)_{d_1}$ ou $D \subseteq (X_i)_{d_2}$.

Suponha por absurdo que $D \not\subseteq (X_i)_{d_1}$ e $D \not\subseteq (X_i)_{d_2}$. Assim, uma vez que $D \subseteq X_{i+1} = (X_i)_{d_1} \cup (X_i)_{d_2}$ então existem dois pontos $x, y \in D$ tais que $x \in (X_i)_{d_1} - (X_i)_{d_2}$ e $y \in (X_i)_{d_2} - (X_i)_{d_1}$.

Uma vez que, pela Proposição 6.6, $(X_i)_{d_1} - (X_i)_{d_2} \subseteq (D_3)_{-p_i}$ e $(X_i)_{d_2} - (X_i)_{d_1} \subseteq (D_3)_{p_i}$, onde $p_i = (i+1, -i-1)$, então $x_0 \leq \mathrm{MAV}_0((D_3)_{-p_i}) = -i-1$ e $y_0 \geq \mathrm{MIV}_0((D_3)_{p_i}) = i+1$. Dessa forma, $y_0 - x_0 \geq 2i+2$. Uma vez que $i > 0$, então $y_0 - x_0 > 2$. Conseqüentemente, temos que $\rho_0(\{x, y\}) > 2$. Como $\{x, y\} \subseteq D$, então, claramente, $2 < \rho_0(\{x, y\}) \leq \rho_0(D)$. Mas, isto é uma contradição, uma vez que, por hipótese, $\rho_0(D) \leq 2$. Portanto, $D \subseteq (X_i)_{d_1}$ ou $D \subseteq (X_i)_{d_2}$. ■

A próxima proposição fornece uma propriedade interessante sobre subconjuntos do quadrado elementar que são invariantes de X_{i+1}, Y_{i+1} e Z_{i+1}.

Proposição 6.8 *Seja D um subconjunto do quadrado elementar. Para todo $i > 0$,*

(*a*) *D é um invariante de X_i se, e somente se, D é um invariante de X_{i+1};*
(*b*) *D é um invariante de Y_i se, e somente se, D é um invariante de Y_{i+1};*
(*c*) *D é um invariante de Z_i se, e somente se, D é um invariante de Z_{i+1}.*

Prova: Provaremos somente a primeira afirmação. As outras podem ser provadas de maneira similar.

($\Rightarrow$) Se D é um invariante de X_i, então, Pela Proposição 3.17, D é também um invariante de $(X_i)_h$, para todo ponto $h \in \mathbb{Z}^2$. Assim,

$$
\begin{aligned}
X_{i+1} &= (X_i)_{d_1} \cup (X_i)_{d_2} \\
&= (((X_i)_{d_1} \ominus D) \oplus D) \cup (((X_i)_{d_2} \ominus D) \oplus D) \\
&\qquad \text{(uma vez que, para todo } h \in \mathbb{Z}^2,\ D \text{ é invariante de } (X_i)_h) \\
&= (\cup\{D_h : h \in \mathbb{Z}^2 \text{ e } D_h \subseteq (X_i)_{d_1}\}) \cup (\cup\{D_h : h \in \mathbb{Z}^2 \text{ e } D_h \subseteq (X_i)_{d_2}\}) \\
&\qquad \text{(pela Proposição 3.12)} \\
&= \cup\{D_h : h \in \mathbb{Z}^2 \text{ e } (D_h \subseteq (X_i)_{d_1} \text{ ou } D_h \subseteq (X_i)_{d_2})\} \\
&= \cup\{D_h : h \in \mathbb{Z}^2 \text{ e } D_h \subseteq X_{i+1}\} \\
&\qquad \text{(pela Proposição 6.7, uma vez que } \rho(D_h) \leq (2,2)) \\
&= (X_{i+1} \ominus D) \oplus D \\
&\qquad \text{(pela Proposição 3.12).}
\end{aligned}
$$

Portanto D é um invariante de X_{i+1}.

($\Leftarrow$) Agora, suponha por absurdo que D não seja um invariante de X_i. Assim, pela Proposição 3.17, D não é um invariante de $(X_i)_h$, para todo $h \in \mathbb{Z}^2$. Como, pela Proposição 3.13, $((X_i)_h \ominus Y) \oplus Y \subseteq (X_i)_h$, então, $((X_i)_h \ominus Y) \oplus Y$ é um subconjunto próprio de $(X_i)_h$, isto é, para todo $h \in \mathbb{Z}^2$, $((X_i)_h \ominus Y) \oplus Y \subset (X_i)_h$. Logo,

$$
\begin{aligned}
(X_{i+1} \ominus D) \oplus D &= \cup\{D_h : h \in \mathbb{Z}^2 \text{ e } D_h \subseteq X_{i+1}\} \\
&\qquad\qquad \text{(pela Proposição 3.12).} \\
&= \cup\{D_h : h \in \mathbb{Z}^2 \text{ e } (D_h \subseteq (X_i)_{d_1} \text{ ou } D_h \subseteq (X_i)_{d_2})\} \\
&\qquad\qquad \text{(pela Proposição 6.7, uma vez que } \rho(D_h) \leq (2,2)) \\
&= (\cup\{D_h : h \in \mathbb{Z}^2 \text{ e } D_h \subseteq (X_i)_{d_1}\}) \cup \\
&\qquad\qquad (\cup\{D_h : h \in \mathbb{Z}^2 \text{ e } D_h \subseteq (X_i)_{d_2}\}) \\
&= (((X_i)_{d_1} \ominus D) \oplus D) \cup (((X_i)_{d_2} \ominus D) \oplus D) \\
&\qquad\qquad \text{(pela Proposição 3.12).} \\
&\subset (X_i)_{d_1} \cup (X_i)_{d_2} \\
&\qquad \text{(uma vez que, para todo } h \in \mathbb{Z}^2\text{, } D \text{ não é invariante de } (X_i)_h) \\
&= X_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Assim, $(X_{i+1} \ominus D) \oplus D$ é um subconjunto próprio de X_{i+1}. Mas isto é uma contradição, uma vez que, por hipótese, D é um invariante de X_{i+1}, ou seja, $X_{i+1} = (X_{i+1} \ominus D) \oplus D$. Portanto, D é um invariante de X_i. ■

Como uma conseqüência imediata da última proposição, temos o seguinte resultado.

Proposição 6.9 *Seja D um subconjunto do quadrado elementar. Para todo $i > 0$,*

(*a*) *se D é um invariante de X_i, então $D \equiv D_1$ ou $D \equiv D_3$;*
(*b*) *se D é um invariante de Y_i, então $D \equiv D_1$ ou $D \equiv D_4$;*
(*c*) *se D é um invariante de Z_i, então $D \equiv D_1$ ou $D \equiv D_5$.*

Prova: Provaremos somente a primeira afirmação. As outras podem ser provadas de uma maneira similar.

A prova é por indução em i. Para o caso $i = 1$, o subconjunto do quadrado elementar D que é invariante de $X_1 = D_1 \oplus D_3$ é $D \equiv D_1$ ou $D \equiv D_3$ (fazendo-se uma busca exaustiva).

Agora, suponha por hipótese de indução que, para $i > 0$, se D é um invariante de X_i, então $D \equiv D_1$ ou $D \equiv D_3$. Provaremos que esta afirmação ainda vale para X_{i+1}.

Se D é um invariante de X_{i+1}, então, pela Proposição 6.8, D é também um invariante de X_i. Assim, por hipótese de indução, $D \equiv D_1$ ou $D \equiv D_3$. ■

Finalmente, o resultado principal desta seção.

Teorema 6.10 *Para todo $i > 0$, um elemento em qualquer decomposição de X_i, Y_i e Z_i não é simplesmente conexo.*

Prova: Pela Proposição 6.9, os invariantes de X_i, que são subconjuntos do quadrado elementar, são somente $D_1' \equiv D_1$ e $D_3' \equiv D_3$. Assim, pelo Corolário 4.1, qualquer decomposição de X_i pode conter somente $D_1' \equiv D_1$ ou $D_3' \equiv D_3$. Portanto, $X_i \equiv aD_1 \oplus bD_3$, com $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Assim, para provar que um elemento em qualquer decomposição de X_i não

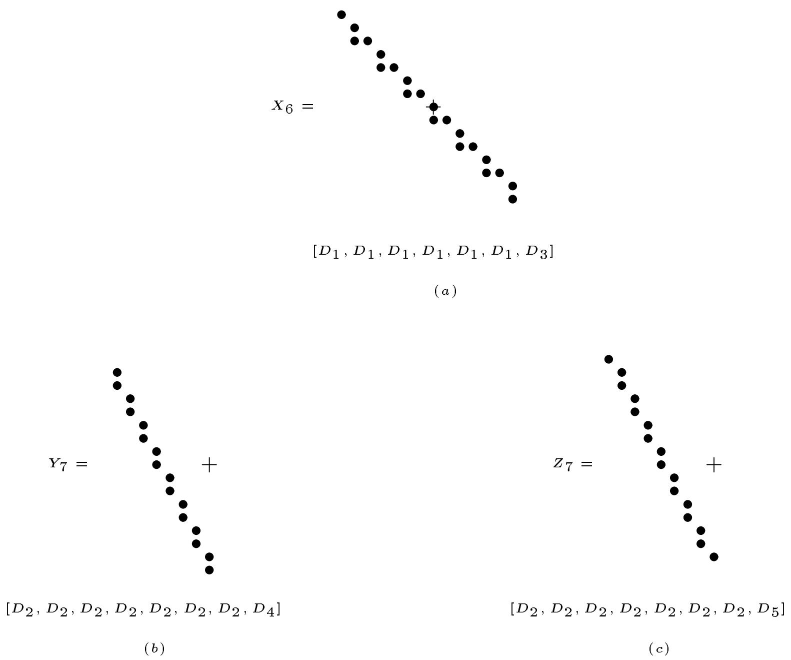

Figura 6.9: $(a) - (c)$ Os EE's X_6, Y_7 e Z_7 e suas respectivas decomposições.

é simplesmente conexo, devemos mostra que $a > 0$, uma vez que D_1 não é simplesmente conexo (veja a Figura 6.4). Para isso, dividimos esta prova em duas partes. Na primeira, provamos que se $b = 1$, então $a > 0$. Na segunda parte, mostramos que $b = 1$.

Provaremos agora que, se $b = 1$ então $a > 0$. Suponha por absurdo que $a = 0$. Assim, $X_i = aD_1 \oplus bD_3 = D_3$, para todo $i > 0$. Mas, isto é uma contradição, uma vez que, claramente, $X_i \not\equiv D_3$, para todo $i > 0$. Dessa forma, se $b = 1$, então $a > 0$.

Provaremos agora que $b = 1$.

Por um lado, $b \geq 1$. Suponha por absurdo que $b < 1$ (isto é, $b = 0$). Assim, $X_i \equiv aD_1$. Mas, isto é uma contradição, uma vez que, pelo Teorema 6.5, para todo $i > 0$, X_i é simplesmente conexo e iD_1 não é simplesmente conexo (veja a Figura 6.7). Logo, $b \geq 1$.

Por outro lado, $b \leq 1$. De fato, suponha por absurdo que $b > 1$ (isto é, $b \geq 2$), então $X_i = aD_1 \oplus bD_3 = (aD_1 \oplus (b-2)D_3) \oplus 2D_3$ e conseqüentemente, pela Proposição 3.15, $2D_3$ é um invariante de X_i. Mas, isto é uma contradição, uma vez que, por inspeção, $2D_3$ não é um invariante de X_1 e, portanto, pela Proposição 6.8, $2D_3$ não é um invariante de X_i, para todo $i > 0$. Logo, $b \leq 1$.

Analogamente, pode-se mostrar que um elemento em qualquer decomposição de Y_i e Z_i não é simplesmente conexo. ∎

Pela Proposição 6.10, as famílias de EE's simplesmente conexos $\mathcal{X} = \{X_i : i > 0\}$,

$\mathcal{Y} = \{Y_i : i > 0\}$ e $\mathcal{Z} = \{Z_i : i > 0\}$ não são decomponíveis segundo a definição de Park e Chin, uma vez que, pelo menos um elemento em qualquer decomposição (D_1 ou D_2) desses EE's não é simplesmente conexo. Na Figura 6.9, mostramos um EE de cada família e suas respectivas decomposições.

6.3 Complexidade do Algoritmo de Park e Chin

No trabalho de Park e Chin [35] não foi mencionada a complexidade de tempo do algoritmo deles. No Passo 2 do algoritmo do Park e Chin, é necessário encontrar uma solução inteira de um sistema linear de inequações com um número fixo de variáveis [35, p. 8]. No entanto, eles não mostraram como fazer isso. Teoricamente, para cada número inteiro positivo n, existe um algoritmo polinomial para encontrar soluções inteiras de sistemas de inequações lineares com n variáveis [40, p. 256]. No entanto, este resultado é somente teórico, e a implementação desse algoritmo na prática não é viável. No caso geral, resolver sistemas lineares de solução inteira é um problema bastante difícil [40, p. 227].

6.4 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos três famílias infinitas de EE's simplesmente conexos tais que pelo menos um subconjunto do quadrado elementar em qualquer decomposição desses EE's não é simplesmente conexo. Isto significa que o algoritmo de Park e Chin é limitado no sentido de que ele não é capaz de decompor os EE's dessas famílias.

Teoricamente, o algoritmo de Park e Chin é um algoritmo polinomial, mas a sua implementação não é viável, uma vez que, no Passo 2 do algoritmo deles, é necessário encontrar uma solução inteira de um sistema linear com um número fixo de variáveis.