Capítulo 8

Representação Compacta de W-Operadores

A importância dos operadores da família dos W-operadores na área de Visão Computacional é que eles são freqüentemente usados para resolver problemas de análise de imagens [41].

Vimos no Capítulo 3, nos Teoremas 3.35 e 3.36, (veja na página 30), que qualquer W-operador pode ser representado em termos de sup-geradores e inf-geradores. Neste mesmo capítulo, na Seção 3.5.3, apresentamos uma outra representação de um W-operador, que chamamos de sup-representação (respectivamente, inf-representação), dado pelo Teorema 3.38 (respectivamente, Teorema 3.39), que usa um número menor de sup-geradores (respectivamente, inf-geradores) que a representação canônica.

Neste capítulo, apresentamos uma nova sup-representação (respectivamente, inf-representação) para W-operadores que usa composições de sup-geradores (respectivamente, inf-geradores) com dilatações (respectivamente, erosões) como outra família de sup-geradores (respectivamente, inf-geradores). Esta representação é chamada compacta, uma vez que ela usa um número menor (ou, no pior caso, o mesmo número) de operadores sup-geradores (respectivamente, inf-geradores) que a sup-representação (respectivamente, inf-representação) apresentada no Teorema 3.38 (respectivamente, Teorema 3.39).

Considerando os W-operadores que são anti-extensivos e idempotentes em um sentido estrito, nós obtivemos uma simplificação para a sua representação compacta. Além disso, colocando a hipótese de que os W-operadores são também crescentes, obtivemos uma realização minimal da representação clássica de Matheron para as aberturas e fechamentos IT's (como supremo de aberturas morfológicas ou ínfimo de fechamentos morfológicos) a partir da representação compacta simplificada.

Um corolário desses resultados é que a sup-representação pode ser convertida para a representação compacta por algoritmos simples e não sofisticados. Este método é útil, por exemplo, para otimizar programas da MaqM projetados por algoritmos de aprendizagem, uma vez que esses programas gerados automaticamente estão freqüentemente na forma de sup-representação e a representação compacta tem uma eficiência maior, pois ela usa um número menor de operadores sup-geradores que a sup-representação.

Na Seção 8.1 apresentamos a sup-representação e a inf-representação compacta dos W-operadores. Na Seção 8.2, mostramos uma especialização da sup-representação e da inf-representação compacta para operadores que não são crescentes. Na Seção 8.3, deduzimos a realização minimal da representação de Matheron para aberturas e fechamentos IT's a partir da representação compacta. Na Seção 8.4, apresentamos alguns exemplos de conversões da sup-representação para a sup-representação compacta. Finalmente, na Seção 8.5, fornecemos algumas conclusões deste capítulo.

8.1 Representação Compacta

Nesta seção, apresentaremos uma nova estrutura de decomposição para W-operadores que simplifica a sup-representação, no sentido de que o número de operadores sup-geradores envolvidos nesta nova decomposição é menor, ou no pior caso, igual ao número dos sup-geradores na sup-representação. Por causa dessa propriedade, chamaremos essas novas decomposições de *representação compacta*.

Introduziremos agora uma relação de equivalência sobre uma coleção genérica de intervalos maximais $\mathbf{X}$. Sejam $[A, B]$ e $[A', B']$ dois elementos de $\mathbf{X}$. Dizemos que $[A, B]$ e $[A', B']$ são *equivalentes sob translação* se, e somente se, um pode ser construído a partir de uma translação do outro, isto é, $[A, B] \equiv [A', B']$ se, e somente se, existe $h \in E$ tal que $[A, B] = [A', B']_h$.

Uma vez que a equivalência sob translação definida acima é uma relação de equivalência, o conjunto de suas classes de equivalência (isto é, os conjuntos compostos exatamente por todos elementos equivalentes em $\mathbf{X}$) constitui uma partição de $\mathbf{X}$.

Denotaremos por $\mathbf{Q}(\mathbf{B}(\psi))$ o conjunto de todas as classes de equivalências (sob translação) sobre $\mathbf{B}(\psi)$, onde ψ é um W-operador. Denotaremos por $\mathbf{E}(\psi) = \mathbf{R}(\mathbf{B}(\psi))$ o conjunto formado por exatamente um elemento de cada classe de equivalência em $\mathbf{Q}(\mathbf{B}(\psi))$, isto é, $\mathbf{E}(\psi)$ é um conjunto tal que $|\mathbf{E}(\psi)| = |\mathbf{Q}(\mathbf{B}(\psi))|$ e para cada $\mathbf{X} \in \mathbf{Q}(\mathbf{B}(\psi))$, existe $[A, B] \in \mathbf{E}(\psi)$ tal que $[A, B] \in \mathbf{X}$.

Seja $[A, B] \in \mathbf{E}(\psi)$, isto é, $[A, B]$ é um intervalo que representa um classe de equivalência. Denotaremos por $\mathbf{C}_{[A,B]}$ a classe de equivalência representada pelo intervalo $[A, B]$. Seguindo esta notação, temos que $\mathbf{Q}(\mathbf{B}(\psi)) = \{\mathbf{C}_{[A,B]} : [A, B] \in \mathbf{E}(\psi)\}$.

Denotaremos por $C_{[A,B]}$ o subconjunto de E que é composto por todos $h \in E$ tais que $[A, B]_{-h}$ está na classe de equivalência representada por $[A, B]$, isto é, para todo $[A, B] \in \mathbf{E}(\psi)$, $C_{[A,B]} = \{h \in E : [A, B]_{-h} \in \mathbf{B}(\psi)\}$. Dessa forma, a classe de equivalência representada por $[A, B]$ é dada por $\mathbf{C}_{[A,B]} = \{[A, B]_{-h} : h \in C_{[A,B]}\}$. Note que, como $\mathbf{C}_{[A,B]} \subseteq \mathbf{B}(\psi)$ e $\mathbf{B}(\psi)$ é uma coleção de intervalos maximais, então, claramente, $\mathbf{C}_{[A,B]}$

é também uma coleção de intervalos maximais. Logo $\mathbf{C}_{[A,B]} = \{[A,B]_{-h} : h \in C_{[A,B]}\} = \sqcup\{\{[A,B]_{-h}\} : h \in C_{[A,B]}\} = \sqcup\{\{[A,B]_h\} : h \in C^t_{[A,B]}\} = \sqcup\{\{[A,B]\}_h : h \in C^t_{[A,B]}\}$. Assim, pela definição de adição de Minkowski entre uma coleção de intervalos maximais e um conjunto, temos que $\mathbf{C}_{[A,B]} = \{[A,B]\} \oplus C^t_{[A,B]}$.

O teorema seguinte nos fornece a sup-representação compacta para qualquer W-operador ψ.

Teorema 8.1 *Se $\psi \in \Psi_W$, então $\psi = \vee\{\delta_{C_{[A,B]}}\lambda^W_{A,B} : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi)\}$.*

Prova: Para todo $\psi \in \Psi_W$, temos que $\mathbf{Q}(\mathbf{B}_W(\psi)) = \{\mathbf{B}_W(\delta_{C_{[A,B]}}\lambda_{A,B}) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi)\}$, uma vez que, para todo $[A,B] \in \mathbf{E}(\psi)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_W(\delta_{C_{[A,B]}}\lambda^W_{A,B}) &= \mathbf{B}_W(\lambda^W_{A,B}) \oplus C^t_{[A,B]} \\
&\qquad \text{(pelas Proposições 3.24 e 3.41)} \\
&= \{[A,B]\} \oplus C^t_{[A,B]} \\
&\qquad \text{(pela Proposição 3.37)} \\
&= \mathbf{C}_{[A,B]}.
\end{aligned}$$

■

E a inf-representação compacta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 8.2 *Se $\psi \in \Psi_W$, então $\psi = \wedge\{\varepsilon_{C^t_{[A,B]}}\mu^{W^t}_{A^t,B^t} : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}$.*

Prova: Pelo Teorema 8.1, temos que, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$,

$$\psi^*(X) = \cup\{\delta_{C_{[A,B]}}\lambda_{A,B}(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}.$$

Pela definição de ψ^*, temos que, $\psi = \nu\psi^*\nu$. Assim, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned}
\psi(X) &= \nu\psi^*(\nu(X)) \\
&= \nu(\cup\{\delta_{C_{[A,B]}}\lambda^W_{A,B}(\nu(X)) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}) \\
&= \nu(\cup\{\delta_{C_{[A,B]}}\lambda^W_{A,B}\nu(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}) \\
&= \cap\{\nu\delta_{C_{[A,B]}}\lambda^W_{A,B}\nu(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\} \\
&\qquad \text{(pela Lei de Morgan)} \\
&= \cap\{\nu\delta_{C_{[A,B]}}\nu\nu\lambda^W_{A,B}\nu(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\} \\
&\qquad \text{(uma vez que } \nu\nu \text{ é o operador identidade)} \\
&= \cap\{(\nu\delta_{C_{[A,B]}}\nu)(\nu\lambda^W_{A,B}\nu)(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\} \\
&= \cap\{\varepsilon_{C^t_{[A,B]}}\mu^{W^t}_{A^t,B^t}(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\} \\
&\qquad \text{(pelas Proposições 3.30 e 3.34)}
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi = \wedge\{\varepsilon_{C^t_{[A,B]}}\mu^{W^t}_{A^t,B^t} : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}$. ■

A sup-representação compacta pode ainda ser melhorada. De fato, se existe $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{E}(\psi)$ tal que, para todo $[A,B] \in \mathbf{X}$, $C = C_{[A,B]}$, então, uma vez que δ_C comuta com o supremo (veja a Proposição 3.29), temos que

$$\vee\{\delta_{C_{[A,B]}}\lambda_{A,B} : [A,B] \in \mathbf{X}\} = \vee\{\delta_C\lambda_{A,B} : [A,B] \in \mathbf{X}\} = \delta_C(\vee\{\lambda_{A,B} : [A,B] \in \mathbf{X}\}).$$

Observe que, com esta fatorização, economizamos $|\mathbf{X}| - 1$ dilatações.

8.2 Representação Compacta para Operadores não Crescentes

Nesta seção, mostraremos como a sup-representação (respectivamente, inf-representação) compacta é simplificada para W-operadores que são anti-extensivos (respectivamente, extensivos) e idempotentes em um sentido estrito.

Vimos no Capítulo 3 que um operador $\psi \in \Psi_W$ é chamado anti-extensivo se, e somente se, $\psi \leq \iota$, onde ι denota o operador identidade. Uma propriedade dos operadores anti-extensivos $\psi \in \Psi_W$ é que, para todo $X \in \mathcal{K}(\psi)$, $o \in X$, uma vez que $o \in \psi(X) \subseteq X$. Portanto, $o \in A$, para todo $[A,B] \in \mathbf{B}(\psi)$.

Proposição 8.3 *Se um operador $\psi \in \Psi_W$ é anti-extensivo, então, para todo $[A,B] \in \mathbf{E}(\psi)$, temos que $C_{[A,B]} \subseteq A$.*

Prova: Para todo $[A,B] \in \mathbf{E}(\psi)$, $x \in C_{[A,B]}$ é equivalente a $[A,B]_{-x} = [A_{-x}, B_{-x}] \in \mathbf{B}(\psi)$ e, uma vez que ψ é anti-extensivo, $o \in A_{-x}$, temos que $x \in A$. Dessa forma, $C_{[A,B]} \subseteq A$. ■

Dizemos que um operador $\psi \in \Psi_W$ é *autolimitado* se para todo $[A,B] \in \mathbf{B}(\psi)$, $X \in [A,B]$ implica que $\psi(X) \cap W \in [A,B]$.

Lembramos o leitor que um operador $\psi \in \Psi_W$ é dito idempotente se, e somente se, $\psi\psi = \psi$. Por um lado, observe que a autolimitação não implica idempotência. Por exemplo, para qualquer $C \in \mathcal{P}(W)$ tal que $o \in C$, a dilatação δ_C é um operador autolimitado, mas δ_C não é idempotente. Por outro lado, um operador idempotente não é necessariamente autolimitado. Por exemplo, para todo $A, B \in \mathcal{P}(W)$ tais que $o \in A \subset B$ e $|B| - |A| \geq 2$, o operador $\psi = \delta_A\lambda_{A,A} \vee \delta_A\lambda_{B,B}$ é idempotente, mas não é autolimitado, uma vez que $B \in [B,B] \in \mathbf{B}(\psi)$ e $\psi(B) = A \notin [B,B]$.

Dizemos que um operador $\psi \in \Psi_W$ é um *operador idempotente em um sentido estrito* se, e somente se, ψ é ao mesmo tempo idempotente e autolimitado.

A próxima proposição fornece uma condição suficiente para a idempotência de operadores não necessariamente crescentes.

Proposição 8.4 *Se um operador $\psi \in \Psi_W$ é anti-extensivo e autolimitado, então ψ é um operador idempotente.*

Prova: Por um lado, se $x \in \psi(\psi(X))$, então $o \in \psi(\psi(X_{-x}))$, uma vez que ψ é IT. Assim, temos que $o \in \psi(X_{-x})$, uma vez que ψ é anti-extensivo, e, conseqüentemente, $x \in \psi(X)$, uma vez que ψ é IT. Por outro lado, se $x \in \psi(X)$, então $X_{-x} \cap W \in \mathcal{K}(\psi)$, uma vez que ψ é IT e localmente definido em W. Assim, temos que existe um intervalo $[A, B] \in \mathbf{B}(\psi)$ tal que $X_{-x} \cap W \in [A, B]$. Logo, existe $[A, B] \in \mathbf{B}(\psi)$ tal que $\psi(X_{-x} \cap W) \cap W \in [A, B]$, uma vez que ψ é autolimitado. Assim, $\psi(X_{-x} \cap W) \cap W \in \mathcal{K}(\psi)$ e, conseqüentemente, $o \in \psi(\psi(X_{-x} \cap W) \cap W)$. Dessa forma, como ψ é localmente definido em W, temos que $o \in \psi(\psi(X_{-x} \cap W))$ e $o \in \psi(\psi(X))$. Portanto, $x \in \psi(\psi(X))$, uma vez que ψ é IT. ■

No teorema seguinte, provamos que operadores do tipo $\delta_A \lambda_{A,A}$, que foram extensivamente estudados por Ronse [39], constituem uma família de sup-geradores para operadores que são anti-extensivos e idempotentes em um sentido estrito. Para isto, apresentamos antes a seguinte proposição.

Proposição 8.5 *Se um operador $\psi \in \Psi_W$ é autolimitado, então, para todo $[A, B] \in \mathbf{E}(\psi)$, temos que $\forall x \in A$, $[A_{-x}, B_{-x}] \subseteq \mathcal{K}(\psi)$.*

Prova: Para todo $[A, B] \in \mathbf{E}(\psi)$ e para todo $Y \in [A, B]$, se $x \in A$, então $x \in \psi(Y) \cap W$, uma vez que ψ é autolimitado e A é o menor elemento de $[A, B]$. Assim, $x \in \psi(Y)$, e, dessa forma, $o \in \psi(Y_{-x})$, uma vez que ψ é IT, e, conseqüentemente, $[A_{-x}, B_{-x}] \subseteq \mathcal{K}(\psi)$.
■

Teorema 8.6 *Se um operador $\psi \in \Psi_W$ é anti-extensivo e autolimitado, então*

$$\psi = \vee\{\delta_A \lambda_{A,B} : [A, B] \in \mathbf{E}(\psi)\}.$$

Prova: Este teorema é uma conseqüência imediata das Proposições 8.3 e 8.5. A Proposição 8.3 garante que $\mathbf{B}(\psi)$ está completa e a Proposição 8.5 garante que todas outras possibilidades para esta representação estão incluídas em algum intervalo de $\mathbf{B}(\psi)$. ■

Recordamos o leitor que um operador $\psi \in \Psi_W$ é extensivo se, e somente se, $\iota \leq \psi$.

No próximo teorema, provamos que operadores do tipo $\varepsilon_A \mu_{A,B}$ constituem uma família de inf-geradores para todo operador $\psi \in \Psi_W$ tal que ψ^* é anti-extensivo e idempotente em um sentido estrito.

Teorema 8.7 *Se um operador $\psi \in \Psi_W$ tal que ψ^* é anti-extensivo e autolimitado, então*

$$\psi = \wedge\{\varepsilon_{A^t} \mu^{W^t}_{A^t,B^t} : [A, B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}.$$

Prova: Como ψ^* é anti-extensivo e autolimitado, pelo Teorema 8.6, temos que, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$,

$$\psi^* = \vee\{\delta_A \lambda_{A,B} : [A, B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}$$

Como $\psi = \nu\psi^*\nu$, temos que, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned}
\psi(X) &= \nu\psi^*(\nu(X)) \\
&= \nu(\cup\{\delta_A\lambda^W_{A,B}(\nu(X)) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}) \\
&= \nu(\cup\{\delta_A\lambda^W_{A,B}\nu(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}) \\
&= \cap\{\nu\delta_A\lambda^W_{A,B}\nu(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\} \\
&\qquad \text{(pela Lei de Morgan)} \\
&= \cap\{\nu\delta_A\nu\nu\lambda^W_{A,B}\nu(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\} \\
&\qquad \text{(uma vez que } \nu\nu \text{ é o operador identidade)} \\
&= \cap\{(\nu\delta_A\nu)(\nu\lambda^W_{A,B}\nu)(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\} \\
&= \cap\{\varepsilon_{A^t}\mu^{W^t}_{A^t,B^t}(X) : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\} \\
&\qquad \text{(pelas Proposições 3.30 e 3.34)}
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi = \wedge\{\varepsilon_{A^t}\mu^{W^t}_{A^t,B^t} : [A,B] \in \mathbf{E}(\psi^*)\}$. ∎

Observamos que operadores anti-extensivos (respectivamente, extensivos) e idempotentes que não são autolimitados podem não ser representados pelo Teorema 8.6 (respectivamente, Teorema 8.7). O último exemplo antes da Proposição 8.4 prova isto.

Note que a implementação computacional de operadores anti-extensivos que são autolimitados pela decomposição do Teorema 8.1 é mais eficiente que a implementação pela decomposição do Teorema 8.6, uma vez que, para todo $[A,B] \in \mathbf{E}(\psi)$, $C_{[A,B]} \subseteq A$.

8.3 Representação Compacta para Aberturas e Fechamentos Invariantes por Translação

Nesta seção mostraremos que a representação compacta de aberturas e fechamentos IT's é uma realização eficiente da representação de Matheron dada no Capítulo 3, Subseção 3.6.2.

Vimos na Subseção 3.6.1 que se $\psi \in \Psi_W$ é um operador crescente, então os operadores $\lambda_{A,B}$ e $\mu_{A,B}$ das famílias de sup-geradores e inf-geradores dos Teoremas 3.38 e 3.39 tornam-se, respectivamente, erosões e dilatações. Conseqüentemente, os operadores $\lambda_{A,B}$ e $\mu_{A,B}$ da representação compacta dados nos Teoremas 8.1 e 8.2 tornam-se erosões e dilatações.

Seja $\psi \in \Psi_W$ uma abertura. Como ψ é crescente, anti-extensivo e idempotente, para todo $[A,B] \in \mathbf{B}(\psi)$, A é um invariante de ψ (isto é, $\psi(A) = A$), e, conseqüentemente, ψ é autolimitado. Como ψ é crescente, anti-extensivo e autolimitado, a estrutura de decomposição do Teorema 8.6 reduz-se a um supremo de aberturas morfológicas. Tomando $W = E$, esta é a realização do resultado clássico de Matheron para representação de aberturas IT's (Teorema 3.48.a). Além disso, a proposição seguinte mostra que esta é uma realização minimal, no sentido da absorção granulométrica, isto é, aberturas morfológicas que são absorvidas por outras aberturas morfológicas não estão consideradas nesta decomposição.

Proposição 8.8 *Seja $\psi \in \Psi_W$ uma abertura. Se $[A,W] \in \mathbf{B}(\psi)$, então não existem*

$h \in E$ e $A' \in \mathcal{P}(W)$ tais que $A' \neq A$, A' é um invariante de A e $[A'_h, W] \in \mathbf{B}(\psi)$.

Prova: Seja $[A,W] \in \mathbf{B}(\psi)$. Suponha por absurdo que exista $h \in E$ e $A' \in \mathcal{P}(W)$ tais que $A' \neq A$, A' é invariante de A e $[A'_h, W] \in \mathbf{B}(\psi)$.

Como $[A'_h, W]$ e $[A,W]$ pertencem a $\mathbf{B}(\psi)$ e $A' \neq A$, então podemos escolher $\mathbf{E}(\psi)$ tal que $[A'_h, W], [A,W] \in \mathbf{E}(\psi)$. Pela independência da translação de $\gamma_{A'}$ e pela simplificação do Teorema 8.6 para aberturas IT's, temos que $\gamma_{A'_h} = \gamma_{A'} \leq \psi$. Como A' é um invariante de A e $A' \neq A$, então, pela Proposição 3.49, $\gamma_A < \gamma_{A'}$. Pela Proposição 3.27, temos que $\mathcal{K}(\cdot)$ é um isomorfismo de reticulado entre $(\Psi_W, \leq)$ e $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(W)), \subseteq)$. Assim, $\gamma_A < \gamma_{A'} = \gamma_{A'_h} \leq \psi \Leftrightarrow \mathcal{K}(\gamma_A) \subset \mathcal{K}(\gamma_{A'}) = \mathcal{K}(\gamma_{A'_h}) \subseteq \mathcal{K}(\psi)$.

Uma vez que $[A,W] \in \mathbf{E}(\psi)$ e ψ é uma abertura (conseqüentemente, ψ é anti-extensivo), então $o \in A$.

Pela Proposição 3.47, temos que $\mathcal{K}(\gamma_A) = \{X \in \mathcal{P}(W) : A_{-z} \subseteq X$ e $z \in A\}$ e $\mathcal{K}(\gamma_{A'}) = \{X \in \mathcal{P}(W) : A'_{-z} \subseteq X$ e $z \in A'\}$. Assim, como $o \in A$, então $A \in \mathcal{K}(\gamma_A)$. Além disso, como $A \in \mathcal{K}(\gamma_A) \subset \mathcal{K}(\gamma_{A'}) \subseteq \mathcal{K}(\psi)$, então existe $z \in A'$ tal que $A'_z \subset A$ e $A'_z \in \mathcal{K}(\psi)$. Dessa forma, $[A'_z, W] \in \mathbf{B}(\psi)$ e, portanto, temos que $[A,W] \notin \mathbf{B}(\psi)$, uma vez que $[A,W]$ não é um intervalo maximal em $\mathbf{B}(\psi)$. Mas isto contradiz a hipótese de que $[A,W] \in \mathbf{B}(\psi)$. Portanto, não existem tais A' e h. ■

Seja $\psi \in \Psi_W$ um fechamento. Como ψ é crescente, extensivo e idempotente, então, pela Proposição 3.18, ψ^* é crescente, anti-extensivo e idempotente (isto é, ψ^* é uma abertura). Assim, para todo $[A,B] \in \mathbf{B}(\psi^*)$, A é um invariante de ψ^* (isto é, $\psi^*(A) = A$) e, conseqüentemente, ψ^* é autolimitado. Como ψ^* é crescente, anti-extensivo e autolimitado, então a estrutura de decomposição do Teorema 8.7 reduz ψ a um ínfimo de fechamentos morfológicos, uma vez que se $B = W$ os operadores $\mu_{A,B}$ da representação compacta tornam-se dilatações. Tomando $W = E$, esta é a realização do resultado clássico de Matheron para representação de fechamentos IT's (Teorema 3.48.b). Além disso, a proposição seguinte mostra que esta é uma realização minimal, no sentido da absorção granulométrica, isto é, fechamentos morfológicas que são absorvidas por outros fechamentos morfológicos não estão considerados nesta decomposição.

Proposição 8.9 *Seja $\psi \in \Psi_W$ um fechamento. Se $[A,W] \in \mathbf{B}(\psi^*)$, então não existem $h \in E$ e $A' \in \mathcal{P}(W)$ tais que $A' \neq A$, A' é um invariante de A e $[A'_h, W] \in \mathbf{B}(\psi^*)$.*

Prova: Como ψ^* é uma abertura, pela Proposição 8.8, não existem $h \in E$ e $A' \in \mathcal{P}(W)$ tais que $A' \neq A$, A' é um invariante de A e $[A'_h, W] \in \mathbf{B}(\psi^*)$. ■

8.4 Conversão da Sup-Representação para a Representação Compacta

Foi implementado um programa que transforma automaticamente a sup-representação de um operador para a sua sup-representação compacta. A tarefa deste programa é primeiro identificar as classes de equivalência na base do operador e depois identificar as que podem ser fatoradas por ter o mesmo $C_{[A,B]}$.

Observe que no caso de operadores anti-extensivos que são autolimitados, temos a flexibilidade de escolher $C_{[A,B]}$ como qualquer C tal que $C_{[A,B]} \subseteq C \subseteq A$. A idéia é escolher um C que maximiza o efeito de fatoração.

A seguir, damos alguns exemplos da aplicação deste programa para alguns exemplos simples. Para estes exemplos, considere $A = 1\underline{1}1$, $B = \begin{array}{c} 1 \\ \underline{1} \\ 1 \end{array}$, $C = \begin{array}{c} 010 \\ 1\underline{1}1 \\ 010 \end{array}$, $D = \begin{array}{c} 1 \\ \underline{0} \\ 1 \end{array}$, $F = 1\underline{0}1$ e $G = 0\underline{1}1$.

Seja $\psi_1 = \delta_A\varepsilon_A \vee \delta_B\varepsilon_B$. A base de ψ_1 é $\mathbf{B}(\psi_1) = \{[A_a, W] : a \in A\} + \{[B_b, W] : b \in B\}$, onde $+$ denota a união de conjuntos disjuntos. Logo, neste caso, o operador dado já está na forma da representação compacta. Agora, seja $\psi_2 = \delta_A\varepsilon_A \vee \delta_C\varepsilon_C$. A base de ψ_2 é $\mathbf{B}(\psi_2) = \{[A_a, W] : a \in A\} + \{[C_d, W] : d \in D\}$. Logo, ψ_2 pode ser reescrito como $\psi_2 = \delta_A\varepsilon_A \vee \delta_D\varepsilon_C$. Note que ψ_1 e ψ_2 são ambos operadores crescentes e a representação compacta de ψ_2 é melhor que a original, uma vez que $|D| < |C|$.

Seja $\psi_3 = \delta_A\lambda_{A,A} \vee \delta_C\lambda_{C,C}$. A base de ψ_3 é $\mathbf{B}(\psi_3) = \{[A_a, A_a] : a \in A\} + \{[C_c, C_c] : c \in C\}$. Logo, o operador já está na forma da representação compacta. Agora, seja $\psi_4 = \delta_A\lambda_{A,C} \vee \delta_C\lambda_{C,C}$. A base de ψ_4 é $\mathbf{B}(\psi_4) = \{[A_a, C_a] : a \in A\} + \{[C_d, C_d] : d \in D\}$. Logo, ψ_4 pode ser reescrito como $\psi_4 = \delta_A\lambda_{A,C} \vee \delta_D\lambda_{C,C}$. Observe que ψ_3 e ψ_4 são ambos operadores não crescentes e a representação compacta de ψ_4 é melhor que a original, uma vez que $|D| < |C|$.

Seja $\psi_5 = \delta_F\lambda_{F,C} \vee \delta_G\lambda_{G,C}$. A base de ψ_5 é $\mathbf{B}(\psi_5) = \{[F_f, C_f] : f \in F^t\} + \{[G_g, C_g] : g \in G^t\}$. Mas, $G^t = (F^t)_h$, onde $h = (-1, 0)$. Portanto, $\mathbf{B}(\psi_5) = \{[F_f, C_f] : f \in F^t\} + \{[F_f, C_{h+f}] : f \in F^t\}$ Logo, ψ_5 pode ser reescrito como $\psi_5 = \delta_F\lambda_{F,C} \vee \delta_F\lambda_{F,C_h} = \delta_F(\lambda_{F,C} \vee \lambda_{F,C_h})$. Neste caso, com esta fatoração, economizamos uma dilatação.

8.5 Conclusão

Introduzimos uma nova sup-representação e inf-representação para W-operadores: a representação compacta. A família de sup-geradores (respectivamente, inf-geradores) nesta representação é constituída de composições de sup-geradores da sup-decomposição com dilatações (respectivamente, de composições de inf-geradores da inf-decomposição com erosões).

Uma propriedade importante da representação compacta é que ela pode usar um número menor (ou, no pior caso, o mesmo número) de operadores sup-geradores (respectivamente, inf-geradores) que na sup-decomposição (respectivamente, inf-decomposição). Esta propriedade implica que os operadores são mais eficientes quando implementados na representação compacta.

Apresentamos também uma simplificação da representação compacta para a família de operadores idempotentes em um sentido estrito e anti-extensivos (extensivos). Além disso, a partir desta forma simplificada, obtemos uma realização minimal da representação de Matheron para aberturas e fechamentos IT's.

Finalmente, mostramos que a sup-decomposição pode ser facilmente transformada para a sup-representação compacta e apresentamos alguns exemplos dessa transformação.