Capítulo 9

Sup-Decomposição para Decomposições Seqüenciais

Como já vimos no Capítulo 3, a sup-decomposição tem algumas boas propriedades como caracterizar unicamente os W-operadores e possuir uma estrutura simples que pode ser facilmente utilizada para projeto automático de operadores. No entanto, esta representação tem um sério inconveniente: sua estrutura paralela não é eficiente para implementação em máquinas convencionais seqüenciais.

Neste capítulo, formalizamos o problema de transformar as sup-decomposições em decomposições puramente seqüenciais (quando elas existem). Uma versão especializada deste problema é o problema clássico de encontrar decomposições seqüenciais para erosões e dilatações (veja os Capítulos 4, 5, 6 e 7).

A teoria proposta consiste na formulação e solução de equações discretas em reticulados completos, cujo espaço de soluções tem uma forte natureza combinatória. As técnicas foram desenvolvidas para W-operadores em geral, depois, especializadas para W-operadores crescentes e, posteriormente, aplicadas sobre operadores construídos por composições de dilatações e erosões.

Os resultados apresentados aqui para W-operadores em geral são uma extensão de alguns resultados obtidos por Jones [27] para operadores crescentes IT's e introduzem alguns novos limites superiores e inferiores para o caso particular de W-operadores crescentes.

9.1 Propriedades de Coleções de Intervalos Maximais

Nesta seção, veremos algumas propriedades sobre coleções de intervalos maximais que serão usadas neste capítulo.

Proposição 9.1 *Se* $\mathbf{X} \in \Pi_W$, $C \in \mathcal{P}(E)$ *e* $h \in E$, *então* $\mathbf{X}_h \oplus C = \mathbf{X} \oplus C_h = (\mathbf{X} \oplus C)_h$.

Prova: Primeiramente, mostramos que $(\mathbf{X} \oplus C)_h = \mathbf{X}_h \oplus C$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X} \oplus C)_h &= (\sqcup\{\mathbf{X}_c : c \in C\})_h \\
&= \sqcup\{\mathbf{X}_{c+h} : c \in C\} && \text{(pela Proposição 3.23.}c\text{)} \\
&= \sqcup\{(\mathbf{X}_h)_c : c \in C\} \\
&= \mathbf{X}_h \oplus C.
\end{aligned}$$

Agora, provamos que $(\mathbf{X} \oplus C)_h = \mathbf{X} \oplus C_h$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X} \oplus C)_h &= (\sqcup\{\mathbf{X}_c : c \in C\})_h \\
&= \sqcup\{\mathbf{X}_{c+h} : c \in C\} && \text{(pela Proposição 3.23.}c\text{)} \\
&= \sqcup\{\mathbf{X}_d : d \in C_h\} \\
&= \mathbf{X} \oplus C_h.
\end{aligned}$$

■

Proposição 9.2 *Se* $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Pi_W$ *e* $C \in \mathcal{P}(E)$*, então*

$$(\mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y}) \oplus C = (\mathbf{X} \oplus C) \sqcup (\mathbf{Y} \oplus C) \text{ e } (\mathbf{X} \sqcap \mathbf{Y}) \ominus C = (\mathbf{X} \ominus C) \sqcap (\mathbf{Y} \ominus C).$$

Prova:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y}) \oplus C &= \sqcup\{(\mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y})_h : h \in C\} \\
&= \sqcup\{(\mathbf{X}_h \sqcup \mathbf{Y}_h) : h \in C\} \\
& \qquad \text{(pela Proposição 3.23.}c\text{)} \\
&= (\sqcup\{\mathbf{X}_h : h \in C\}) \sqcup (\sqcup\{\mathbf{Y}_h : h \in C\}) \\
& \qquad \text{(pelas Proposições 3.23.}a\text{ e 3.23.}b\text{)} \\
&= (\mathbf{X} \oplus C) \sqcup (\mathbf{Y} \oplus C).
\end{aligned}$$

Analogamente, pode-se provar que $(\mathbf{X} \sqcap \mathbf{Y}) \ominus C = (\mathbf{X} \ominus C) \sqcap (\mathbf{Y} \ominus C)$.

■

Como conseqüência da Proposição 9.2, temos o seguinte resultado.

Proposição 9.3 *Sejam* $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Pi_W$ *e* $C \in \mathcal{P}(E)$*. Se* $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$*, então*

$$\mathbf{X} \oplus C \leq \mathbf{Y} \oplus C \text{ e } \mathbf{X} \ominus C \leq \mathbf{Y} \ominus C.$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \leq \mathbf{Y} &\Leftrightarrow \mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{X} \sqcup \mathbf{Y}) \oplus C = \mathbf{Y} \oplus C \\
&\Rightarrow (\mathbf{X} \oplus C) \sqcup (\mathbf{Y} \oplus C) = \mathbf{Y} \oplus C \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{X} \oplus C) \leq \mathbf{Y} \oplus C.
\end{aligned}$$

Analogamente, pode-se provar que $\mathbf{X} \ominus C \leq \mathbf{Y} \ominus C$. ■

Proposição 9.4 *Se* $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ *e* $C \in \mathcal{P}(E)$*, então, para todo* $h \in E$*,* $\mathbf{X}_W \oplus C = (\mathbf{X}_{-h})_{W_{-h}} \oplus C_h$.

Prova: Sejam $W' \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathbf{Y}_{W'} \in \Pi_{W'}$ tais que $\mathbf{Y}_{W'} = \mathbf{X}_W \oplus C$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \oplus C = \mathbf{Y} &\Leftrightarrow (\mathbf{X} \oplus C)_h = \mathbf{Y}_h \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X} \oplus C_h = \mathbf{Y}_h && \text{(pela Proposição 9.1)} \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{X} \oplus C_h)_{-h} = \mathbf{Y} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X}_{-h} \oplus \mathbf{C}_h = \mathbf{Y} && \text{(pela Proposição 9.1).} \end{aligned}$$

■

9.2 Equação de Fatoração de Minkowski

Nesta seção definimos o seguinte problema:

Problema: *Dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \Pi_{W'}$ e um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$, encontrar todas coleções de intervalos maximais $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ tais que*

$$\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}. \tag{1}$$

Uma vez que $\mathbf{X}_W \oplus C^t \in \Pi_{W \oplus C^t}$ e $\mathbf{Y}_{W'} \in \Pi_{W'}$, então W e W' satisfazem $W \oplus C^t = W'$.

9.2.1 Limite Superior para W

No próximo resultado temos um limite superior para W na Equação (1) e é uma conseqüência direta da relação de adjunção dada pela Proposição 3.11.

Proposição 9.5 *Sejam $W, C, W' \in \mathcal{P}(E)$. Se $W \oplus C^t = W'$, então $W \subseteq W' \ominus C^t$.*

Dado um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$ e uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'}$, pelas Proposições 9.5 e 3.24, as coleções $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ que satisfazem a Equação (1) podem ter suas representações mudadas para $\mathbf{X}_{W' \ominus C^t}$. Agora, é suficiente considerar $W = W' \ominus C^t$. De fato, se existe uma solução $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ tal que $W \subset W' \ominus C^t$, então existe uma solução $\mathbf{X}_{W' \ominus C^t} \in \Pi_{W' \ominus C^t / W}$ tal que $\mathcal{W}^{-1}(\mathbf{X}_{W' \ominus C^t}) = \mathbf{X}_W$. Assim, podemos considerar que $W = W' \ominus C^t$.

9.2.2 Limite Superior para $\mathbf{X}_W$

Nesta subseção, vamos mostrar um limite superior para $\mathbf{X}_W$. Seja $C \in \mathcal{P}(E)$. Uma conseqüência imediata da definição da adição de Minkowski é que $o \in C^t \oplus C$. Assim, para todo $W \in \mathcal{P}(E)$, podemos ver facilmente que $W \subseteq W \oplus (C^t \oplus C)$. Dessa forma, pela propriedade associativa da adição de Minkowski (Proposição 3.8.f), $W \subseteq (W \oplus C^t) \oplus C$. Logo, pela Proposição 3.24, podemos mudar a representação de qualquer coleção de intervalos maximais $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ para $\mathbf{X}_{W''} \in \Pi_{W''}$, onde $W'' = (W \oplus C^t) \oplus C$.

$$W' = \mathtt{11\underline{1}1} \qquad C = \mathtt{0\underline{1}1}$$
$$(a) \qquad\qquad (b)$$

$$\begin{array}{lll}
[A'_1, B'_1] = [\mathtt{00\underline{0}1}, \mathtt{01\underline{1}1}] & [A'_2, B'_2] = [\mathtt{00\underline{1}0}, \mathtt{01\underline{1}1}] & [A'_3, B'_3] = [\mathtt{01\underline{0}0}, \mathtt{01\underline{1}1}] \\
[A'_4, B'_4] = [\mathtt{00\underline{0}1}, \mathtt{10\underline{1}1}] & [A'_5, B'_5] = [\mathtt{00\underline{1}0}, \mathtt{10\underline{1}1}] & [A'_6, B'_6] = [\mathtt{00\underline{0}1}, \mathtt{11\underline{0}1}] \\
[A'_7, B'_7] = [\mathtt{01\underline{0}0}, \mathtt{11\underline{0}1}] & [A'_8, B'_8] = [\mathtt{00\underline{1}0}, \mathtt{11\underline{1}0}] & [A'_9, B'_9] = [\mathtt{01\underline{0}0}, \mathtt{11\underline{1}0}]
\end{array}$$
$$(c)$$

$$\mathbf{Y}_{W'} = \{[A'_1, B'_1], [A'_2, B'_2], [A'_3, B'_3], [A'_4, B'_4], [A'_5, B'_5], [A'_6, B'_6], [A'_7, B'_7], [A'_8, B'_8], [A'_9, B'_9]\}$$
$$(d)$$

$$W = W' \ominus C^t = \mathtt{1\underline{1}1} \qquad W'' = (W \oplus C^t) \oplus C = \mathtt{11\underline{1}11}$$
$$(e) \qquad\qquad (f)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t = \{&[\mathtt{01\underline{0}01}, \mathtt{11\underline{1}01}], [\mathtt{00\underline{1}00}, \mathtt{11\underline{1}01}], [\mathtt{01\underline{0}01}, \mathtt{11\underline{0}11}], [\mathtt{00\underline{0}10}, \mathtt{11\underline{0}11}], \\
&[\mathtt{00\underline{1}00}, \mathtt{10\underline{1}11}], [\mathtt{00\underline{0}10}, \mathtt{10\underline{1}11}], [\mathtt{00\underline{1}00}, \mathtt{01\underline{1}10}], [\mathtt{00\underline{0}10}, \mathtt{01\underline{1}10}]\}
\end{aligned}$$
$$(g)$$

$$\mathbf{U}_{W''} = \{[\mathtt{00\underline{1}00}, \mathtt{11\underline{1}01}], [\mathtt{00\underline{0}10}, \mathtt{11\underline{0}11}], [\mathtt{00\underline{1}00}, \mathtt{10\underline{1}11}], [\mathtt{00\underline{0}10}, \mathtt{10\underline{1}11}]\}$$
$$(h)$$

$$\mathbf{U}_W = \{[\mathtt{0\underline{1}0}, \mathtt{1\underline{1}0}], [\mathtt{0\underline{0}1}, \mathtt{1\underline{0}1}], [\mathtt{0\underline{1}0}, \mathtt{0\underline{1}1}], [\mathtt{0\underline{0}1}, \mathtt{0\underline{1}1}]\}$$
$$(i)$$

$$\mathbf{X}_1 = \{[\mathtt{0\underline{1}0}, \mathtt{1\underline{1}0}], [\mathtt{0\underline{0}1}, \mathtt{1\underline{0}1}], [\mathtt{0\underline{1}0}, \mathtt{0\underline{1}1}], [\mathtt{0\underline{0}1}, \mathtt{0\underline{1}1}]\}$$
$$\mathbf{X}_2 = \{[\mathtt{0\underline{1}0}, \mathtt{1\underline{1}0}], [\mathtt{0\underline{1}0}, \mathtt{0\underline{1}1}], [\mathtt{0\underline{0}1}, \mathtt{0\underline{1}1}]\}$$
$$(j)$$

Figura 9.1: Limite superior para $\mathbf{X}_W$.

O próximo teorema mostra um limite superior para todos $\mathbf{X}_{W''} \in \Pi_{W''}$.

Teorema 9.6 *Sejam $\mathbf{Y}_{W'} \in \Pi_{W'}$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Para todo $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ tal que $W \oplus C^t = W'$ e $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$, temos que $\mathbf{X}_{W''} \leq \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$, onde $W'' = (W \oplus C^t) \oplus C$.*

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqcup\{(\mathbf{X}_h)_{W \oplus C^t} : h \in C^t\} = \mathbf{Y}_{W'} \\
&\Rightarrow \quad (\mathbf{X}_h)_{W'} \leq \mathbf{Y}_{W'} && (\forall h \in C^t) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{X}_{W'_{-h}} \leq (\mathbf{Y}_{-h})_{W'_{-h}} && (\forall h \in C^t) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{X}_{W' \oplus C} \leq (\mathbf{Y}_{-h})_{W' \oplus C} && (\forall h \in C^t) \\
& \qquad\qquad \text{(uma vez que } h \in C^t \text{ e } W'_{-h} \subseteq W' \oplus C) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{X}_{W' \oplus C} \leq \sqcap\{(\mathbf{Y}_{-h})_{W' \oplus C} : h \in C^t\} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{X}_{W''} \leq \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t.
\end{aligned}$$

■

Seja $\mathbf{X}_W$ uma solução da Equação (1). Assim, $\mathbf{X}_{W''} \in \Pi_{W''/W}$. Pelo Teorema 9.6, $\mathbf{X}_{W''} \leq \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$. Dessa forma, obtemos um limite superior para $\mathbf{X}_{W''}$. Agora, mostraremos um limite superior para $\mathbf{X}_W$. Uma vez que $\mathbf{X}_{W''} \leq \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$, então, para todo $[A, B] \in \mathbf{X}_{W''}$ existe $[L, R] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$ tal que $[A, B] \subseteq [L, R]$. Como $\mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t \in \Pi_{W''}$, $L \subseteq A$ e $B \subseteq R \subseteq W''$. Uma vez que $[A, B] \in \mathbf{X}_{W''}$ e $\mathbf{X}_{W''} \in \Pi_{W''/W}$, então $A \subseteq W$ e $B - W = W^c$. Assim, $L \subseteq A \subseteq W$ e $W^c = B - W \subseteq R - W \subseteq W'' - W = W^c$.

Dessa forma, $R - W = W^c$, e, conseqüentemente, $\{[L, R]\} \in \Pi_{W''/W}$. Logo, para todo intervalo $[A, B] \in \mathbf{X}_{W''}$, existe um intervalo $[L, R] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$, tal que $[A, B] \subseteq [L, R]$ and $\{[L, R]\} \in \Pi_{W''/W}$. Devemos alertar que pode existir um intervalo $[L, R] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$ tal que $[L, R] \notin \Pi_{W''/W}$ (por exemplo, veja a Figura 9.1). Portanto, se $\mathbf{U}_{W''} = \{[L, R] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t : \{[L, R]\} \in \Pi_{W''/W}\}$ e $\mathbf{U}_W = \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{U}_{W''})$, então, para todo $\mathbf{X}_W$ que satisfaz a Equação (1), temos que $\mathbf{X}_W \leq \mathbf{U}_W$. Conseqüentemente, $\mathbf{U}_W$ é um limite superior para $\mathbf{X}_W$. Por exemplo, sejam W' e C os dois conjuntos apresentados nas Figuras 9.1.a e 9.1.b. Seja $\mathbf{Y}_{W'}$ a coleção de intervalos maximais apresentada na Figura 9.1.d. A coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$ está mostrada na Figura 9.1.g e os limites superiores $\mathbf{U}_{W''}$ para $\mathbf{X}_{W''}$ e $\mathbf{U}_W$ para $\mathbf{X}_W$ são os que estão apresentados na Figura 9.1.h e 9.1.i, respectivamente. Note que somente quatro intervalos de $\mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$ aparecem em $\mathbf{U}_{W''}$. A Figura 9.1.j apresenta duas soluções para a Equação (1).

9.2.3 Limites Inferiores para $\mathbf{X}_W$

Nesta subseção, construiremos um conjunto $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C} \subseteq \Pi_W$, onde, para cada solução $\mathbf{X}_W$ da Equação (1), existe um elemento $\mathbf{Z}_W \in \Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ tal que $\mathbf{Z}_W \leq \mathbf{X}_W$. Para isso, precisamos do seguinte resultado.

Proposição 9.7 *Sejam $\mathbf{Y}_{W'} \in \Pi_{W'}$, $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Se $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$, então, para cada intervalo $[A', B'] \in \mathbf{Y}_{W'}$, existem $[P, Q], [X, Y] \in \mathbf{X}_W$ e $a, b \in C^t$ tais que $P_a = A'$ e $Y_b = B' - (W_b)^c_{W'}$.*

Prova: Uma vez que $\mathbf{Y}_{W'} = \mathbf{X}_W \oplus C^t = \sqcup\{(\mathbf{X}_h)_{W \oplus C^t} : h \in C^t\}$, então $W' = W \oplus C^t$ e $\mathbf{Y}_{W'}$ é o supremo de $(\mathbf{X}_h)_{W \oplus C^t}$, $h \in C^t$. Assim, cada intervalo $[A', B'] \in \mathbf{Y}_{W'}$ é construído pelo supremo de translações de intervalos em $\mathbf{X}_W$. Logo, $\mathbf{Y}_{W'} = \mathbf{M}(\cup\{\cup(\mathbf{X}_h)_{W \oplus C^t} : h \in C^t\})$. Dessa forma, se $[A', B'] \in \mathbf{Y}_{W'}$, então existem dois pontos $h_1, h_2 \in C^t$ e dois subconjuntos $A \in \mathcal{U}(\mathbf{X}_{h_1})_{W \oplus C^t}$ e $B \in \mathcal{U}(\mathbf{X}_{h_2})_{W \oplus C^t}$ tais que $A = A'$ e $B = B'$. Note que, se $A \in \mathcal{U}(\mathbf{X}_{h_1})_{W \oplus C^t}$ e $A = A'$ (respectivamente, $B \in \mathcal{U}(\mathbf{X}_{h_2})_{W \oplus C^t}$ e $B = B'$), então existe um intervalo $[L_1, R_1] \in X_W$ (respectivamente, um intervalo $[L_2, R_2] \in X_W$) tal que $(L_1)_{h_1} = A$ (respectivamente, $(R_2)_{h_2} = B \cap W$). Em outras palavras, para cada intervalo $[A', B'] \in \mathbf{Y}_{W'}$, existe um intervalo em $\mathbf{X}_W$ tal que sua translação contribui para gerar a extremidade esquerda do intervalo $[A', B']$. Da mesma forma, existe um outro intervalo em $\mathbf{X}_W$ tal que sua translação contribui para gerar a extremidade direita do intervalo $[A', B']$. Logo, para todo intervalo $[A', B'] \in \mathbf{Y}_{W'}$, existem dois intervalos $[P, Q], [X, Y] \in \mathbf{X}_W$ e dois pontos $a, b \in C^t$ tais que $P_a = A'$ e $Y_b \cup (W_b)^c_{W'} = B'$. Assim, uma vez que $Y_b \subseteq W_b$, então, claramente, $Y_b = B' - (W_b)^c_{W'}$. ∎

Agora, faremos duas definições para construir o conjunto $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$. Primeiro, dado um intervalo $[A', B'] \subseteq \mathcal{P}(W')$ e um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$, definiremos duas coleções de intervalos $\mathcal{L}_W^{[A',B'],C}$ e $\mathcal{R}_W^{[A',B'],C}$, contidos em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$, onde $W = W' \ominus C^t$. Com os intervalos destas duas coleções, podemos construir um conjunto de coleções de intervalos, denotada por $\mathcal{H}_W^{[A',B'],C}$, e, finalmente, usando as coleções de intervalos em $\mathcal{H}_W^{[A',B'],C}$ construiremos o conjunto de coleções de intervalos maximais $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$. Após estas construções provaremos, no Teorema 9.8, que para toda solução $\mathbf{X}_W$ da Equação (1), existe uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Z}_W \in \Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ tal que $\mathbf{Z}_W \leq \mathbf{X}_W$.

Dado um intervalo $[A', B'] \subseteq \mathcal{P}(W')$ e um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$, definimos as coleções de intervalos $\mathcal{L}_W^{[A',B'],C}$ e $\mathcal{R}_W^{[A',B'],C}$, contidos em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$, onde $W = W' \ominus C^t$, como

$$\mathcal{L}_W^{[A',B'],C} = \{[A'_{-x}, A'_{-x}] : A' \subseteq W_x,\ x \in C^t\}$$

e

$$\mathcal{R}_W^{[A',B'],C} = \{[B'_{-x} \cap W, B'_{-x} \cap W] : B' - W_x = (W_x)^c_{W'},\ x \in C^t\}.$$

Claramente, $|\mathcal{L}_W^{[A',B'],C}| \leq |C|$ e $|\mathcal{R}_W^{[A',B'],C}| \leq |C|$. A seguir, damos um exemplo de $\mathcal{L}_W^{[A',B'],C}$ e $\mathcal{R}_W^{[A',B'],C}$. Se $W' = \mathtt{11\underline{1}11}$, $C = \mathtt{0\underline{1}1}$ e $[A', B'] = [\mathtt{01\underline{0}00}, \mathtt{11\underline{1}01}]$, então $W = W' \ominus C^t = \mathtt{1\underline{1}11}$, $\mathcal{L}_W^{[A',B'],C} = \{[\mathtt{1\underline{0}00}, \mathtt{1\underline{0}00}], [\mathtt{0\underline{1}00}, \mathtt{0\underline{1}00}]\}$ e $\mathcal{R}_W^{[A',B'],C} = \{[\mathtt{1\underline{1}01}, \mathtt{1\underline{1}01}], [\mathtt{1\underline{1}10}, \mathtt{1\underline{1}10}]\}$.

Agora, definimos o conjunto $\mathcal{H}_W^{[A',B'],C}$ como

$$\mathcal{H}_W^{[A',B'],C} = \{\{[L, L]\} \sqcup \{[R, R]\} : [L, L] \in \mathcal{L}_W^{[A',B'],C}, [R, R] \in \mathcal{R}_W^{[A',B'],C}\}.$$

Claramente, $|\mathcal{H}_W^{[A',B'],C}| \leq |\mathcal{L}_W^{[A',B'],C}| \cdot |\mathcal{R}_W^{[A',B'],C}| \leq |C|^2$. A seguir, damos um exemplo de $\mathcal{H}_W^{[A',B'],C}$. Se $W' = \mathtt{11\underline{1}11}$, $C = \mathtt{1\underline{1}1}$ e $[A', B'] = [\mathtt{01\underline{0}00}, \mathtt{11\underline{1}01}]$, então $W = W' \ominus C^t = \mathtt{1\underline{1}11}$ e

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_W^{[A',B'],C} &= \{\{[\mathtt{1\underline{0}00}, \mathtt{1\underline{0}00}]\} \sqcup \{[\mathtt{1\underline{1}01}, \mathtt{1\underline{1}01}]\}, \\
&\quad \{[\mathtt{1\underline{0}00}, \mathtt{1\underline{0}00}]\} \sqcup \{[\mathtt{1\underline{1}10}, \mathtt{1\underline{1}10}]\}, \\
&\quad \{[\mathtt{0\underline{1}00}, \mathtt{0\underline{1}00}]\} \sqcup \{[\mathtt{1\underline{1}01}, \mathtt{1\underline{1}01}]\}, \\
&\quad \{[\mathtt{0\underline{1}00}, \mathtt{0\underline{1}00}]\} \sqcup \{[\mathtt{1\underline{1}10}, \mathtt{1\underline{1}10}]\}\}. \\
&= \{\{[\mathtt{1\underline{0}00}, \mathtt{1\underline{0}00}], [\mathtt{1\underline{1}01}, \mathtt{1\underline{1}01}]\}, \\
&\quad \{[\mathtt{1\underline{0}00}, \mathtt{1\underline{0}00}], [\mathtt{1\underline{1}10}, \mathtt{1\underline{1}10}]\}, \\
&\quad \{[\mathtt{0\underline{1}00}, \mathtt{0\underline{1}00}], [\mathtt{1\underline{1}01}, \mathtt{1\underline{1}01}]\}, \\
&\quad \{[\mathtt{0\underline{1}00}, \mathtt{0\underline{1}00}],][\mathtt{1\underline{1}10}, \mathtt{1\underline{1}10}]\}\}
\end{aligned}$$

Seja $I = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ um conjunto de índices. Sejam $\mathbf{Y}_{W'} = \{[A'_i, B'_i] : i \in I]\} \in \Pi_{W'}$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Definimos o conjunto

$$\mathcal{S}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C} = \mathcal{H}_W^{[A'_1,B'_1],C} \times \cdots \times \mathcal{H}_W^{[A'_n,B'_n],C}.$$

Claramente, $|\mathcal{S}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}| \leq |C|^{2n}$.

Dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \Pi_{W'}$ e um subconjunto $C \in \mathcal{P}(E)$, construiremos o conjunto de coleções de intervalos maximais $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$, onde $W = W' \ominus C^t$, como

$$\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C} = \{\mathbf{Z}_W \in \Pi_W : \mathbf{Z}_W = \sqcup\{\mathbf{S}^i_W,\ i \in I\},\ (\mathbf{S}^1_W, \mathbf{S}^2_W, \cdots, \mathbf{S}^n_W) \in \mathcal{S}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}\}.$$

Claramente, $|\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}| \leq |\mathcal{S}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}| \leq |C|^{2n}$. A seguir, damos um exemplo de $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$. Sejam $W', C \in \mathcal{P}(E)$, os conjuntos apresentados nas Figuras 9.2.a e 9.2.b, respectivamente; seja

$$W' = 11\underline{1}1 \qquad C = 0\underline{1}1$$
$$(a) \qquad\qquad (b)$$

$$\begin{array}{lll}
[A'_1, B'_1] = [00\underline{0}1, 01\underline{1}1] & [A'_2, B'_2] = [00\underline{1}0, 01\underline{1}1] & [A'_3, B'_3] = [01\underline{0}0, 01\underline{1}1] \\
[A'_4, B'_4] = [00\underline{0}1, 10\underline{1}1] & [A'_5, B'_5] = [00\underline{1}0, 10\underline{1}1] & [A'_6, B'_6] = [00\underline{0}1, 11\underline{0}1] \\
[A'_7, B'_7] = [01\underline{0}0, 11\underline{0}1] & [A'_8, B'_8] = [00\underline{1}0, 11\underline{1}0] & [A'_9, B'_9] = [01\underline{0}0, 11\underline{1}0]
\end{array}$$
$$(c)$$

$$\mathbf{Y}_{W'} = \{[A'_1, B'_1], [A'_2, B'_2], [A'_3, B'_3], [A'_4, B'_4], [A'_5, B'_5], [A'_6, B'_6], [A'_7, B'_7], [A'_8, B'_8], [A'_9, B'_9]\}$$
$$(d)$$

$$W = W' \ominus C^t = 1\underline{1}1$$
$$(e)$$

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{H}_W^{[A'_1, B'_1], C} = \{\{[0\underline{0}1, 0\underline{0}1]\}\} & \mathcal{H}_W^{[A'_2, B'_2], C} = \{\{[0\underline{0}1, 0\underline{1}1]\}, \{[0\underline{1}0, 0\underline{1}1]\}\} \\
\mathcal{H}_W^{[A'_3, B'_3], C} = \{\{[0\underline{1}0, 0\underline{1}1]\}, \{[0\underline{1}1, 0\underline{1}1], [1\underline{0}0, 1\underline{0}0]\}\} & \mathcal{H}_W^{[A'_4, B'_4], C} = \{\{[0\underline{0}1, 1\underline{0}1]\}, \{[0\underline{0}1, 0\underline{1}1]\}\} \\
\mathcal{H}_W^{[A'_5, B'_5], C} = \{\{[0\underline{0}1, 1\underline{0}1]\}, \{[0\underline{0}1, 0\underline{1}1]\}, \{[1\underline{0}1, 1\underline{0}1], [0\underline{1}0, 0\underline{1}0]\}, \{[0\underline{1}0, 0\underline{1}1]\}\} & \mathcal{H}_W^{[A'_6, B'_6], C} = \{\{[1\underline{1}0, 1\underline{0}0], [1\underline{1}0, 1\underline{1}0], [0\underline{0}1, 0\underline{0}1]\}, \{[0\underline{0}1, 1\underline{0}1]\}\} \\
\mathcal{H}_W^{[A'_7, B'_7], C} = \{\{[0\underline{1}0, 1\underline{1}0]\}, \{[1\underline{0}1, 1\underline{0}1], [0\underline{1}0, 0\underline{1}0]\}, \{[1\underline{0}0, 1\underline{1}0]\}, \{[1\underline{0}0, 1\underline{0}1]\}\} & \mathcal{H}_W^{[A'_8, B'_8], C} = \{\{[1\underline{1}0, 1\underline{1}0], [0\underline{0}1, 0\underline{0}1]\}, \{[0\underline{1}0, 1\underline{1}0]\}\} \\
\mathcal{H}_W^{[A'_9, B'_9], C} = \{\{[0\underline{1}0, 1\underline{1}0]\}, \{[1\underline{0}0, 1\underline{1}0]\}\} &
\end{array}$$
$$(f)$$

$$\mathcal{S}_W^{\mathbf{Y}_{W'}, C} = \mathcal{H}_W^{[A'_1, B'_1], C} \times \cdots \times \mathcal{H}_W^{[A'_9, B'_9], C}$$
$$(g)$$

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{Z}_1 = \{[1\underline{0}0, 1\underline{1}0], [0\underline{0}1, 0\underline{1}1]\} & \mathbf{Z}_2 = \{[1\underline{0}0, 1\underline{1}0], [1\underline{0}0, 1\underline{0}1], [0\underline{0}1, 1\underline{0}1], [0\underline{0}1, 0\underline{1}1]\} \\
\mathbf{Z}_3 = \{[1\underline{0}0, 1\underline{1}0], [0\underline{1}0, 1\underline{1}0], [0\underline{1}0, 0\underline{1}1], [0\underline{0}1, 0\underline{1}1]\} & \mathbf{Z}_4 = \{[0\underline{1}0, 1\underline{1}0], [0\underline{1}0, 0\underline{1}1], [0\underline{0}1, 0\underline{1}1]\} \\
\mathbf{Z}_5 = \{[1\underline{0}0, 1\underline{1}0], [1\underline{0}0, 1\underline{0}1], [0\underline{1}0, 1\underline{1}0], [0\underline{1}0, 0\underline{1}1], [0\underline{0}1, 1\underline{0}1], [0\underline{0}1, 0\underline{1}1]\} & \mathbf{Z}_6 = \{[0\underline{1}0, 1\underline{1}0], [0\underline{1}0, 0\underline{1}1], [0\underline{0}1, 1\underline{0}1], [0\underline{0}1, 0\underline{1}1]\}
\end{array}$$
$$(h)$$

$$\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'}, C} = \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \cdots, \mathbf{Z}_6\}$$
$$(i)$$

Figura 9.2: Exemplo de $\mathcal{S}_W^{\mathbf{Y}_{W'}, C}$ e $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'}, C}$.

$\mathbf{Y}_{W'}$ a coleção de intervalos maximais apresentada na Figura 9.2.d. Note que W', C e $\mathbf{Y}_{W'}$ são exatamente o mesmos que foram apresentados nas Figuras 9.1.a, 9.1.b e 9.1.d, respectivamente. Assim, $\mathcal{S}_W^{\mathbf{Y}_{W'}, C} = \mathcal{H}_W^{[A'_1, B'_1], C} \times \mathcal{H}_W^{[A'_2, B'_2], C} \times \cdots \times \mathcal{H}_W^{[A'_9, B'_9], C}$ e $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'}, C} = \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \cdots, \mathbf{Z}_6\}$, onde $W = W' \ominus C^t$ é o conjunto mostrado na Figura 9.2.c; $\mathcal{H}_W^{[A'_i, B'_i], C}$, para $i \in \{1, 2, \cdots, 9\}$, são os conjuntos apresentados na Figura 9.2.f e $\mathbf{Z}_i$, para $i \in \{1, 2, \cdots, 6\}$, são as coleções de intervalos maximais de Π_W mostradas na Figura 9.2.h.

O próximo resultado mostra quais são os limites inferiores para todas soluções $\mathbf{X}_W$ da Equação (1).

Teorema 9.8 *Sejam $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathbf{Y}_{W'} \in \Pi_{W'}$. Para todo $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$ tal que $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$, existe $\mathbf{Z}_W \in \Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'}, C}$ tal que $\mathbf{Z}_W \leq \mathbf{X}_W$.*

Prova: Seja $\mathbf{Y}_{W'} = \{[A'_i, B'_i] : i \in I\}$. Pela Proposição 9.7, para cada intervalo $[A'_i, B'_i] \in \mathbf{Y}_{W'}$, existem pontos $a_i, b_i \in C^t$ e intervalos $[P_i, Q_i], [X_i, Y_i] \in \mathbf{X}_W$ tais que $(P_i)_{a_i} = A'_i$ e $(Y_i)_{b_i} = B'_i - (W_{b_i})^c_{W'}$. Seja $\mathbf{S}^i_W = \{[P_i, P_i], [Y_i, Y_i]\}$. Seja $\mathbf{Z}_W$ a coleção de intervalos maximais de Π_W tal que $\mathbf{Z}_W = \sqcup\{\mathbf{S}^i_W : i \in I\}$.

Uma vez que $[P_i, P_i] \subseteq [P_i, Q_i]$ e $[Y_i, Y_i] \subseteq [X_i, Y_i]$, então temos que cada $\mathbf{S}_W^i \leq \{[P_i, Q_i], [X_i, Y_i]\} \leq \mathbf{X}_W$. Assim, $\mathbf{Z}_W = \sqcup\{\mathbf{S}_W^i : i \in I\} \leq \mathbf{X}_W$.

Para provar que $\mathbf{Z}_W \in \Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$, temos que mostrar que cada $\mathbf{S}_W^i \in \mathcal{H}_W^{[A'_i,B'_i],C}$. Para isso, devemos mostrar que $[P_i, P_i] \in \mathcal{L}_W^{[A'_i,B'_i],C}$ e $[Y_i, Y_i] \in \mathcal{R}_W^{[A'_i,B'_i],C}$.

Uma vez que $(P_i)_{a_i} = A'_i$, então $(A'_i)_{-a_i} = P_i \subseteq W$. Assim, $A'_i \subseteq W_{a_i}$, e, conseqüentemente, $[P_i, P_i] \in \mathcal{L}_W^{[A'_i,B'_i],C}$.

Uma vez que $(Y_i)_{b_i} = B'_i - (W_{b_i})^c_{W'}$ e $Y_i \subseteq W$, então, claramente, $Y_i = (B'_i)_{-b_i} \cap W$. Portanto, $[Y_i, Y_i] \in \mathcal{R}_W^{[A'_i,B'_i],C}$. ■

Como uma conseqüência do Teorema 9.8, cada solução $\mathbf{X}_W$ da Equação (1) tem um limite inferior em $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$. Mas, algumas coleções de intervalos maximais em $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ podem ser desconsideradas. Para o exemplo apresentado na Figura 9.2.h, somente os limites inferiores $\mathbf{Z}_4$ e $\mathbf{Z}_6$ são menores ou iguais ao limite superior $\mathbf{U}_W$ apresentado na Figura 9.1.i. Assim, neste particular exemplo, temos que $\mathbf{Z}_i \not\leq \mathbf{U}_W$, para $i \in \{1, 2, 3, 5\}$, e conseqüentemente, eles não devem ser utilizados para encontrar as soluções da Equação (1). Agora, para as soluções apresentadas na Figura 9.1.j, temos que $\mathbf{Z}_4 \leq \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \leq \mathbf{U}_W$ e $\mathbf{Z}_6 \leq \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \leq \mathbf{U}_W$.

A seguir, apresentamos um algoritmo para encontrar todas soluções da Equação (1).

Algoritmo SEARCH_1 $(C, \mathbf{Y}_{W'})$:

Entrada: Um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$ e uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \Pi_{W'}$.
Saída: As coleções de intervalos maximais $\mathbf{X}_W \in \Pi_W$, tais que $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$, onde $W = W' \ominus C^t$.

$W'' \leftarrow (W \oplus C^t) \oplus C$;

$\mathbf{U}_{W''} \leftarrow \{[L, R] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t : \{[L, R]\} \in \Pi_{W''/W}\}$.

para cada $\mathbf{Z}_W \in \Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ **faça**

  para cada $\mathbf{X}_W$ tal que $\mathbf{Z}_W \leq \mathbf{X}_W \leq \mathbf{U}_W$ **faça**

    se $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$ **então**

      devolva $\mathbf{X}_W$.

Claramente, a cardinalidade do espaço de busca para o algoritmo SEARCH_1 $(C, \mathbf{Y}_{W'})$ é proporcional a $|\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}| \leq |C|^{2n}$, onde $n = |\mathbf{Y}_{W'}|$, uma vez que cada limite inferior $\mathbf{Z}_W$ é retirado somente uma vez de $\Theta_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$.

9.3 Simplificação para Coleções de Extremidade Direita Fixa

Definimos o conjunto $\mathcal{I}_W \subseteq \Pi_W$ como o conjunto de todas coleções de intervalos maximais tal que a extremidade direita de qualquer intervalo é a janela W. Chamaremos qualquer coleção de intervalos maximais de $\mathcal{I}_W$ por *coleção de extremidade direita fixa.*

Agora, considere o problema, apresentado na Seção 9.2, restrita a $\mathcal{I}_W$ e $\mathcal{I}_{W'}$, isto é, dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$ e um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$, encontrar todas coleções de intervalos maximais $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$ tais que $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$.

Por simplicidade de notação, onde não há risco de confusão, denotaremos os intervalos $[A, W]$ de $\mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$ por $[A]$.

9.3.1 Simplificação do Limite Inferior

Podemos obter um novo limite inferior para $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$, que é ele mesmo uma solução da Equação (1), restrita a coleções de extremidade direita fixa. Para isso, precisamos do seguinte resultado, que é um caso particular da Proposição 9.7, quando a extremidade direita dos intervalos em $\mathbf{Y}_{W'}$ e $\mathbf{X}_W$ são, respectivamente, W' e W.

Proposição 9.9 *Sejam $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Se $\mathbf{Y}_{W'} = \mathbf{X}_W \oplus C^t$, então, para cada intervalo $[A'] \in \mathbf{Y}_{W'}$, existe um intervalo $[P] \in \mathbf{X}_W$ e um ponto $a \in C^t$ tal que $P_a = A'$.*

Dado um intervalo $[A'] \subseteq \mathcal{P}(W')$ e um subconjunto $C \in \mathcal{P}(E)$, definimos os conjuntos $\mathcal{L}_W^{[A'],C} = \{[A'_{-x}, W] : x \in C^t\}$ e $\mathcal{H}_W^{[A'],C} = \{\{[P, W]\} : [P, W] \in \mathcal{L}_W^{[A'],C}\}$. Claramente, $|\mathcal{H}_W^{[A'],C}| = |\mathcal{L}_W^{[A'],C}| \leq |C|$. A seguir, damos um exemplo de $\mathcal{L}_W^{[A'],C}$ e $\mathcal{H}_W^{[A'],C}$. Sejam W' e C os conjuntos apresentados nas Figuras 9.3.a e 9.3.b, respectivamente. Neste caso, $W = W' \ominus C^t$ é o conjunto mostrado na Figura 9.3.e. Se $[A'_1], [A'_2], [A'_3]$ são os intervalos apresentados na Figura 9.3.c, então os conjuntos $\mathcal{L}_W^{[A'_1],C}$, $\mathcal{L}_W^{[A'_2],C}$ e $\mathcal{L}_W^{[A'_3],C}$ são aqueles que estão apresentados na Figura 9.3.f e os conjuntos $\mathcal{H}_W^{[A'_1],C}$, $\mathcal{H}_W^{[A'_2],C}$ e $\mathcal{H}_W^{[A'_3],C}$ são aqueles que estão mostrados na Figura 9.3.g.

Seja $I = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ um conjunto de índices. Seja $\mathbf{Y}_{W'} = \{[A'_i] : i \in I]\} \in \mathcal{I}_{W'}$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Definimos o conjunto $\mathcal{F}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C} = \mathcal{H}_W^{[A'_1],C} \times \cdots \times \mathcal{H}_W^{[A'_n],C}$. Claramente, $|\mathcal{F}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}| \leq |C|^n$. A seguir, damos um exemplo de $\mathcal{F}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$. Se $\mathbf{Y}_{W'}$ e C são a coleção de intervalos maximais e o conjunto apresentados nas Figuras 9.3.d e 9.3.b, respectivamente, então o conjunto $\mathcal{F}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ é aquele que está mostrado na Figura Figure 9.3.h.

Dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$ e um subconjunto $C \in \mathcal{P}(E)$, definimos o conjunto de coleção de intervalos maximais $\Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$, onde $W = W' \ominus C^t$, como

$$W' = 11\underline{1}11 \qquad C = 1\underline{1}1$$
$$(a) \qquad\qquad (b)$$

$$[A'_1] = [00\underline{0}10] \qquad [A'_2] = [00\underline{1}00] \qquad [A'_3] = [01\underline{0}00]$$
$$(c)$$

$$\mathbf{Y}_{W'} = \{[A'_1], [A'_2], [A'_3]\}$$
$$(d)$$

$$W = W' \ominus C^t = 1\underline{1}1$$
$$(e)$$

$$\mathcal{L}_W^{[A'_1],C} = \{[0\underline{1}0], [0\underline{0}1]\} \qquad \mathcal{L}_W^{[A'_2],C} = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0], [0\underline{0}1]\} \qquad \mathcal{L}_W^{[A'_3],C} = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0]\}$$
$$(f)$$

$$\mathcal{H}_W^{[A'_1],C} = \{\{[0\underline{1}0]\}, \{[0\underline{0}1]\}\} \qquad \mathcal{H}_W^{[A'_2],C} = \{\{[1\underline{0}0]\}, \{[0\underline{1}0]\}, \{[0\underline{0}1]\}\} \qquad \mathcal{H}_W^{[A'_3],C} = \{\{[1\underline{0}0]\}, \{[0\underline{1}0]\}\}$$
$$(g)$$

$$\mathcal{F}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C} = \mathcal{H}_W^{[A'_1],C} \times \mathcal{H}_W^{[A'_2],C} \times \mathcal{H}_W^{[A'_3],C}$$
$$(h)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \{[0\underline{0}1], [1\underline{0}0]\} \qquad \mathbf{Z}_2 = \{[0\underline{0}1], [0\underline{1}0]\} \qquad \mathbf{Z}_3 = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0], [0\underline{0}1]\} \qquad \mathbf{Z}_4 = \{[0\underline{1}0]\} \qquad \mathbf{Z}_5 = \{[1\underline{0}0], [0\underline{1}0]\}$$
$$(i)$$

$$\Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C} = \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \cdots, \mathbf{Z}_5\}$$
$$(j)$$

Figura 9.3: Exemplo de $\mathcal{F}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ e $\Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$.

$\Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C} = \{\mathbf{Z}_W \in \mathcal{I}_W : \mathbf{Z}_W = \sqcup\{\mathbf{F}_W^i,\ i \in I\},\ (\mathbf{F}_W^1, \mathbf{F}_W^2, \cdots, \mathbf{F}_W^n) \in \mathcal{F}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}\}$. Claramente, $|\Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}| \leq |\mathcal{F}_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}| \leq |C|^n$. Um exemplo de $\Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ pode ser visto na Figura 9.3.j.

Os limites superiores $\mathbf{U}_{W''}$ para $\mathbf{X}_{W''}$ e $\mathbf{U}_W$ para $\mathbf{X}_W$ estão apresentados nas Figuras 9.4.g e 9.4.h, respectivamente. Note que somente dois intervalos de $\mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t$ (apresentados na Figura 9.4.f) aparecem em $\mathbf{U}_{W''}$. A Figura 9.4.i apresenta duas soluções da Equação (1). Além disso, para este exemplo, somente o limite inferior $\mathbf{Z}_4$ é menor ou igual ao limite superior $\mathbf{U}_W$.

O próximo resultado mostra os limites inferiores para as soluções $\mathbf{X}_W$ da Equação (1) para coleções de extremidade direita fixa.

Teorema 9.10 *Sejam $C \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$. Para todo $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$, existe $\mathbf{Z}_W \in \Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ tal que $\mathbf{Z}_W \leq \mathbf{X}_W$ e $\mathbf{Z}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$.*

Prova: Seja $\mathbf{Y}_{W'} = \{[A'_i] : i \in I\}$. Pela Proposição 9.9, para cada intervalo $[A'_i] \in \mathbf{Y}_{W'}$, existem $a_i \in C^t$ e $[P_i] \in \mathbf{X}_W$ tais que $(P_i)_{a_i} = A'_i$. Seja $\mathbf{F}_W^i = \{[P_i]\}$, para $i \in I$. Seja $\mathbf{Z}_W$ a coleção de intervalos maximais de $\mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{Z}_W = \sqcup\{\mathbf{F}_W^i : i \in I\}$.

A prova de que $\mathbf{Z}_W \in \Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ e $\mathbf{Z}_W \leq \mathbf{X}_W$ pode ser feita de uma maneira similar ao do Teorema 9.8.

Agora, provaremos que $\mathbf{Z}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$. Para isso, dividiremos esta prova em duas partes. Na primeira, provaremos que $\mathbf{Z}_W \oplus C^t \leq \mathbf{Y}_{W'}$ e, na segunda, mostraremos $\mathbf{Y}_{W'} \leq$

$$W' = \mathtt{11\underline{1}11} \qquad C = \mathtt{1\underline{1}1}$$
$$(a) \qquad\qquad (b)$$
$$W = W' \ominus C^t = \mathtt{1\underline{1}1} \qquad W'' = (W \oplus C^t) \oplus C = \mathtt{111\underline{1}111}$$
$$(d) \qquad\qquad (e)$$
$$\mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t = \{[\mathtt{000\underline{1}000}], [\mathtt{001\underline{0}010}], [\mathtt{001\underline{0}000}], [\mathtt{010\underline{0}100}]\}$$
$$(f)$$
$$\mathbf{U}_{W''} = \{\{[\mathtt{000\underline{1}000}], [\mathtt{001\underline{0}100}]\}$$
$$(g)$$
$$\mathbf{U}_{W} = \{[\mathtt{0\underline{1}0}], [\mathtt{1\underline{0}1}]\}$$
$$(h)$$
$$\mathbf{X}_1 = \{[\mathtt{1\underline{0}1}], [\mathtt{0\underline{1}0}]\}$$
$$\mathbf{X}_2 = \{[\mathtt{0\underline{1}0}]\}$$
$$(i)$$

Figura 9.4: Limite superior e as soluções para o exemplo apresentado na Figura 9.3.

$\mathbf{Z}_W \oplus C^t$.

Uma vez que $\mathbf{Z}_W \leq \mathbf{X}_W$, então, pela Proposição 9.3, podemos ver facilmente que $\mathbf{Z}_W \oplus C^t \leq \mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$.

Observe que $\{[(A'_i)_{-a_i}, W]\} \oplus C^t \in \mathcal{I}_{W'}$. Além disso, temos que $\{[(A'_i)_{-a_i}, W'_{-a_i}]_{a_i}\} \leq \{[(A'_i)_{-a_i}, W]\} \oplus C^t$, uma vez que cada $a_i \in C^t$. Assim, podemos ver facilmente que $\mathbf{Y}_{W'} = \{[A'_i] : i \in I\} = \{[(A'_i)_{-a_i}, W'_{-a_i}]_{a_i} : i \in I\} \leq \sqcup\{\{[(A'_i)_{-a_i}, W]\} \oplus C^t : i \in I\}$. Dessa forma, uma vez que $\mathbf{F}^i_W = \{[(A'_i)_{-a_i}, W]\}$, temos que $\mathbf{Y}_{W'} \leq \sqcup\{\mathbf{F}^i_W \oplus C^t : i \in I\}$. Conseqüentemente, pela Proposição 9.2, $\mathbf{Y}_{W'} \leq \sqcup\{\mathbf{F}^i_W : i \in I\} \oplus C^t = \mathbf{Z}_W \oplus C^t$. ■

Como conseqüência do Teorema 9.10, todos limites inferiores para toda solução $\mathbf{X}_W$ da Equação (1), restrita a coleções de extremidades fixas, estão em $\Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$. De fato, dada uma solução $\mathbf{X}_W$ da Equação (1), existe $\mathbf{Z}_W \in \Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ tal que $\mathbf{Z}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$ e $\mathbf{Z}_W \leq \mathbf{X}_W$.

Apresentamos agora uma algoritmo para encontrar todas soluções da Equação (1), onde $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$.

Algoritmo SEARCH_2 $(C, \mathbf{Y}_{W'})$:

Entrada: Um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$ e uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$.
Saída: As coleções de intervalos maximais $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$, tais que $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$, onde $W = W' \ominus C^t$.

$W'' \leftarrow (W \oplus C^t) \oplus C$; $\mathbf{U}_{W''} \leftarrow \{[L] \in \mathbf{Y}_{W'} \ominus C^t : \{[L]\} \in \mathcal{I}_{W''/W}\}$.

para cada $\mathbf{Z}_W \in \Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$ **faça**
  se $\mathbf{Z}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$ **então**
    para cada $\mathbf{X}_W$ tal que $\mathbf{Z}_W \leq \mathbf{X}_W \leq \mathbf{U}_W$ **faça**
      se $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$ **então**
        devolva $\mathbf{X}_W$.

Claramente, a cardinalidade do espaço de busca do algoritmo SEARCH_2 $(C, \mathbf{Y}_{W'})$ é proporcional a $|\Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}| \leq |C|^n$, onde $n = |\mathbf{Y}_{W'}|$, uma vez que cada limite inferior $\mathbf{Z}_W$ é retirado somente uma vez de $\Phi_W^{\mathbf{Y}_{W'},C}$. Além disso, se usamos o algoritmo SEARCH_2 $(C, \mathbf{Y}_{W'})$, quando $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'} \subseteq \Pi_{W'}$, em vez do algoritmo SEARCH_1 $(C, \mathbf{Y}_{W'})$, o espaço de busca para escolha dos limites inferiores é reduzido de $O(|C|^{2n})$ para $O(|C|^n)$.

9.3.2 Conjuntos viáveis para C

Na Equação (1), o subconjunto $C \in \mathcal{P}(E)$ é um parâmetro fixo. Obviamente, dada uma coleção $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, podem existir alguns subconjuntos C em $\mathcal{P}(E)$ tais que a Equação (1) não tenha solução. Por exemplo, se W' e $\mathbf{Y}_{W'}$ são o subconjunto e a coleção de intervalos mostrados nas Figuras 9.3.a e 9.3.d, respectivamente, é fácil ver que para $C = \texttt{111}\underline{\texttt{1}}\texttt{11}$, a Equação (1) não tem solução, uma vez que $W' = \texttt{11}\underline{\texttt{1}}\texttt{11}$, e, conseqüentemente, $W = W' \ominus C^t = \emptyset$.

Dada uma coleção de intervalos $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, os subconjuntos C em $\mathcal{P}(E)$ tais que a Equação (1) tem pelo menos uma solução são chamados de *conjuntos viáveis*. Por exemplo, se $\mathbf{Y}_{W'}$ é a coleção de intervalos apresentada na Figura 9.3.d, então o conjunto C mostrado na Figura 9.3.b é viável.

Nesta subseção, estudaremos algumas propriedades da Equação (1) para dar algumas condições necessárias para a existência de conjuntos viáveis. Observe que, pela Proposição 9.4, se um conjunto $C \in \mathcal{P}(E)$ é viável, então, para todo $h \in E$, o conjunto C_h também é viável.

Seja $[A] \in \mathbf{X} \in \mathcal{I}_W$. Dizemos que a extremidade esquerda A é *minimal* em $\mathbf{X}$ se, e somente se, $|A| \leq |B|$, para todo intervalo $[B] \in \mathbf{X}$. Claramente, se $|A| = |B|$, então tanto a extremidade esquerda de $[A]$ como a de $[B]$ são minimais. Por exemplo, sejam let $W = \texttt{11}\underline{\texttt{1}}\texttt{11}$, $A_1 = \texttt{00}\underline{\texttt{1}}\texttt{01}$, $A_2 = \texttt{10}\underline{\texttt{1}}\texttt{00}$, $A_3 = \texttt{01}\underline{\texttt{0}}\texttt{00}$, $A_4 = \texttt{00}\underline{\texttt{1}}\texttt{00}$, $A_5 = \texttt{00}\underline{\texttt{0}}\texttt{10}$ e $\mathbf{A}_W = \{[A_1], [A_2], [A_3], [A_4], [A_5]\}$, então os intervalos $[A_3]$, $[A_4]$ e $[A_5]$ têm extremidade esquerda minimal em $\mathbf{A}_W$.

Seja $\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W$. Denotaremos por $\mathbf{Min}(\mathbf{Z})$ o conjunto de todos intervalos em $\mathbf{Z}$ tais que suas extremidades esquerdas são minimais em $\mathbf{Z}$, ou seja, $\mathbf{Min}(\mathbf{Z}) = \{[A] \in \mathbf{Z} : A \text{ é minimal em } \mathbf{Z}\}$. Para o último exemplo, $\mathbf{Min}(\mathbf{A}) = \{[A_3], [A_4], [A_5]\}$.

Dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Z} \in \mathcal{I}_W$, para cada conjunto $A \in \mathcal{P}(E)$, definimos o conjunto $S_A^{\mathbf{Z}} \in \mathcal{P}(E)$ como $S_A^{\mathbf{Z}} = \{h \in E : [A_{-h}] \in \mathbf{Z}\}$. Para o último exemplo, $S_{A_1}^{\mathbf{A}} = \underline{\texttt{1}}\texttt{01}$ e $S_{A_4}^{\mathbf{A}} = \texttt{1}\underline{\texttt{1}}\texttt{1}$.

O próximo resultado fornece uma condição necessária para conjuntos viáveis.

Teorema 9.11 *Sejam $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$ e $C \in \mathcal{P}(E)$. Se C é um conjunto viável, então, para todo $[A'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y}_{W'})$, existe $a \in E$ tal que $C_a \subseteq S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$ e C é um invariante de $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$.*

Prova: Uma vez que C é viável, existe $\mathbf{X}_W \in \mathcal{I}_W$ tal que $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$. Dado um intervalo $[A']$ em $\mathbf{Min}(\mathbf{Y}_{W'})$, denotamos por $\mathbf{I}_{A'}^{\mathbf{X}_W} \subseteq \mathbf{X}_W$ e $\mathbf{I}_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}} \subseteq \mathbf{Y}_{W'}$ as coleções de intervalos tais que $\mathbf{I}_{A'}^{\mathbf{X}_W} = \{[A'_{-x}] : x \in S_{A'}^{\mathbf{X}_W}\}$ e $\mathbf{I}_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}} = \{[A'_{-y}] : y \in S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}\}$. Agora, provaremos que $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}} = S_{A'}^{\mathbf{X}_W} \oplus C$.

Por um lado, $S_{A'}^{\mathbf{X}_W} \oplus C \subseteq S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$. De fato, seja $[A'_{-x}] \in \mathbf{I}_{A'}^{\mathbf{X}_W}$ e $c \in C^t$. Mostraremos que $[A'_{-x+c}, W'] \in \mathbf{Y}_{W'}$. Suponha por absurdo que $[A'_{-x+c}, W'] \notin \mathbf{Y}_{W'}$. Assim, existe um intervalo $[X', W'] \in \mathbf{Y}_{W'}$ tal que $X' \subseteq A'_{-x+c}$ e $X' \neq A'_{-x+c}$. Assim, pela Proposição 2.1, $|X'| < |A'_{-x+c}|$. Mas, isto é uma contratriz o fato de que A' é minimal em $\mathbf{Y}_{W'}$. Dessa forma, $[A'_{-x+c}, W'] \in \mathbf{Y}_{W'}$. Logo, existe $y \in S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$ tal que $[A'_{-x+c}] = [A'_{-y}]$, ou seja, $-x + c = -y$. Assim, $x + (-c) = y$ e , portanto $S_{A'}^{\mathbf{X}_W} \oplus C \subseteq S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$, uma vez que $c \in C^t$.

Por outro lado, $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}} \subseteq S_{A'}^{\mathbf{X}_W} \oplus C$. Para provar isso, temos que mostrar que, dado um intervalo $[A'_{-y}] \in \mathbf{Y}_{W'}$, então existem $x \in S_{A'}^{\mathbf{X}_W}$ e $c \in C^t$ tais que $-y = -x + c$. Pela Proposição 9.9, existem um intervalo $[P] \in \mathbf{X}_W$ e um ponto $c \in C^t$ tais que $P_c = A'_{-y}$. Assim, $[P] = [A'_{-c-y}]$ e, conseqüentemente, $[P] \in \mathbf{I}_{A'}^{\mathbf{X}_W}$. Dessa forma, existe $x \in S_{A'}^{\mathbf{X}_W}$ tal que $[P] = [A'_{-x}]$. Dessa forma, $-y = -x + c$. Portanto, $y = x + (-c)$, e, uma vez que $y \in S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$, $x \in S_{A'}^{\mathbf{X}_W}$ e $c \in C^t$, então $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}} \subseteq S_{A'}^{\mathbf{X}_W} \oplus C$.

Uma vez que $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}} = S_{A'}^{\mathbf{X}_W} \oplus C$, então, pela Proposição 3.15, C é um invariante de $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$. Falta ainda mostrar que existe $a \in E$ tal que $C_a \subseteq S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$.

Seja $a \in S_{A'}^{\mathbf{X}_W}$. Pela Proposição 3.10 e pela definição de dilatação, temos que $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}} = (S_{A'}^{\mathbf{X}_W})_{-a} \oplus C_a$. Uma vez que $a \in S_{A'}^{\mathbf{X}_W}$, então $o \in (S_{A'}^{\mathbf{X}_W})_{-a}$, e, pela definição e pela propriedade de comutatividade da adição de Minkowski, $C_a \subseteq C_a \oplus (S_{A'}^{\mathbf{X}_W})_{-a} = (S_{A'}^{\mathbf{X}_W})_{-a} \oplus C_a = S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$. ■

Devemos observar que, dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, como uma conseqüência da Proposição 9.4, se C é uma solução viável, então, para todo $h \in E$, C_h também o é. Assim, para encontrar todos conjuntos viáveis C_h, é suficiente procurar somente um conjunto viável C que represente todos os conjuntos viáveis C_h. Chamaremos o conjunto viável C que representa todas as suas translações por *representante do conjunto viável*.

Dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, pelo Teorema 9.11, se C é viável, então, para todo $[A'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y}_{W'})$, uma translação de C, digamos C_a, é um subconjunto de $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$. Pela última observação, C_a é também um conjunto viável. Portanto, podemos encontrar todos os representantes dos conjuntos viáveis C procurando $C \subseteq S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$ tal que C é um invariante de $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$.

Agora, dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, apresentamos o algoritmo Search_All que tem como saída pares $(C, \mathbf{X}_W) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{I}_W$ tais que $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$.

Algoritmo Search_All ($\mathbf{Y}_{W'}$):

Entrada: Uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$.
Saída: Pares $(C, \mathbf{X}_W) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{I}_W$, tais que $\mathbf{X}_W \oplus C^t = \mathbf{Y}_{W'}$, com $W = W' \ominus C^t$.

Seja $[A'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y}_{W'})$ tal que, para todo $[D'] \in \mathbf{Min}(\mathbf{Y}_{W'})$, $|S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}| \leq |S_{D'}^{\mathbf{Y}_{W'}}|$.

para todo $C \subseteq S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$ **faça**

se C é um invariante de $S_{A'}^{\mathbf{Y}_{W'}}$ **então**

começo

seja $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n\}$ a saída de SEARCH_2 $(C, \mathbf{Y}_{W'})$;

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ devolva o par $(C, \mathbf{X}_i)$;

fim.

Dada uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$, o algoritmo SEARCH_ALL $(\mathbf{Y}_{W'})$ procura os representantes dos conjuntos viáveis C para a Equação (1) e, depois, ele chama SEARCH_2 $(C, \mathbf{Y}_{W'})$ para encontrar todas as soluções $\mathbf{X}_W$ da Equação (1). Em outras palavras, este algoritmo soluciona completamente a Equação (1) quando $\mathbf{Y}_{W'} \in \mathcal{I}_{W'}$.

9.4 Conversão da Sup-Decomposição para Decomposições Seqüenciais

Denotaremos por Υ_W o conjunto de todos $W-$operadores que podem ser construídos por composições de erosões e dilatações. Note que o conjunto dos filtros alternados seqüenciais [43], LD's em uma janela W, é um subconjunto de Υ_W. Dada uma base de um operador $\psi \in \Upsilon_W$, descrevemos nesta seção como encontrar uma representação seqüencial para ψ.

Vimos no Capítulo 3, na Subseção 3.6.1, que a base de um operador $\psi \in \Psi_W$ se simplifica no caso em que ψ é crescente: a extremidade direita de todo intervalo na base de ψ é a própria janela W, ou seja, ψ é crescente se, e somente se, para todo intervalo $[A, B] \in \mathbf{B}_W(\psi)$, temos que $B = W$. Assim, podemos ver facilmente que, $\psi \in \Psi_W$ é crescente se, e somente se, $\mathbf{B}_W(\psi) \in \mathcal{I}_W$.

Note que se $\psi \in \Upsilon_W$, então ψ é um operador crescente, uma vez que dilatações e erosões são operadores crescentes [24, p. 86] e composições de operadores crescentes geram operadores crescentes [24, p. 46]. Assim $\Upsilon_W \subseteq \mathcal{I}_W$. Além disso, se $\psi \in \Upsilon_W$, então $\psi^* \in \Upsilon_W$, uma vez que, pela Proposição 3.30, $\varepsilon_C^* = \delta_{C^t}$ e $\delta_C^* = \varepsilon_{C^t}$.

Se ψ é um operador em Υ_W, então uma representação de ψ pode começar por uma dilatação ou uma erosão, ou seja, ψ pode ser reescrito como $\delta_C\psi_1$ ou $\varepsilon_C\psi_1$, onde $C \in \mathcal{P}(E)$.

Proposição 9.12 *Se $\psi \in \Upsilon_W$ e $C \in \mathcal{P}(E)$, então $\mathbf{B}_{W\oplus C}((\varepsilon_{C^t}\psi)^*) = \mathbf{B}_W(\psi^*) \oplus C^t$.*

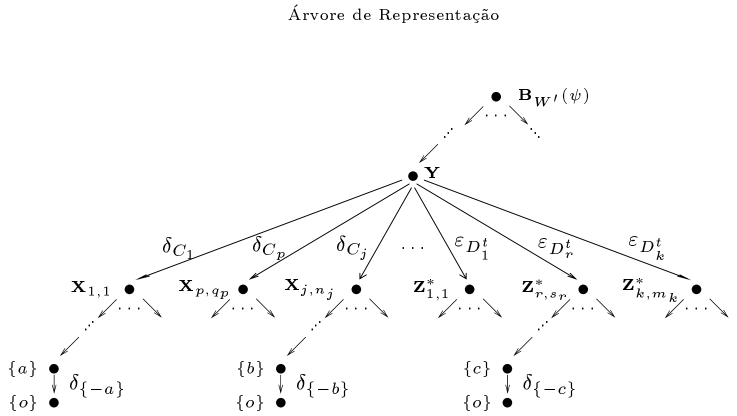

Figura 9.5: Um diagrama da árvore de representação.

Prova: Proposição 3.30, $\varepsilon^*_{C^t} = \delta_C$ e, pela Proposição 3.41, temos que $\mathbf{B}_{W\oplus C^t}(\delta_C\psi) = \mathbf{B}_W(\psi) \oplus C^t$. Logo, $\mathbf{B}_{W\oplus C^t}((\varepsilon_{C^t}\psi)^*) = \mathbf{B}_{W\oplus C^t}(\varepsilon^*_{C^t}\psi^*) = \mathbf{B}_{W\oplus C^t}(\delta_C\psi^*) = \mathbf{B}_W(\psi^*) \oplus C^t$. ∎

Seja $\psi \in \Upsilon_W$. Como, pela Proposição 3.46, podemos construir a base de ψ^* a partir da base de ψ, então, dada a base de um operador $\psi \in \Upsilon_W$ que começa por uma dilatação (respectivamente, erosão), podemos, pela Proposição 3.41 (respectivamente, Proposição 9.12), encontrar uma representação de ψ aplicando o procedimento SEARCH_ALL para $\mathbf{B}_W(\psi)$ (respectivamente, para $\mathbf{B}_W(\psi^*)$). Se $(C, \mathbf{X})$ é uma saída do procedimento SEARCH_ALL ($\mathbf{B}_W(\psi)$) (respectivamente, $\mathbf{B}_W(\psi^*)$), então ψ pode ser reescrito como $\psi = \delta_C\psi_1$ (respectivamente, como $\psi = \varepsilon_{C^t}\psi_1$), onde ψ_1 é um W-operador crescente e $\mathbf{B}(\psi_1) = \mathbf{X}$ (respectivamente, $\mathbf{B}(\psi_1^*) = \mathbf{X}^*$).

Assim, dada a base de um operador $\psi \in \Upsilon_W$, podemos construir uma árvore que representa o espaço de busca de todas representações seqüenciais possíveis de ψ da seguinte forma. A raiz é a base de ψ. Um nó é uma coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_W \in \mathcal{I}_W$. Se $\mathbf{Y}_W = \{[\{o\}]\}$, então $\mathbf{Y}_W$ não tem filhos. Se $\mathbf{Y}_W = \{[\{a\}]\}$, $a \neq o$, então o filho de $\mathbf{Y}_W$ é $\{[\{o\}]\}$ e a aresta que liga $\mathbf{Y}_W$ e seus filhos é rotulada por $\delta_{\{-a\}}$. Caso contrário, construa $\mathbf{Y}^*_W$ usando o resultado da Proposição 3.46 e aplique o procedimento SEARCH_ALL para $\mathbf{Y}_W$ e $\mathbf{Y}^*_W$. Se $(C, \mathbf{X})$ é uma saída de SEARCH_ALL ($\mathbf{Y}_W$), então $\mathbf{X}$ é um filho de $\mathbf{Y}_W$ e a aresta que liga $\mathbf{Y}_W$ a $\mathbf{X}$ é rotulada por δ_C. Se $(C, \mathbf{X})$ é uma saída do procedimento SEARCH_ALL ($\mathbf{Y}^*_W$), então $\mathbf{X}^*$ é um filho de $\mathbf{Y}_W$ e a aresta que liga $\mathbf{Y}_W$ a $\mathbf{X}^*$ é rotulada por ε_{C^t}. Chamaremos esta árvore de *árvore de representação*.

Note que, dada a base de um operador $\psi \in \Upsilon_W$, os rótulos das arestas que estão no caminho da raiz a um nó $\mathbf{Y}_W = \{[\{o\}]\}$ forma uma representação seqüencial de ψ.

Na Figura 9.5, apresentamos um diagrama que descreve graficamente os filhos de um nó $\mathbf{Y}$ na árvore de representação. Para este diagrama, todas saídas de SEARCH_ALL($\mathbf{Y}$) são

$$\begin{array}{cccc}
(C_1, \mathbf{X}_{1,1}) & (C_1, \mathbf{X}_{1,2}) & \cdots & (C_1, \mathbf{X}_{1,n_1}) \\
(C_2, \mathbf{X}_{2,1}) & (C_2, \mathbf{X}_{2,2}) & \cdots & (C_2, \mathbf{X}_{2,n_2}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(C_j, \mathbf{X}_{j,1}) & (C_j, \mathbf{X}_{j,2}) & \cdots & (C_j, \mathbf{X}_{j,n_j})
\end{array}$$

e todas saídas de SEARCH_ALL($\mathbf{Y}^*$) são

$$\begin{array}{cccc}
(D_1, \mathbf{Z}_{1,1}) & (D_1, \mathbf{Z}_{1,2}) & \cdots & (D_1, \mathbf{Z}_{1,m_1}) \\
(D_2, \mathbf{Z}_{2,1}) & (D_2, \mathbf{Z}_{2,2}) & \cdots & (D_2, \mathbf{Z}_{2,m_2}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(D_k, \mathbf{Z}_{k,1}) & (D_k, \mathbf{Z}_{k,2}) & \cdots & (D_k, \mathbf{Z}_{k,m_k})
\end{array}$$

Dessa forma, os filhos de $\mathbf{Y}$ são as coleções de intervalos maximais $\mathbf{X}_{p,q_p}$ e $\mathbf{Z}^*_{r,s_r}$, onde $p \in \{1, 2, \cdots, j\}$, $q_p \in \{1, 2, \cdots, n_r\}$, $r \in \{1, 2, \cdots, k\}$ e $s_r \in \{1, 2, \cdots, m_t\}$. A aresta que liga $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X}_{q,q_p}$ (respectivamente, $\mathbf{Z}^*_{r,s_r}$) é rotulada por δ_{C_p} (respectivamente, $\varepsilon_{D^t_r}$).

9.5 O Algoritmo Implementado para Mudança de Estrutura

Implementamos os algoritmos SEARCH_1, SEARCH_2 e SEARCH_ALL apresentados nas Seções 9.2 e 9.3. Usando a implementação do algoritmo SEARCH_ALL, implementamos também um procedimento para transformar automaticamente a sup-decomposição de um dado operador $\psi \in \Upsilon_W$ em todas possíveis representações seqüenciais de ψ. A tarefa deste procedimento é visitar todos nós da árvore de representação aplicando o algoritmo SEARCH_ALL. Quando um nó $\{o\}$ é encontrado, o procedimento devolve uma representação de ψ percorrendo e imprimindo os rótulos das arestas do caminho da raiz até esse nó. Existem muitas maneiras de visitar os nós de uma árvore. Para o algoritmo descrito acima, utilizamos a busca em profundidade [37, p. 39].

9.6 Exemplos de Aplicação do Algoritmo

Nesta seção, mostraremos algumas aplicações do método discutido na Seção 9.4.

Na Figura 9.6, mostramos um exemplo simples para encontrar uma representação seqüencial de um operador $\psi \in \Upsilon_{W'}$. Neste exemplo, a base de ψ é a coleção de intervalos maximais $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_{W'}$ apresentada na Figura 9.6.a. A rais da árvore de representação é a base de entrada, ou seja, $\mathbf{Y}_1$.

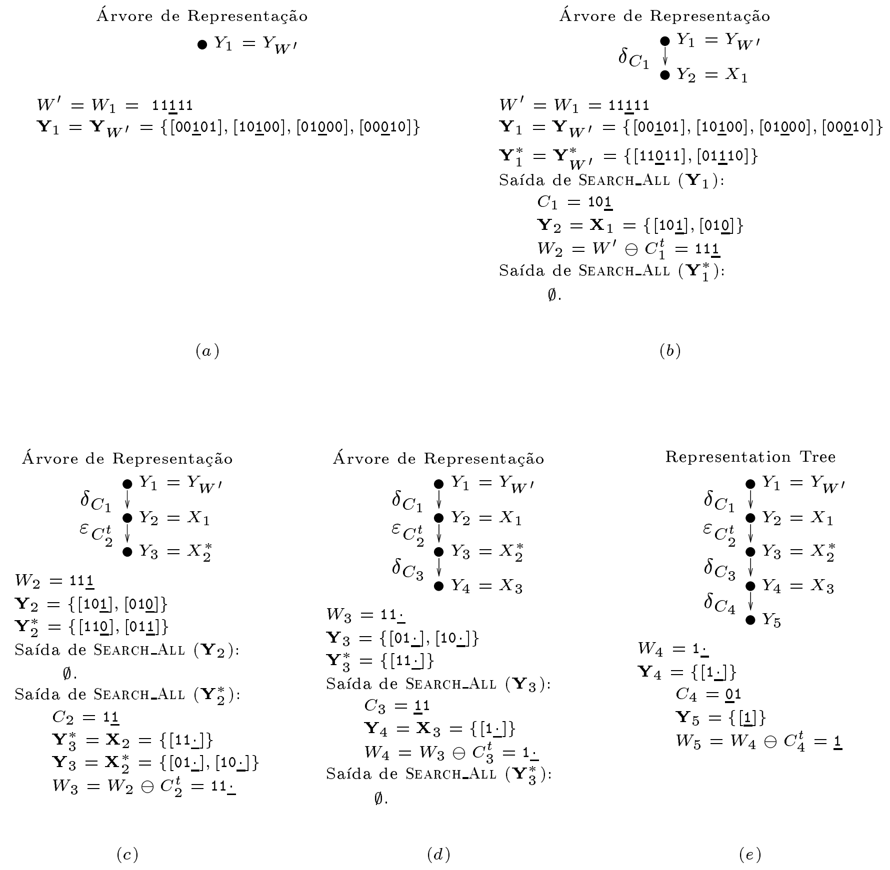

Figura 9.6: Applicação do método proposto para um exemplo simples.

A Figura 9.6.b mostra que as saídas do procedimento SEARCH_ALL quando aplicado a $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_1^*$ são, respectivamente, $(C_1, \mathbf{X}_1)$ e $\emptyset$. Assim, na árvore de representação, o filho do nó raiz $\mathbf{Y}_1$ é $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_1$ e a aresta que liga $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$ é rotulada por δ_{C_1} (veja a Figura 9.6.b).

Na Figura 9.6.c, vemos que as saídas de SEARCH_ALL quando aplicado a $\mathbf{Y}_2$ e $\mathbf{Y}_2^*$ são, respectivamente, $\emptyset$ e $(C_2, \mathbf{X}_2)$. Assim, na árvore de representação, o filho do nó $\mathbf{Y}_2$ é $\mathbf{Y}_3 = \mathbf{X}_2^*$ e a aresta que liga $\mathbf{Y}_2$ e $\mathbf{Y}_3$ é rotulada por $\varepsilon_{C_2^t}$, como mostrado na Figura 9.6.c.

Na Figura 9.6.d, mostramos que as saídas de SEARCH_ALL quando aplicado a $\mathbf{Y}_3$ e $\mathbf{Y}_3^*$ são, respectivamente, $(C_3, \mathbf{X}_3)$ e $\emptyset$. Assim, na árvore de representação, o filho do nó $\mathbf{Y}_3$ é $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{X}_3$ e a aresta que liga $\mathbf{Y}_3$ e $\mathbf{Y}_4$ é rotulada por δ_{C_3}, como mostra a Figura 9.6.d.

Finalmente, na Figura 9.6.e, $\mathbf{Y}_4 = \{[\{a\}]\}$, onde $a = (-1, 0)$. Uma vez que $a \neq o$, então o filho de $\mathbf{Y}_4$ é $\mathbf{Y}_5 = \{[\{o\}]\}$ e a aresta que liga $\mathbf{Y}_4$ e $\mathbf{Y}_5$ é rotulada por δ_{C_4} com $C_4 = \{-a\}$.

Os rótulos das arestas sobre o caminho da raiz até o nó $\mathbf{Y}_5$ forma uma representação seqüencial de ψ, ou seja, $\delta_{C_1}\varepsilon_{C_2^t}\delta_{C_3}\delta_{C_4}$ é uma representação seqüencial de ψ. Note que, para este exemplo, a sup-decomposição de ψ tem 4 deslocamentos, 2 intersecções e 3 uniões. A representação seqüencial de ψ tem 4 deslocamentos, 2 uniões e 1 intersecção. Assim, o número de deslocamentos, intersecções e uniões para implementar ψ usando sua sup-decomposição é 9; se a representação seqüencial encontrada é usada, este número decresce para 7.

Como podemos ver neste exemplo simples, transformamos a sup-decomposição de ψ (que tem uma estrutura paralela) para uma representação puramente seqüencial de ψ. A vantagem de representações seqüenciais sobre a sup-decomposição é que implementar representações seqüenciais é geralmente mais eficiente em máquinas convencionais seqüenciais.

A seguir damos alguns resultados experimentais da aplicação do algoritmo. Estes experimentos foram realizados usando uma máquina com processador Pentium III, 450MHz. O tempo da CPU é medido em minutos (m) e segundos (s).

Sejam W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 os subconjuntos apresentados nas Figuras 9.7.a, 9.7.d, 9.7.f, 9.7.h e 9.7.j, respectivamente. Sejam $\psi_1, \psi_6 \in \Omega_{W_1}$ $\psi_2 \in \Omega_{W_2}$, $\psi_3 \in \Omega_{W_3}$, $\psi_4 \in \Omega_{W_4}$, $\psi_5 \in \Omega_{W_5}$, tais que $\mathbf{B}_{W_1}(\psi_1) = \{[A_1], \cdots, [A_8]\}$, $\mathbf{B}_{W_1}(\psi_6) = \{[B_1], \cdots, [B_9]\}$, $\mathbf{B}_{W_2}(\psi_2) = \{[D_1], \cdots, [D_8]\}$, $\mathbf{B}_{W_3}(\psi_3) = \{[F_1], \cdots, [F_{16}]\}$, $\mathbf{B}_{W_3}(\psi_4) = \{[G_1], \cdots, [G_{27}]\}$ e $\mathbf{B}_{W_3}(\psi_5) = \{[H_1], \cdots, [H_{38}]\}$, onde $A_1, A_2, \cdots,$ A_8 e $B_1, B_2, \cdots,$ B_9 são os subconjuntos de W_1 apresentados nas Figuras 9.7.b e 9.7.c, respectivamente; $D_1, D_2, \cdots, D_9$ são os subconjuntos de W_2 apresentados na Figura 9.7.e; $F_1, F_2, \cdots, F_{16}$ são os subconjuntos de W_3 apresentados na Figura 9.7.g; $G_1, G_2, \cdots, G_{27}$ são os subconjuntos de W_4 apresentados na Figura 9.7.i e, finalmente, $H_1, H_2, \cdots, D_{38}$ são os subconjuntos de W_5 apresentados na Figura 9.7.k. Aplicando-se o método discutido na Seção 9.4, temos que as melhores representações seqüenciais de ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5 e ψ_6 são: $\psi_1 = \delta_{C_1}\varepsilon_{C_1}$, $\psi_2 = \delta_{C_{11}}\delta_{C_{12}}\varepsilon_{C_{11}}\varepsilon_{C_{12}}$, $\psi_3 = \varepsilon_{C_2}\delta_{C_3}\varepsilon_{C_3}$ $\psi_4 = \delta_{C_4}\varepsilon_{C_5}\delta_{C_5}$, $\psi_5 = \delta_{C_6}\varepsilon_{C_5}\delta_{C_5}$, $\psi_6 = \delta_{C_7}\delta_{C_8}\delta_{C_9}\delta_{C_{10}}\varepsilon_{C_7}\varepsilon_{C_8}\varepsilon_{C_9}\varepsilon_{C_{10}}$, onde $C_1, C_2, \cdots, C_{12}$ são os conjuntos apresentados na Figura 9.7.l.

A Tabela 9.1 resume os resultados experimentais. Nesta tabela, usamos a seguinte notação:

NSD: número de EE's na sup-decomposição;

OSD: número de deslocamentos, intersecções e uniões usando a sup-decomposição;

NS: número de soluções encontradas pelo algoritmo;

OBS: número de deslocamentos, intersecções e uniões usando a melhor solução;

NBS: número de EE's na melhor solução;

T: tempo para o algoritmo encontrar todas representações seqüenciais.

A Coluna 2 da Tabela 9.1 mostra que o número de intervalos (ou equivalentemente, o número de EE's) na sup-decomposição do operador apresentado na Coluna 1. Na Coluna 3, mostramos o número de deslocamentos, intersecções e uniões efetuados pelo operador se implementamos na forma de sua sup-decomposição. A Coluna 4 apresenta

$$W_1 = \begin{matrix}11111\\11111\\11111\\11\bar{1}11\\11111\end{matrix}$$

(a)

$$A_1 = \begin{matrix}00000\\00000\\01110\\01\bar{0}10\\01110\end{matrix}\quad A_2 = \begin{matrix}01110\\01010\\01110\\00\bar{0}00\\00000\end{matrix}\quad A_3 = \begin{matrix}00000\\00000\\11100\\10\bar{1}00\\11100\end{matrix}\quad A_4 = \begin{matrix}00000\\11100\\10100\\11\bar{1}00\\00000\end{matrix}\quad A_5 = \begin{matrix}11100\\10100\\11100\\00\bar{0}00\\00000\end{matrix}\quad A_6 = \begin{matrix}00000\\00000\\00111\\00\bar{1}01\\00111\end{matrix}\quad A_7 = \begin{matrix}00111\\00101\\00111\\00\bar{0}00\\00000\end{matrix}\quad A_8 = \begin{matrix}00000\\00111\\00101\\00\bar{1}11\\00000\end{matrix}$$

(b)

$$B_1 = \begin{matrix}00000\\00000\\01110\\01\bar{1}10\\01110\end{matrix}\quad B_2 = \begin{matrix}01110\\01110\\01110\\00\bar{0}00\\00000\end{matrix}\quad B_3 = \begin{matrix}00000\\00000\\11100\\11\bar{1}00\\11100\end{matrix}\quad B_4 = \begin{matrix}00000\\11100\\11100\\11\bar{1}00\\00000\end{matrix}\quad B_5 = \begin{matrix}11100\\11100\\11100\\00\bar{0}00\\00000\end{matrix}\quad B_6 = \begin{matrix}00000\\00000\\00111\\00\bar{1}11\\00111\end{matrix}\quad B_7 = \begin{matrix}00111\\00111\\00111\\00\bar{0}00\\00000\end{matrix}\quad B_8 = \begin{matrix}00000\\00111\\00111\\00\bar{1}11\\00000\end{matrix}\quad B_9 = \begin{matrix}00000\\01110\\01110\\01\bar{1}10\\00000\end{matrix}$$

(c)

$$W_2 = \begin{matrix}1111\cdot\\11111\\11111\\11\bar{1}11\\\cdot1111\end{matrix}$$

(d)

$$D_1 = \begin{matrix}0000\cdot\\01100\\01110\\01\bar{1}10\\\cdot0000\end{matrix}\quad D_2 = \begin{matrix}0110\cdot\\01110\\01110\\00\bar{0}00\\\cdot0000\end{matrix}\quad D_3 = \begin{matrix}0000\cdot\\00000\\01100\\01\bar{1}10\\\cdot1110\end{matrix}\quad D_4 = \begin{matrix}0011\cdot\\00111\\00111\\00\bar{0}00\\\cdot0000\end{matrix}\quad D_5 = \begin{matrix}1100\cdot\\11100\\11100\\00\bar{0}00\\\cdot0000\end{matrix}\quad D_6 = \begin{matrix}0000\cdot\\00000\\00110\\00\bar{1}11\\\cdot0111\end{matrix}\quad D_7 = \begin{matrix}0000\cdot\\11000\\11100\\11\bar{1}00\\\cdot0000\end{matrix}\quad D_8 = \begin{matrix}0000\cdot\\00110\\00111\\00\bar{1}11\\\cdot0000\end{matrix}$$

(e)

$$W_3 = \begin{matrix}111111\cdot\\1\cdot1\cdot1\cdot1\\\cdot11\bar{1}111\end{matrix}$$

(f)

$$F_1 = \begin{matrix}001111\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot11\bar{1}100\end{matrix}\; F_2 = \begin{matrix}001111\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot10\bar{1}101\end{matrix}\; F_3 = \begin{matrix}001111\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot01\bar{1}110\end{matrix}\; F_4 = \begin{matrix}001111\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot00\bar{1}111\end{matrix}\; F_5 = \begin{matrix}011110\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot11\bar{1}100\end{matrix}\; F_6 = \begin{matrix}011110\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot10\bar{1}101\end{matrix}\; F_7 = \begin{matrix}011110\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot01\bar{1}110\end{matrix}\; F_8 = \begin{matrix}011110\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot00\bar{1}111\end{matrix}$$

$$F_9 = \begin{matrix}101101\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot11\bar{1}100\end{matrix}\; F_{10} = \begin{matrix}101101\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot10\bar{1}101\end{matrix}\; F_{11} = \begin{matrix}101101\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot01\bar{1}110\end{matrix}\; F_{12} = \begin{matrix}101101\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot00\bar{1}111\end{matrix}\; F_{13} = \begin{matrix}111100\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot11\bar{1}100\end{matrix}\; F_{14} = \begin{matrix}111100\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot10\bar{1}101\end{matrix}\; F_{15} = \begin{matrix}111100\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot01\bar{1}110\end{matrix}\; F_{16} = \begin{matrix}111100\cdot\\0\cdot1\cdot1\cdot0\\\cdot00\bar{1}111\end{matrix}$$

(g)

$$W_4 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot11\cdot\\\cdot\cdot111\cdot1\\1\cdot11\underline{1}1\cdot\\\cdot111\cdot1\cdot\\\cdot1\cdot11\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}$$

(h)

$$G_1 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot100\cdot0\\1\cdot00\underline{1}1\cdot\\\cdot111\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot11\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_2 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot100\cdot0\\0\cdot00\underline{1}1\cdot\\\cdot011\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot11\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_3 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot10\cdot\\\cdot\cdot100\cdot0\\0\cdot01\underline{1}1\cdot\\\cdot011\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot11\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_4 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot101\cdot0\\1\cdot10\underline{1}0\cdot\\\cdot111\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot10\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_5 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot101\cdot0\\0\cdot10\underline{1}0\cdot\\\cdot011\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot10\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_6 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot10\cdot\\\cdot\cdot101\cdot0\\0\cdot11\underline{1}0\cdot\\\cdot011\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot10\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_7 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot100\cdot0\\1\cdot00\underline{1}0\cdot\\\cdot111\cdot0\cdot\\\cdot1\cdot10\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}$$

$$G_8 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot100\cdot0\\0\cdot00\underline{1}0\cdot\\\cdot011\cdot0\cdot\\\cdot1\cdot10\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_9 = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot10\cdot\\\cdot\cdot100\cdot0\\0\cdot01\underline{1}0\cdot\\\cdot011\cdot0\cdot\\\cdot1\cdot10\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{10} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot01\cdot\\\cdot\cdot110\cdot0\\1\cdot00\underline{1}1\cdot\\\cdot101\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot01\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{11} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot01\cdot\\\cdot\cdot110\cdot0\\0\cdot00\underline{1}1\cdot\\\cdot001\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot01\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{12} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot11\cdot\\\cdot\cdot110\cdot0\\0\cdot01\underline{1}1\cdot\\\cdot001\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot01\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{13} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot01\cdot\\\cdot\cdot111\cdot0\\1\cdot10\underline{1}0\cdot\\\cdot101\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{14} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot01\cdot\\\cdot\cdot111\cdot0\\0\cdot10\underline{1}0\cdot\\\cdot001\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}$$

$$G_{15} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot11\cdot\\\cdot\cdot111\cdot0\\0\cdot11\underline{1}0\cdot\\\cdot001\cdot0\cdot\\\cdot0\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{16} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot01\cdot\\\cdot\cdot110\cdot0\\1\cdot00\underline{1}0\cdot\\\cdot101\cdot0\cdot\\\cdot1\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{17} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot01\cdot\\\cdot\cdot110\cdot0\\0\cdot00\underline{1}0\cdot\\\cdot001\cdot0\cdot\\\cdot1\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{18} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot11\cdot\\\cdot\cdot110\cdot0\\0\cdot01\underline{1}0\cdot\\\cdot001\cdot0\cdot\\\cdot1\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{19} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot100\cdot1\\1\cdot00\underline{1}1\cdot\\\cdot101\cdot1\cdot\\\cdot0\cdot01\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{20} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot100\cdot1\\0\cdot00\underline{1}1\cdot\\\cdot001\cdot1\cdot\\\cdot0\cdot01\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{21} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot10\cdot\\\cdot\cdot100\cdot1\\0\cdot01\underline{1}1\cdot\\\cdot001\cdot1\cdot\\\cdot0\cdot01\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}$$

$$G_{22} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot101\cdot1\\1\cdot10\underline{1}0\cdot\\\cdot101\cdot1\cdot\\\cdot0\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{23} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot101\cdot1\\0\cdot10\underline{1}0\cdot\\\cdot001\cdot1\cdot\\\cdot0\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{24} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot10\cdot\\\cdot\cdot101\cdot1\\0\cdot11\underline{1}0\cdot\\\cdot001\cdot1\cdot\\\cdot0\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot0\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{25} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot100\cdot1\\1\cdot00\underline{1}0\cdot\\\cdot101\cdot1\cdot\\\cdot1\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{26} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\\\cdot1\cdot\cdot00\cdot\\\cdot\cdot100\cdot1\\0\cdot00\underline{1}0\cdot\\\cdot001\cdot1\cdot\\\cdot1\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}\; G_{27} = \begin{matrix}\cdot\cdot\cdot0\cdot\cdot\\\cdot0\cdot\cdot10\cdot\\\cdot\cdot100\cdot1\\0\cdot01\underline{1}0\cdot\\\cdot001\cdot1\cdot\\\cdot1\cdot00\cdot\cdot\\\cdot\cdot1\cdot\cdot\cdot\cdot\end{matrix}$$

(i)

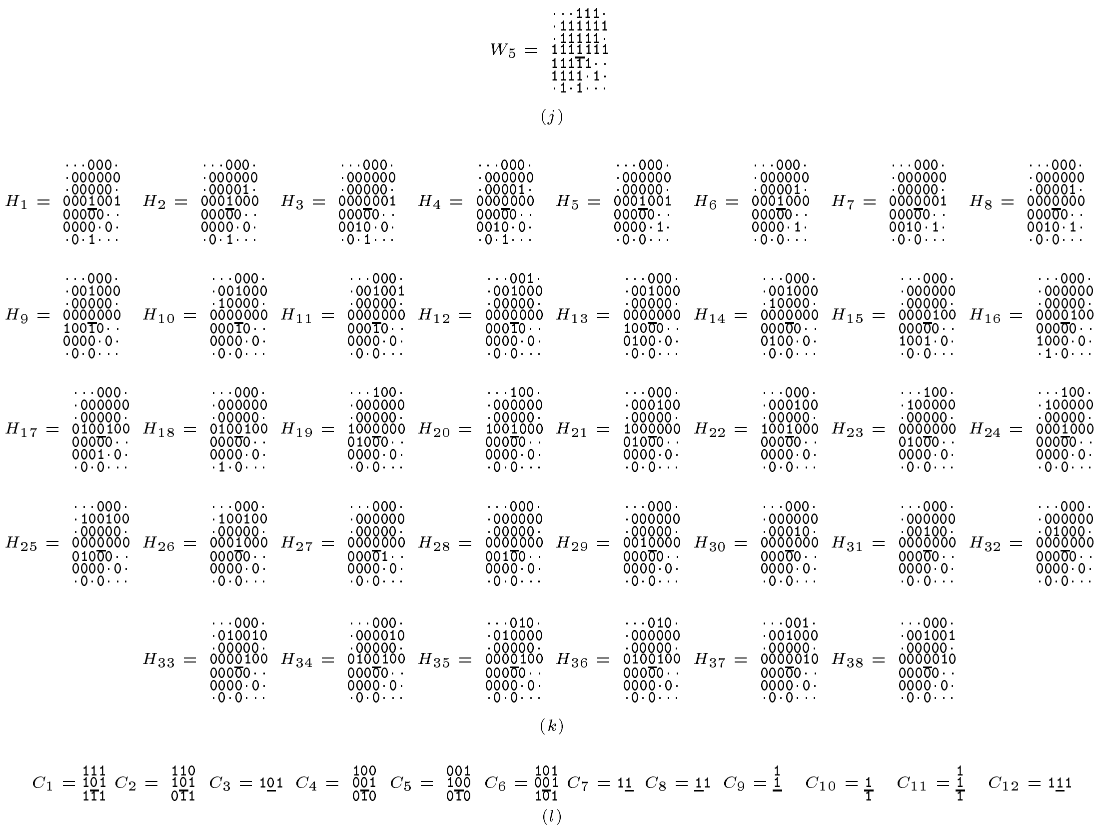

Figura 9.7: Alguns exemplos de transformação da sup-decomposição para decomposições seqüenciais.

o número de representações seqüenciais encontradas pelo algoritmo. A *melhor solução* encontrada pelo algoritmo é uma solução que usa o menor número de operações (isto é, deslocamentos, intersecções e uniões). Na Coluna 5, apresentamos o número de operações da melhor solução. A Coluna 6 mostra o número de EE's na melhor solução. O tempo gasto pelo algoritmo para encontrar todas representações seqüenciais estão apresentadas na Coluna 7 da Tabela 9.1. Comparando as Colunas 3 e 5, observamos que o número de operações na representação seqüencial é muito menor que na sup-decomposição.

Embora os resultados apresentados na Tabela 9.1 sejam bons, devemos observar que o algoritmo para encontrar a melhor representação seqüencial tem complexidade exponencial.

9.7 Conclusão

Neste capítulo, estudamos o problema de transformar a sup-decomposição de W-operadores em decomposições seqüenciais mais eficientes (quando elas existem).

Operador	NSD	OSD	NS	OBS	NBS	T
ψ_1	8	111	1	30	2	1.8s
ψ_2	8	111	169	16	6	12.0s
ψ_3	16	319	1	17	3	1.0s
ψ_4	27	431	1	20	3	4.2s
ψ_5	38	187	1	15	3	48m23s
ψ_6	9	143	676	16	8	30m43s

Tabela 9.1: Tempo utilizado pelo algoritmo para encontrar todas representações seqüenciais.

Definimos o problema da equação de fatoração de Minkowski e fornecemos limites superiores e inferiores para o espaço de soluções para o caso geral e para o caso de intervalos com extremidades direita fixa.

A teoria apresentada aqui foi implementada e aplicada para construir representações seqüenciais de operadores crescentes para os quais existem decomposições seqüenciais em termos de composições de dilatações e erosões.

Uma versão especializada deste problema é o problema clássico de encontrar decomposições seqüenciais para erosões e dilatações. De fato, um próximo passo para este trabalho pode ser encontrar somente os conjuntos viáveis C de maior cardinalidade e posteriormente utilizar os resultados dos Capítulos 4, 5, 6 e 7 para decompor seqüencialmente δ_C ou ε_{C^t}.

Resumindo, estudamos formalmente o problema de transformar a sup-decomposição em representações seqüenciais e exploramos o problema estabelendo limites inferiores e superiores para o espaço de busca para solucioná-lo. No entanto, estamos longe de dar respostas definitivas para este problema tão complexo. O caminho aparenta ser bastante promissor, mas cheio de aventuras e desafios.